ЗДРАВСТВУЙТЕ!

9.3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае проще всего обратиться к формуле из пятой лекции:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{ц.м.} \tag{9.10}$$

полный импульс системы частицы равен произведению полной массы системы М и скорости Ц.М. системы.

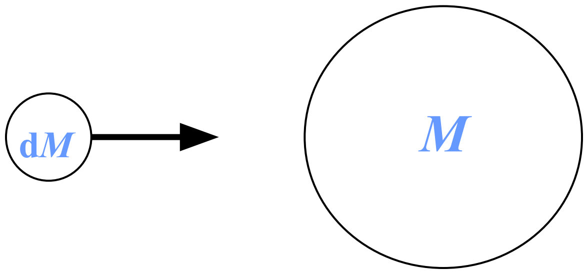
Если продифференцировав обе части равенства (9.10) по времени, то при условии, что M постоянна, получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{ц.м.}}{dt} = M\vec{a}_{ц.м.} = \vec{F}_{внешн.} \qquad (9.11)$$

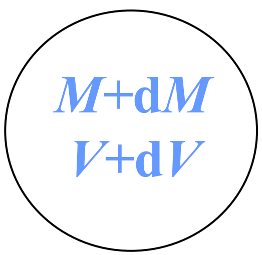
где $\vec{F}_{внешн.}$ - внешняя результирующая сила, приложенная к системе. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса. Важным примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса *M* ракеты все время уменьшается, т.е. $dM/dt < 0$.

Другим примером систем с переменной массой представляет собой погрузка сыпучих или иных материалов на транспортную ленту конвейера; при этом масса M нагруженного конвейера возрастает, т.е.

$dM/dt > 0$.



а) в момент времени t



б) в момент времени $t + dt$

Рис. 9.2.

Общий случай системы с переменной массой можно исследовать на примере системы, изображенной на рис. 9.2.

В некоторый момент времени t система имеет массу M и импульс $\vec{p}$, по направлению к ней движется со скоростью $\vec{u}$ небольшое (бесконечно малое) тело массой dM, которое находится в состоянии, близком к тому, чтобы войти в рассматриваемую систему. Для простоты будем называть этот процесс “столкновением”. За бесконечно малый промежуток времени dt к массе системы M добавляется масса dM. Таким образом, через время dt масса системы изменится от M до M+dM. (заметим, что масса dM может быть отрицательной величиной, например для ракеты, летящей вперед за счет выброшенных газов).

Для того, чтобы применить формулу (9.11), необходимо рассмотреть определенную фиксированную систему частиц. Иными словами, изменение импульса мы должны рассматривать у одних и тех же частиц как до столкновения так и после него. **Полную систему** мы определим как включающую в себя массы *M* и d*M*. Тогда в исходном состоянии, т.е. в момент времени *t*, ее полный импульс равен $M\vec{V} + \vec{U}dM$. В момент времени *t*+d*t* (после того как масса d*M* присоединилась к массе *M*) скорость системы в целом становится равной $\vec{V} + d\vec{V}$, а ее полный импульс равен $d\vec{P}$.

Таким образом изменение импульса $d\vec{P}$ запишется в виде:

$$d\vec{P} = (M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) - (M\vec{V} + \vec{U}dM) = Md\vec{V} + \vec{V}dM + dMd\vec{V} - \vec{U}dM$$

При этом в соответствии с формулой (9.11) имеем

$$\vec{F}_{внешн.} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{Md\vec{V} + \vec{V}dM - \vec{U}dM}{dt}$$

Или

$$\vec{F}_{внешн} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - (\vec{U} - \vec{V})\frac{dM}{dt} \qquad (9.12,a)$$

При написании этой формулы мы опустили слагаемое $\frac{dM\,d\vec{V}}{dt}$, поскольку в пределе бесконечно малых величин оно равно нулю. Заметим, что разность $\vec{U}-\vec{V}$ есть не что иное, как скорость $\vec{V}_{отн}$ тела массой d*M* относительно скорости тела массой *M*. Таким образом, $\vec{V}_{отн}=\vec{U}-\vec{V}$ - это **скорость с которой масса d*M* входит в систему с точки зрения наблюдателя, связанного с массой *M*.**

Уравнение (9.12,*а*) можно записать теперь в виде:

$$M\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}_{внешн}+\vec{V}_{отн.}\frac{dM}{dt} \qquad (9.12,б)$$

Первое слагаемое в правой части $\vec{F}_{внеш}$ описывает внешнюю силу, действующую на систему в целом (в случае ракеты в нее следует включать силу тяжести и силу сопротивления воздуха). В нее не входит сила, с которой тело массой dM действует на тело массой M в результате их столкновения, поскольку для системы в целом (полной системы), эта сила является внутренней.

