Пример решения транспортной задачи (закрытая модель)

Исследование операций

Задача

Составить оптимальный план перевозок груза из трех пунктов отправления с запасами 30, 48, 24 т в четыре пункта назначения с потребностями 18, 27, 42, 15 т. Тарифы перевозок c_{ij} (в ден/ед.) из (i= 1,2,3) в (j=l,..,4) приведены в матрице

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим методы построения опорных планов (опорного решения) ТЗ

Метод северо-западного угла

- Заполняют клетку A_1B_1, (левый верхний угол), поставив в него **min**(a_1b_1). Если **min** совпадает с A_1, то запасы пункта A_1 считают исчерпанными и переходят к удовлетворению потребностей b_1 начиная с ячейки A_2B_1.
- Затем переходят к заполнению клетки A_2B_2. Перемещаясь так по диагонали, доходят до последней клетки A_mB_n. При этом все грузы будут исчерпаны, и потребности пунктов удовлетворены.
- ***Замечание:*** если на некотором шаге исчерпаны запасы, то переходим к удовлетворению потребностей как это было описано выше. Если же были удовлетворены потребности, то приступают к исчерпыванию запасов аналогичным способом.

Решение задачи методом северо-западного угла

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13 **18** 1шаг	7 **12** 2 шаг	11 **X**	5 **X**	~~30~~ 12
A_2	11 **X**	8 **15** 3 шаг	13 **33** 4 шаг	7 **X**	~~48~~ 33
A_3	6 **X**	10 **X**	12 **9** 5 шаг	9 **15** 6 шаг	~~24~~ 15
b_j	18	~~27~~ 15	~~42~~ 9	15	102 / 102

Опорное решение задачи

$$X = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Метод аппроксимации Фогеля

- ***1.*** На каждом шаге находят разности между двумя наименьшими тарифами (даже если они одинаковые) во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;
- ***2.*** Из найденных разностей выбирают максимальную и заполняют клетку, которой соответствует данная разность.
- Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы не будут развезены по потребителям.

Решение задачи методом аппроксимации Фогеля

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Δc
A_1	X *13*	X *7*	**15** *11* 6 шаг	**15** *5* 2 шаг	~~30~~ 15	[illegible]
A_2	X *11*	**27** *8* 3 шаг	**21** *13* 4 шаг	X *7*	~~48~~ 21	[illegible]
A_3	**18** *6* 1 шаг	X *10*	**6** *12* 5 шаг	X *9*	~~24~~ 6	[illegible]
b_j	18	27	42	15	102 / 102	
Δc	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		

Опорное решение задачи

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод минимальной стоимости для нахождения опорного плана

Предполагает заполнение на каждом шаге клеток с минимальным тарифом, что даст, очевидно, меньшие суммарные затраты на перевозку груза.

Решение задачи методом наименьшей стоимости

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	13 X	7 **15** 3 шаг	11 X	5 **15** 1 шаг	~~30~~ 15
A_2	11 X	8 **12** 4 шаг	13 **36** 6 шаг	7 X	~~48~~ 36
A_3	6 **18** 2 шаг	10 X	12 **6** 5 шаг	9 X	~~24~~ 6
b_j	18	~~27~~ 12	~~42~~ 36	15	102 \ 102

Опорное решение задачи

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод потенциалов

базируется на следующей теореме (признак оптимальности решения):

Для заполненных ячеек таблицы должно выполняться условие: $u_i + v_j = c_{ij}$

Для незаполненных ячеек условие: $u_i + v_j \leq c_{ij}$

(причем количество заполненных ячеек в опорном плане должно быть равно ***n+m-1***, где ***m*** – число поставщиков, ***n*** – число потребителей)

Проверим план, полученный с помощью метода наименьшей стоимости, на оптимальность

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

n+m-1=4+3-1=6

Должно быть заполнено 6 ячеек.

Реально заполненных ячеек тоже 6.

