Лекция 4. Электрическое поле заряженных проводников. Энергия электростатического поля

Вопросы:

- Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.
- Электроемкость проводников и конденса-торов. (Емкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов).
- Энергия системы неподвижных зарядов.
- Энергия заряженного проводника и конденсатора.
- Плотность энергии электростатического поля.

Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.

Поместим металлический проводник во внешнее электростатическое поле (или сообщим ему некоторый заряд q). На свободные заряды проводника будет действовать электрическое поле, в результате чего все отрицательные заряды (электроны) сместятся против поля, а на месте останутся положительные нескомпенсированные заряды атомов. Такое перемещение зарядов будет продолжаться до тех пор (практически это происходит мгновенно), пока не установится определенное распределение зарядов, при котором электрическое поле во всех точках внутри проводника обратится в нуль.

Первое условие равновесия зарядов на проводнике:
в статическом случае электрическое поле внутри проводника отсутствует, т. е.

$$\boldsymbol{E} = 0 \qquad (1)$$

Замечание. Поскольку в проводнике всюду $\boldsymbol{E} = 0$, то плотность избыточных зарядов внутри проводника также равна нулю (ρ=0).

Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.

Избыточные заряды появляются лишь на поверхности проводника с некоторой плотностью σ_i (эти заряды называют **индуцированными**), вообще говоря, различной в разных точках его поверхности. Индуцированный заряд находится в очень тонком поверхностном слое толщиной в один-два межатомных расстояний.

Отсутствие поля внутри проводника означает (в силу $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$), что потенциал φ в проводнике одинаков во всех точках, т. е. любой проводник в электростатическом поле представляет собой *эквипотенциальную область*, а его поверхность является эквипотенциальной. Из факта эквипотенциальности поверхности проводника следует, что непосредственно у этой поверхности электрическое поле ***E*** направлено по нормали к ней в каждой точке и, соответственно, производная потенциала по касательному направлению $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0.$

Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.

Второе условие равновесия зарядов на проводнике: в статическом случае электрическое поле на поверхности проводника всегда ортогонально поверхности в каждой точке, т. е.

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n \qquad (2)$$

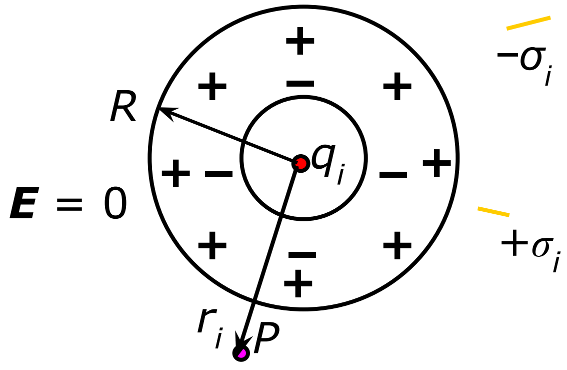
Следствия из условий равновесия:

Так как в состоянии равновесия внутри проводника избыточных зарядов – нет, то удаление вещества из его некоторого внутреннего объема никак не отразится на равновесном расположении зарядов. Т. е. избыточный заряд распределяется на полом проводнике так же, как и на сплошном – по его наружной поверхности. На внутренней поверхности полости в состоянии равновесия избыточные заряды располагаться не могут.

Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.

Таким образом, если в полости проводника нет сторонних зарядов, электрическое поле в ней равно нулю, а внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости никакого электрического поля.