Второе слагаемое в правой части $\vec{V}_{отн}(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t)$ описывает скорость, с которой импульс передается системе (или уносится от нее), благодаря добавлению или выносу из нее массы. Поэтому это слагаемое можно рассматривать как своего рода силу, которая обусловлена добавлением (или выбрасыванием) массы и действует на систему массой *M*. Для ракеты это слагаемое называют силой реактивной тяги, т.к. оно описывает силу, возникающую в результате выбрасывания продуктов сгорания и действующую на ракету.

Уравнение (9.12,б) – уравнение движения тела переменной массы, которое впервые было выведено И.В. Мещерским. Из уравнения (9.12,б) можно получить уравнение Э.К. Циолковского (при условии что на ракету не действуют внешние силы):

$$V = U \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Оно показывает:

1) чем больше конечная масса ракеты m, тем больше должна быть стартовая масса ракеты m_0;

2) чем больше скорость истечения газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражения (9.12) получены для нерелятивистского случая.

Лекция 10. Динамика вращения твердых тел

1. Особенности вращательного движения.
2. Кинетическая энергия и момент инерции.
3. Зависимость момента инерции относительно оси вращения.
4. Момент силы.
5. Условия равновесия тела, имеющего ось вращения.
6. Момент импульса и основное уравнение динамики.
7. Закон сохранения момента импульса.
8. Аналогия между величинами при поступательном и вращательном движениях.
9. Гироскопы.

1. Особенности вращательного движения

Рассмотрим вращательное движение абсолютно твердого тела. Вращающиеся тела часто встречаются на практике – это всевозможные маховики, валы, роторы генераторов и двигателей, винты, сверла, фрезы т.п.

В общем случае это вращение вокруг неподвижной точки, которое можно свести к трем независимым вращением вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Ось может быть: неподвижной, перемещающейся в пространстве, совсем свободной.

При наблюдении за вращательным движением прежде всего бросается в глаза устойчивость, приобретаемая телом при вращении. Можно предположить, что тело, вращающееся вокруг оси, проходящей через центр масс, если оно свободно от внешних воздействий, должно сохранять свое состояние неопределенно долго. Такое заключение аналогично первому закону Ньютона для поступательного движения.

Внешнее воздействие приводит к изменению состояния вращательного движения тела. Это утверждение аналогично второму закону Ньютона. Однако результат действия силы (ускорение движения) зависит не только от силы и от массы приводимого в движение тела, но и от того, где расположена точка приложения силы и как расположена масса тела относительно оси вращения.

При изучении законов движения материальной точки мы ввели ряд динамических величин: импульс, силу, кинетическую энергию и т.п.

Фактически мы пользовались этими величинами и для описания законов поступательного движения твердого тела.

Особенностью вращательного движения является то, что все точки тела движутся по окружностям (концентрическим), центры которых лежат на оси вращения. Все эти точки движутся с разными линейными скоростями, а одинаковой является для них угловая скорость ω. Если же твердое тело вращается, то все его динамические характеристики можно выразить через угловую скорость, ибо линейные скорости разных точек твердого тела различны. Именно по этой причине мы вынуждены будем ввести в данном случае ряд новых физических величин: момент инерции, момент силы и момент импульса.

2. Кинетическая энергия и момент инерции

Прежде всего, найдем выражение для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Задачу будем решать в приближении ньютоновской механики, т.е. при условии, что все точки движутся со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме. Для упрощения задачи вначале рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек, а затем обобщим результат на любое твердое тело.