Составим систему уравнений для заполненных ячеек:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$u_1 + v_2 = 7$	**Полагая $u_1 = 0$, найдем: $v_2 = 7$**
$u_1 + v_4 = 5$	$v_4 = 5$
$u_2 + v_2 = 8$	**Так как $v_2 = 7$, то $u_2 = 1$**
$u_2 + v_3 = 13$	**Так как $u_2 = 1$, то $v_3 = 12$**
$u_3 + v_1 = 6$	**Так как $u_3 = 0$, то $v_1 = 6$**
$u_3 + v_3 = 12$	**Так как $v_3 = 12$, то $u_3 = 0$**

Итак, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, $v_1 = 6$, $v_2 = 7$, $v_3 = 12$, $v_4 = 5$

Проверим второе условие теоремы для незаполненных ячеек

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 0,}$$
$$\mathbf{v_1 = 6,\ v_2 = 7,\ v_3 = 12,\ v_4 = 5}$$

$$\mathbf{u_1 + v_1 = 6 \le C_{11} = 13 \quad +}$$
$$\mathbf{u_1 + v_3 = 12 > C_{13} = 11 \quad (-1)}$$
$$\mathbf{u_2 + v_1 = 7 \le C_{21} = 11 \quad +}$$
$$\mathbf{u_2 + v_4 = 6 \le C_{24} = 7 \quad +}$$
$$\mathbf{u_3 + v_2 = 7 \le C_{32} = 10 \quad +}$$
$$\mathbf{u_3 + v_4 = 5 \le C_{34} = 9 \quad +}$$

План X1 не оптимальный, поэтому необходимо ***перераспределение грузов***

Перераспределение грузов

осуществляется с помощью ***циклического сдвига***

Цикл - ломанная, вершины которой находятся в заполненных ячейках, кроме одной. Это одна вершина должна находиться в незаполненной ячейке, для которой $u_i + v_j > C_{ij}$.

При этом звенья ломанной должны удовлетворять ***следующим условиям:***

1. Параллельность строкам и столбцам
2. В каждой строке и каждом столбце не более двух вершин

Построение цикла

Построим цикл:

$\mathbf{u_1 + v_3 = 12 > \mathit{C}_{13} = 11}$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Всем вершинам ломанной припишем + или –, начиная с проблемной ячейки:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0+ & 15 \\ 0 & +12 & 36- & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Циклический сдвиг

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0+ & 15 \\ 0 & +12 & 36- & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

В свободную клетку помещаем груз величиной α, равной минимальному значению из всех чисел в отрицательных клетках цикла. **Min (15,36)=15**

Сдвиг по циклу: Во все положительные клетки прибавляем α, из отрицательных – вычитаем α.

Новый план: $$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим новый план на оптимальность

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим систему уравнений для заполненных ячеек:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$u_1 + v_3 = 11$ **Полагая $u_1 = 0$, найдем: $v_3 = 11$**

$u_1 + v_4 = 5$ **$v_4 = 5$**

$u_2 + v_2 = 8$ **Так как $u_2 = 2$, то $v_2 = 6$**

$u_2 + v_3 = 13$ **Так как $v_3 = 11$, то $u_2 = 2$**

$u_3 + v_1 = 6$ **Так как $u_3 = 1$, то $v_1 = 5$**

$u_3 + v_3 = 12$ **Так как $v_3 = 11$, то $u_3 = 1$**

Итак, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$, $v_1 = 5$, $v_2 = 6$, $v_3 = 11$, $v_4 = 5$

Проверим второе условие теоремы для незаполненных ячеек

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$u_1 = 0,\ u_2 = 2,\ u_3 = 1,$

$v_1 = 5,\ v_2 = 6,\ v_3 = 11,\ v_4 = 5$

$u_1 + v_1 = 5 \le C_{11} = 13 \quad +$

$u_1 + v_2 = 6 \le C_{12} = 7 \quad +$

$u_2 + v_1 = 7 \le C_{21} = 11 \quad +$

$u_2 + v_4 = 7 \le C_{24} = 7 \quad +$

$u_3 + v_2 = 7 \le C_{32} = 10 \quad +$

$u_3 + v_4 = 6 \le C_{34} = 9 \quad +$

План X2 оптимальный

Оптимальное решение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Zmin=15*11+15*5+27*8+21*13+18*6+6*12=909

Используемая литература:

- Борзунова Т.Л., Барыкин М.П. , Данилов Е.А. Соловьева О.Ю. - Математическое моделирование: учебное пособие/ВолгГТУ, - Волгоград, 2008.
- Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб: Питер, 2000.