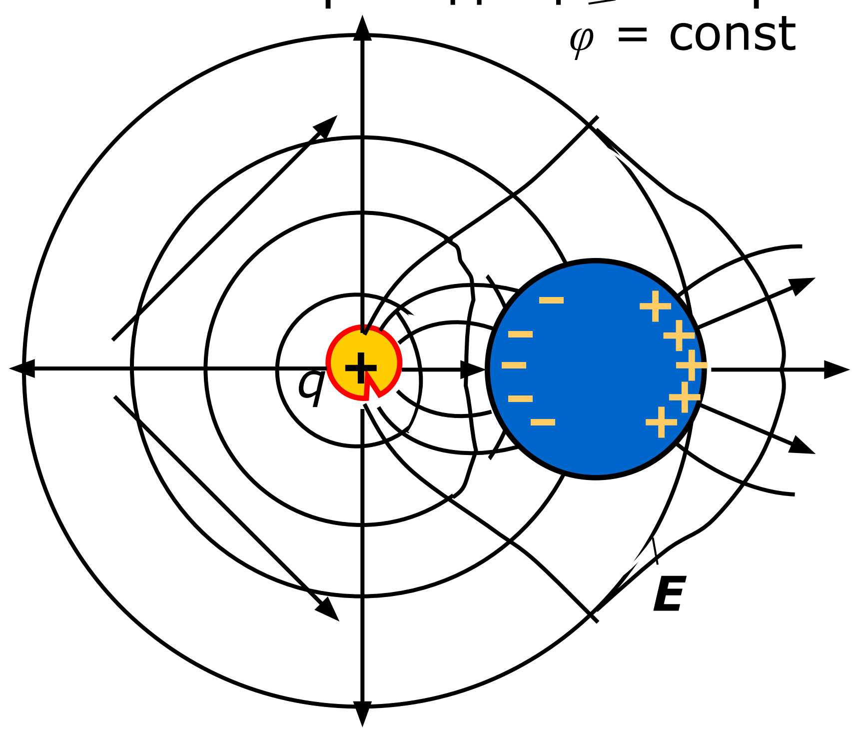
Именно на этом свойстве замкнутой полости основана электростатическая защита объектов (экранирование измерительных приборов) от влияния внешних полей с помощью замкнутых металлических оболочек.



Пример: Если в замкнутую проводящую оболочку поместить положительные сторонние заряды q_i , то на внутренней поверхности полости возникнут отрицательные индуцированные заряды с плотностью $-\sigma_i$, которые будут полностью компенсировать поле зарядов q_i в теле оболочки, где в результате установится $\boldsymbol{E} = 0$. А поле за пределами оболочки, например в т. P, будет определяться только зарядами, индуцированными на наружной поверхности $+\sigma_i$.

Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.

Пример: Преобразование поля «точечного» малого тела с зарядом q при внесении проводящего шара.



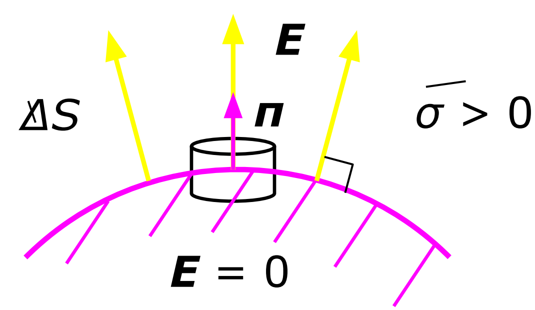
Вследствие электростатической индукции на поверхности незаряженного шара появились индуцированные заряды противоположного знака. Поле этих зарядов в свою очередь вызовет некоторое перераспределение зарядов на поверхности малого шарика, что приведет к образованию неравномерного электрического поля у такой системы.

Условия равновесия зарядов на проводнике. Поле вблизи поверхности проводника.

Расчет поля у поверхности проводника.

Пусть интересующий нас участок поверхности проводника граничит с вакуумом. Воспользуемся теоремой Гаусса и определим поток вектора ***E*** через малый цилиндр с основанием *ΔS*, принадлежащим исследуемой поверхности. Так как линии вектора ***E*** перпендикулярны поверхности проводника и внутри проводника ***E*** = 0, то полный поток через цилиндр будет равен только потоку через «наружный» торец этого цилиндра, т. е. $E_n \cdot \Delta S = \sigma \cdot \Delta S / \varepsilon_0$, где E_n – проекция вектора ***E*** на внешнюю нормаль ***n***, *σ* – локальная поверхностная плотность заряда на проводнике. После сокращения на *ΔS* получаем:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Электроемкость проводников и конденсаторов

- *Емкость проводников*

  Рассмотрим некоторый уединенный проводник, т. е. проводник, удаленный от других проводников, тел (могут быть диэлектрики) и зарядов. Сообщенный проводнику заряд q распределяется по его поверхности так, чтобы везде внутри проводника было поле $\boldsymbol{E} = 0$, а на поверхности $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n$. Поэтому, если уже заряженному проводнику дополнительно сообщить еще заряд q, то последний должен распределиться по проводнику аналогичным образом, как и первый заряд q.

  Из подобия распределений различных порций заряда следует, что отношение плотностей заряда в двух произвольных точках поверхности проводника при любом q – будет постоянным. Отсюда следует, что потенциал уединенного проводника φ пропорционален находящемуся на нем заряду q (это также подтверждается экспериментом).