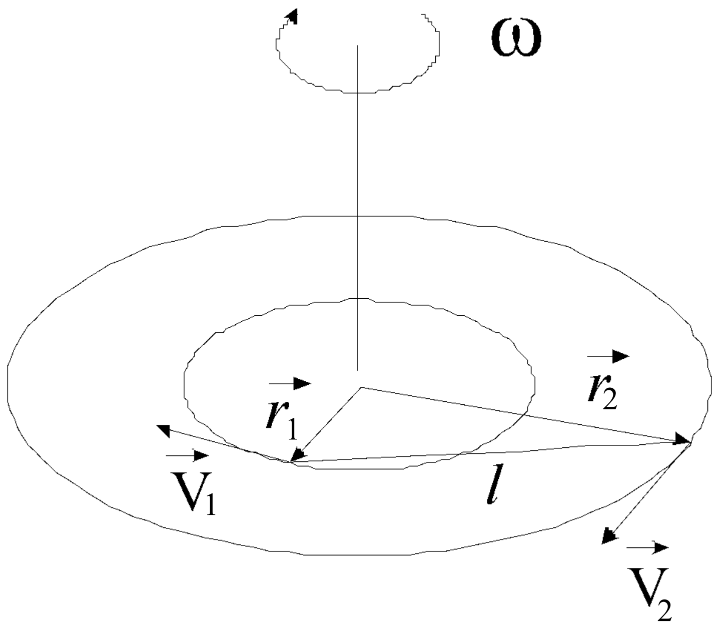


Рис. 9.1

Пусть две материальные точки с массами m_1 и m_2 расположены на расстояние l друг от друга. Будем считать систему жесткой, т.е. расстояние между точками не меняется. Система вращается вокруг оси с угловой скоростью ω. Тогда линейная скорость первой точки $V_1 = r_1 \cdot \omega$, скорость второй точки $V_2 = r_2 \cdot \omega$, где r_1 и r_2 – расстояние материальных точек до оси вращения.

Кинетическая энергия материальных точек:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 \quad T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 \tag{9.1}$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \tag{9.2}$$

Физическая величина

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \qquad (9.3)$$

называется моментом инерции системы материальных точек. Он характеризует распределение масс этих точек относительно оси вращения.

Единицей момента инерции в СИ служит килограмм на метр в квадрате (кг·м^2).

Подставив (9.3) в (9.2), получим

$$T = J\omega^2 / 2 \qquad (9.4)$$

Итак, **кинетическая энергия системы материальных точек равна половине произведения момента инерции этой системы на квадрат угловой скорости вращения.**

Если система состоит не из двух, а из *n* материальных точек, то выражение для её кинетической энергии сохраняется, но момент инерции имеет вид:

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_n r_n^2 \qquad (9.5)$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$J = \int r^2 dm, \qquad (9.6)$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z.

Итак, **величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси, называется моментом инерции тела относительно данной оси.**

Примеры: момент инерции сплошного тела - однородного цилиндра радиуса *R* относительно оси симметрии

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

Момент инерции тонкостенного полого цилиндра радиуса R относительно оси симметрии

$$J = m R^2$$

Таким образом, **момент инерции зависит от формы, массы, размера тела и различен относительно разных осей вращения.**

Содержание

3. Зависимость момента инерции относительно оси вращения

Момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от положения оси вращения. Это непосредственно следует из выражения (9.5).

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_n r_n^2$$

Действительно, если перенести ось, то r_1, r_2, ..., r_n станут другими, в результате чего и момент инерции окажется иным.

Вычислим моменты инерции системы из двух материальных точек относительно двух осей, параллельных друг другу и перпендикулярных плоскости чертежа (рис. 10.2). Расстояние между осями $AC = l$.

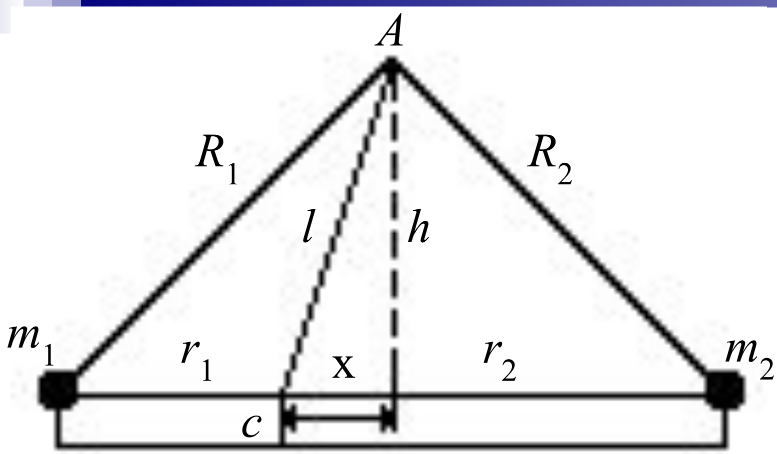


Рис. 10.2

Момент инерции системы относительно оси, проходящий через точку *A*:

