



МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лекция 7

Двойственность линейного программирования



к.т.н., доцент
Кирпичёва Елена Юрьевна

Исходная ЗЛП

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

$m \times n$ m уравнений
 n неизвестных

Двойственная ЗЛП

$$Z^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_{l1}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \geq c_l, \\ a_{l+11}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \dots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0$$

$n \times m$ n уравнений
 m неизвестных

Правила построения двойственных задач:

1. Если в исходной задаче целевая функция исследуется на \min , то в двойственной задаче она будет исследоваться на \max и наоборот.
2. Если в исходной задаче n переменных и m уравнений, то в двойственной задаче будет m переменных и n уравнений.
3. Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи, а правые части системы ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

Правила построения двойственных задач:

4. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений исходной задачи транспонированием.
5. Если в исходной задаче $x_k \geq 0$ то в двойственной задаче k -ое ограничение будет неравенством, если же в исходной задаче x_k не имело ограничений на знак, то k -ое ограничение в двойственной задаче будет равенством.
6. Если в исходной задаче l -ое ограничение - неравенство, то в двойственной задаче $y_l \geq 0$, если же в исходной задаче l -ое ограничение - равенство, то в двойственной задаче нет ограничений на знак y_l .

Пример построения двойственной задачи

Исходная задача

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 4x_4 \geq 5 \\ 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_4 \geq 7 \end{array} \right.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача

$$5y_1 + 10y_2 + 7y_3 \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y_1 + 4y_3 \leq 3 \\ 3y_2 + 5y_3 \leq 2 \\ -2y_2 \leq -3 \\ -4y_1 - 3y_3 = 5 \end{array} \right.$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \text{ } \forall \text{ знака}$$

$$y_3 \geq 0$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач

Лемма 1

Если исходная задача (X) исследуется на max , а двойственная (Y) на min , то $Z(x) \leq Z'(y)$

Лемма 2

Если $Z(x^*) = Z'(y^*)$, то x^*, y^* – оптимальные планы.

Теорема 1 (1 –ая теорема двойственности)

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальные планы, то и другая имеет оптимальный план, причем: $Z_{max} = Z'_{min}$.

Если же в одной из задач целевая функция не ограничена на ОДЗ, то у другой задачи вообще нет допустимых планов.

Теорема 2 (2 –ая теорема двойственности)

План X^* -исходной задачи и план Y^* -двойственной задачи являются оптимальными тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0, \\ j = 1, \dots, n$$

Пара симметричных двойственных задач

$$Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$$

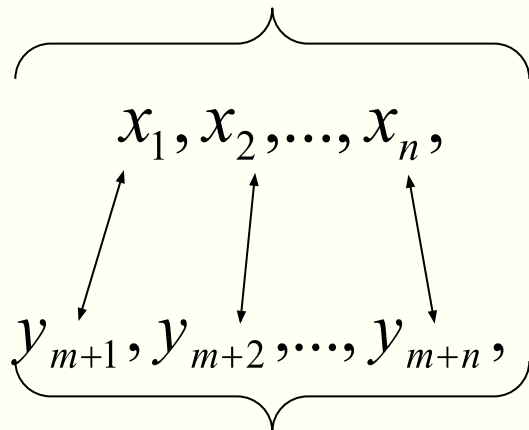
$$Z' = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$$

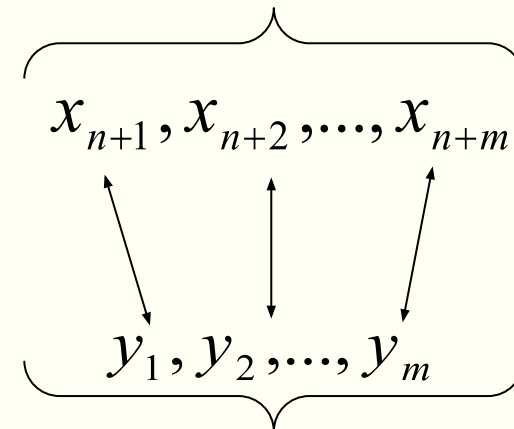
Пары сопряженных переменных

Основные



Дополнительные

Дополнительные



Основные

Экономический смысл двойственных задач

Сырьё	Расход сырья (усл. ед.) на 1 ед. товара		Запасы сырья
	Товар А	Товар Б	
№1	1	3	6
№2	2	1	8
Цена, руб	3000	2000	

Задача I (исходная)

$$Z = 3000 \cdot x_1 + 2000 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

Переменные двойственной задачи (двойственные оценки)

=

Теневые цены

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Задача II (двойственная)

$$Z' = 6 \cdot y_1 + 8 \cdot y_2 \rightarrow \min$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Экономический смысл двойственных задач

Т.к. по первой теореме двойственности $Z_{max} = Z'_{min}$, то

предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану X^* и получить от ее реализации прибыль в размере Z_{max} или начать продавать ресурсы по оптимальной цене Y^* и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы Z'_{min} :

$$Z_{max} = Z'_{min} = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2$$

Можно определить как изменится прибыль от производства Z_{max} при изменении объема i -го сырья.

Теневая цена будет показывать, на какую величину изменится максимальный доход Z_{max} при изменении запаса соответствующего сырья на единицу.

Экономический смысл двойственных задач

Переменная двойственной задачи – это:

- 1) оценка (**теневая цена**), соответствующая одной единице ограниченного i -го сырья.
- 2) равна величине, на которую могла бы увеличиться суммарная прибыль от производства, если бы количество этого ограниченного сырья увеличилось на единицу (если это увеличение было бы использовано оптимально).
- 3) количество прибыли, недополученной из-за нехватки единицы ограниченного сырья b_i .

Экономический смысл двойственных задач

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \end{array} \right.$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = 18y_1 + 16y_2 +$$

$$+ 5y_3 + 21y_4 \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \end{array} \right.$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$F^*_{\max} = Z^*_{\min} = 24$$

Экономический смысл двойственных задач

Двойственной переменной соответствует значение z-оценки соответствующей переменной исходной задачи в симплекс-таблице.

Базис	св. чл.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	6	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_5	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
x_2	4	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0
x_6	3	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	1
Z_{max}	24	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
Z_{min}	24	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4

Экономический смысл двойственных задач

Задача 1					
Число единиц продукции		Остатки ресурсов			
$x^*_1 = 6$	$x^*_2 = 4$	$x^*_3 = 0$	$x^*_4 = 0$	$x^*_5 = 1$	$x^*_6 = 3$
$y^*_5 = 0$	$y^*_6 = 0$	$y^*_1 = 4/5$	$y^*_2 = 3/5$	$y^*_3 = 0$	$y^*_4 = 0$
Превышение					

- дефицитные ресурсы получают ненулевые оценки, которые определяют степень их дефицитности;
- теневые цены (y^*) показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная выручка от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на одну единицу.

Экономический смысл двойственных задач об использовании ресурсов

Задача I (исходная)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

и условия неотрицательности

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0.$$

Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.

Исследование на чувствительность

При исследовании на чувствительность исследуется зависимость решения ЗЛП от небольших изменений коэффициентов в условии задачи. При этом предыдущее решение может стать либо недопустимым, либо неоптимальным.

- К недопустимости **пред. решения** могут привести изменения запасов ресурсов и/или добавление новых ограничений.
- К неоптимальности **пред. решения** могут привести изменение целевой функции и/или изменение технологических коэффициентов и/или включение в модель нового вида производственной деятельности.

Исследование на устойчивость

Исследование на устойчивость – исследование диапазона изменения правых частей системы ограничений, при котором найденное оптимальное решение не изменяется.