Электроемкость проводников и конденсаторов

Следовательно отношение q/φ не зависит от заряда и для каждого уединенного проводника имеет свое конкретное значение. Эту величину принято называть **электроемкостью проводника** (или просто емкостью проводника) и обозначать:

$$C = \frac{q}{\varphi} \qquad (3)$$

Единицей измерения емкости в СИ является 1 [Ф] = 1[Кл] / 1[В]. Так как 1 Ф – очень большая емкость (такой емкостью обладал бы шар с *R* = 9 млн км, что в 1500 раз больше $R_{Земли}$; $C_{Земли}$ ≈ 0,7 мФ), то на практике имеют дело с емкостью от 1 пФ до 1 мкФ.

Задача: Определить емкость уединенного тела в форме шара радиуса *R* с диэлектрической проницаемостью *ε*.

Решение: Мысленно зарядим шар зарядом *q* и определим его потенциал (в предположении, что $\varphi \to 0$ при $r \to \infty$) через связь φ и ***E***, т. е. $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}$, где в данном случае $\varphi_2 = 0$ при $r \to \infty$. С учетом теоремы Гаусса получаем:

$$\varphi = \int_R^\infty E_r \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_R^\infty \frac{q}{\varepsilon \cdot r^2} \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon \cdot R},$$

а емкость шара $C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R$.

Электроемкость проводников и конденсаторов

- *Емкость конденсаторов*

Уединенные проводники, вообще говоря, обладают небольшой емкостью. На практике же часто возникает потребность в устройствах, которые при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливали бы на себе заметные по величине заряды.

В основу таких устройств, называемых **конденсаторами**, положен факт, что емкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Это объясняется возникновением индуцированных (на другом проводнике) или связанных (на поверхности диэлектрика) зарядов под действием поля рассматриваемого заряженного проводника; причем наведенные заряды противоположного знака располагаются ближе к проводнику, чем одноименные заряды, и, следовательно, оказывают большее влияние на результирующий потенциал проводника:

$$\varphi = \sum_i (\varphi_{\substack{собс.\\ зар.}} + \varphi_{\substack{инд./связ.\\ зар.}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i (q_{i_{собс.}} + q_{\substack{инд.\\ связ.}})/r \qquad (4)$$

Электроемкость проводников и конденсаторов

Таким образом, потенциал проводника, как алгебраическая сумма (4), уменьшается при приближении к нему других незаряженных тел, а его емкость увеличивается, так как $C = \dfrac{q}{\varphi}$

Простейший конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), расположенных на малом расстоянии друг от друга. <u>Чтобы внешние тела не влияли на емкость конденсатора, его обкладкам придают такую форму и так располагают относительно друг друга, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми на них зарядами, было сосредоточено практически полностью внутри конденсатора.</u> Последнее означает: линии вектора ***E*** начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой, а заряды на обкладках равны по модулю: $+q = |-q|$.

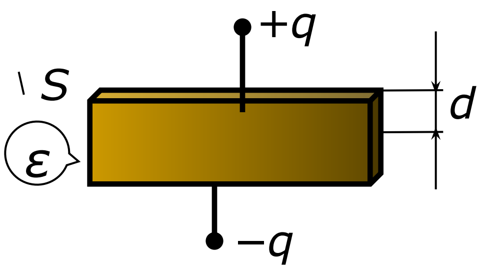
Электроемкость проводников и конденсаторов

Емкость конденсатора определяется как отношение заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками (иначе: отношение заряда к напряжению на конденсаторе *U*), т. е. $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ **или** $C = \dfrac{q}{U}$ (5)

Емкость конденсатора зависит от его геометрии (размеров и формы обкладок), от величины зазора между обкладками (*d*) и от диэлектрической проница-емости (*ε*) среды, заполняющей конденсатор, т. е. можно записать: *C* = *f* (форм-фактор; *d*; *ε*).

Пример 1: Емкость плоского конденсатора.

Пусть площадь обкладок конденсатора *S*, а его заряд *q*, тогда поле между обкладками согласно теореме Гаусса и принципа суперпозиции:



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}.$$

Далее определив напряжение на конденсаторе $U = \varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \dfrac{q \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}$,

получаем емкость: $C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d}, (\varepsilon = \text{const})$.

Электроемкость проводников и конденсаторов

Пример 2: <u>Емкость цилиндрического конденсатора.</u>

Заданы: размеры конденсатора (R_1 , R_2 , l), проницаемость однородного диэлектрика (ε).

Задавшись зарядом на конденсаторе q, определяем по теореме Гаусса поле между обкладками $E_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot r}$,

где $\lambda = q/l$ – линейная плотность заряда.

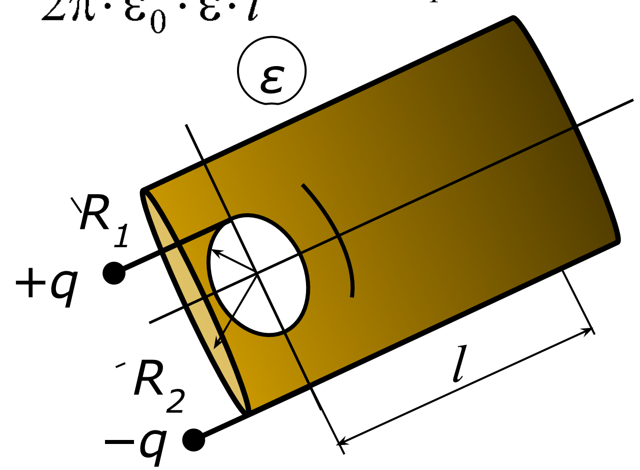
Далее определяем напряжение на конденсаторе:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_r \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot l\cdot r}\cdot dr = \frac{q}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot[\ln r]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\frac{R_2}{R_1}$$

и по определению (5) получаем емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot l}{\ln(R_2/R_1)}.$$



Электроемкость проводников и конденсаторов

Пример 3: <u>Емкость сферического конденсатора.</u>

Заданы: размеры конденсатора (R_1, R_2), проницаемость однородного диэлектрика (ε).

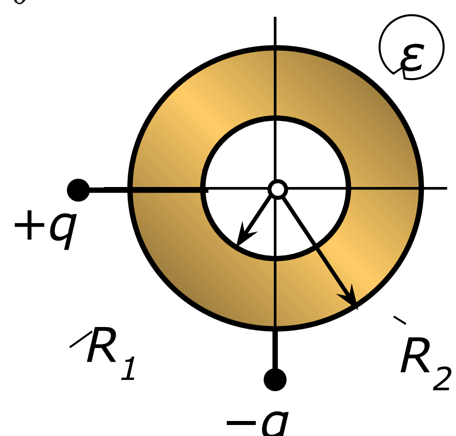
Задавшись зарядом на конденсаторе q, определяем по теореме Гаусса поле в сферическом зазоре между обкладками $E_r = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\varepsilon\cdot r^2}$. Далее рассчитаем напряже-ние на конденсаторе как

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_r \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot r^2}\cdot dr = \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon}\cdot[-\frac{1}{r}]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon}\cdot(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{q}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon}\cdot\frac{(R_2 - R_1)}{R_1\cdot R_2}$$

и получаем емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon\cdot\frac{R_1\cdot R_2}{(R_2 - R_1)}$$



Энергия системы неподвижных зарядов

- *Энергия взаимодействия системы зарядов*

Ранее было получено выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов q_i и q_k:

$W_{p\,ik} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}$, где r_{ik} – расстояние между этими зарядами.

Теперь рассмотрим систему из N-точечных зарядов: q_1, q_2,.., q_i ,…, q_N. Еще в механике было доказано, что энергия взаимодействия системы материальных точек (а сейчас точечных зарядов) равна сумме энергий взаимодействия каждой *i*-ой точки (*i*-ого заряда) со всеми оставшимися точками (зарядами), взятых попарно:

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{N} W_{p\,ik}(r_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{N} \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}.$$

Если переписать последнее выражение в виде двух последовательных сумм:

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\cdot\varphi_i \qquad (6)$$

Таким образом, энергия взаимодействия системы зарядов определяется как сумма частных произведений ($q_i{\cdot}\varphi_i$), где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами системы (кроме q_i) в точке нахождения заряда q_i.

Энергия системы неподвижных зарядов

- *Полная энергия взаимодействия системы непрерывно распределенных зарядов*

  Если заряды распределены непрерывно (допустим, есть заряженное тело), то, разлагая заряженную систему на совокупность элементарных зарядов $dq = \rho \cdot dV$ и переходя от суммирования в (6) к интегрированию по объему, получаем:

$$W_p = \frac{1}{2}\int_V \rho \cdot \varphi \cdot dV \qquad (7)$$

  где φ – потенциал, создаваемый всеми зарядами системы в элементе объема dV (в том числе самим зарядом dq).

Энергия заряженного проводника и конденсатора

- *Энергия уединенного заряженного проводника*

  Пусть проводник имеет заряд q и потенциал φ. Поверхность проводника является эквипотенциальной, т. е. везде, где есть заряд, значение φ – одинаково. Поэтому для проводника в формуле (7) потенциал можно вынести из-под знака интеграла и тогда энергию заряженного проводника можно определить как

$$W_p = \frac{\varphi}{2}\int_V \rho \cdot dV = \frac{q \cdot \varphi}{2}$$

  а с учетом определения емкости (3) можно также записать:

$$W_p = \frac{q \cdot \varphi}{2} = \frac{C \cdot \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2 \cdot C} \qquad (8)$$

Энергия заряженного проводника и конденсатора

- *Энергия конденсатора*

Пусть $+q$ и φ_1 – заряд и потенциал положительно заряженной обкладки, а $-q$ и φ_2 – заряд и потенциал отрицательно заряженной обкладки конденсатора. Тогда, воспользовавшись формулой (7) и разбив интеграл на две части (для одной и другой обкладок), получим энергию заряженного конденсатора

$$W_p = \frac{1}{2}[q\cdot\varphi_1 + (-q)\cdot\varphi_2] = \frac{1}{2}\cdot q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}\cdot q\cdot U$$

а с учетом определения емкости можно также записать:

$$W_p = \frac{q\cdot U}{2} = \frac{C\cdot U^2}{2} = \frac{q^2}{2\cdot C} \qquad (9)$$

Последние две формулы используются в зависимости от условий работы конденсатора: когда на обкладках поддерживается постоянным заряд (конденсатор отключен от источника), то $W_p = \frac{q^2}{2\cdot C}$; когда поддерживается постоянным напряжение (конденсатор подключен к источнику питания), то $W_p = \frac{C\cdot U^2}{2}$.

Плотность энергии электростатического поля

- *О локализации энергии электрического поля*

Формула (7) определяет энергию любой электрической системы через заряды и потенциалы, но эту же энергию можно выразить через основную характеристику поля – напряженность ***E***. Убедимся в этом на простейшем примере – заряженном плоском конденсаторе.

Пренебрегая искажением поля у краев пластин, будем считать поле между обкладками однородным. Подставив в формулу энергии $W_p = \frac{C \cdot U^2}{2}$ выражение для емкости плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d}$, получаем:

$$W_p = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S \cdot U^2}{2d} \cdot \frac{d}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot S \cdot d$$

Так как для плоского конденсатора $U/d = E$ и $S \cdot d = V$ (объем между обкладками), то его энергию можно также представить:

$$W_p = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot V \qquad (10)$$

Плотность энергии электростатического поля

Так как электрическое поле в плоском конденсаторе однородно, то заключенная в нем энергия распределяется с **постоянной (объемной) плотностью**

$$w = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \qquad (11)$$

В общей теории доказывается, что в случае изотропного диэлектрика (когда ***E*** ↑↑ ***D***) полную энергию поля можно определить как:

$$W_p = \int_V \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot dV = \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \cdot dV \qquad (12)$$

где учтено, что $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}$. При этом объемную плотность энергии электрического поля можно рассчитывать по формулам:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \qquad (13)$$

Вывод: Так как эта плотность энергии определяется через напряженность поля, то можно заключить, что <u>энергия локализована в самом электрическом поле</u>.

Плотность энергии электростатического поля

- *Дополнение к формуле* (13)

  Если представить вектор электрического смещения как сумму векторов: ***D*** = ε_0·***E*** +***P***, то объемную плотность энергии электрического поля можно представить как:

$$w = \frac{\vec{E}\cdot(\varepsilon_0\cdot\vec{E}+\vec{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0\cdot\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{E}\cdot\vec{P}}{2} \qquad (14)$$

  где слагаемое $\frac{\varepsilon_0\cdot\vec{E}^2}{2}$ определяет плотность энергии ***E***-поля в вакууме, а слагаемое $\frac{\vec{E}\cdot\vec{P}}{2}$ представляет собой энергию, затрачиваемую на поляризацию единицы объема диэлектрика.