$$J = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 \qquad (10.7)$$

Момент инерции той же системы относительно оси, проходящий через центр масс *C*:

$$J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \qquad (10.8)$$

По теореме Пифагора

$R_1^2 = h^2 + (r_1 + x)^2$ и $\qquad R_2^2 = h^2 + (r_2 - x)^2$

Подставив в (10.7) и проделав несложные преобразования, получим с учетом (10.8)

$$J = J_0 + (m_1 + m_2)(h^2 + x^2) + 2x(m_1 r_1 - m_2 r_2)$$

Но $h^2 + x^2 = l^2$; из определения «центра масс» следует, что $m_1r_1=m_2r_2$. Следовательно

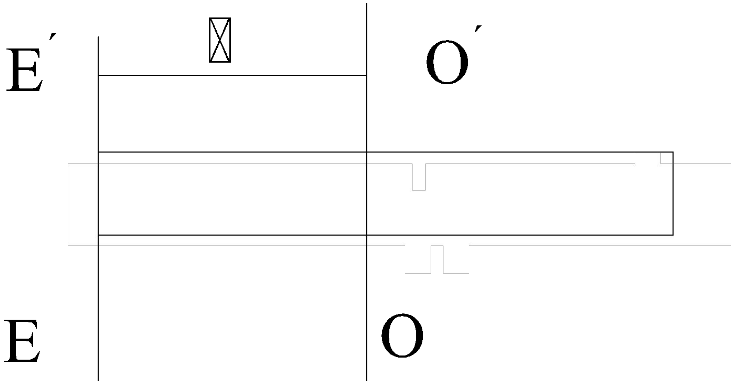
$$\boldsymbol{J = J_0 + ml^2} \tag{10.9}$$

Итак, **момент инерции системы материальных точек относительно произвольной оси равен моменту инерции этой системы относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между осями** **(теорема Штейнера).**

Из теоремы Штейнера следует, что минимальное значение имеет момент инерции системы относительно оси, проходящей через её центр масс.

$$J = \frac{ml^2}{12}$$ для оси OO`

$$J = \frac{ml^2}{3}$$ для оси EE`.



Содержание

4. Момент силы

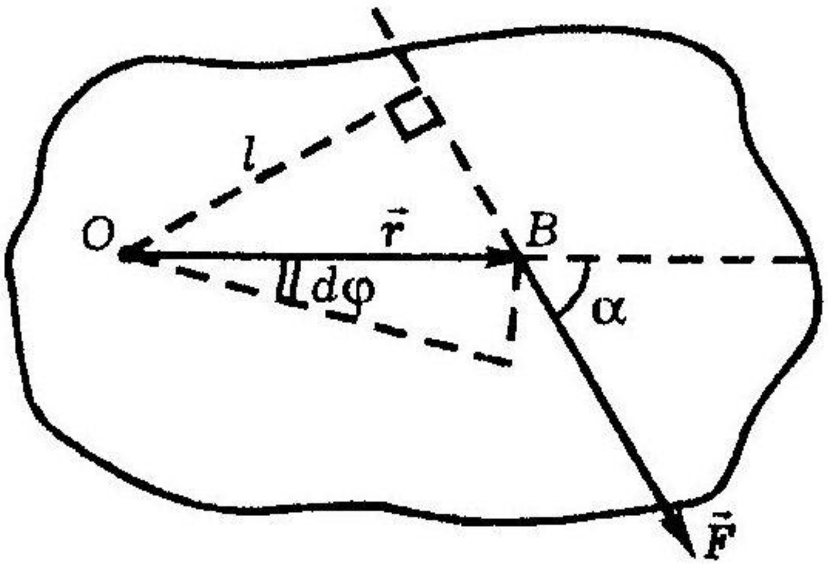


Рис. 9.3

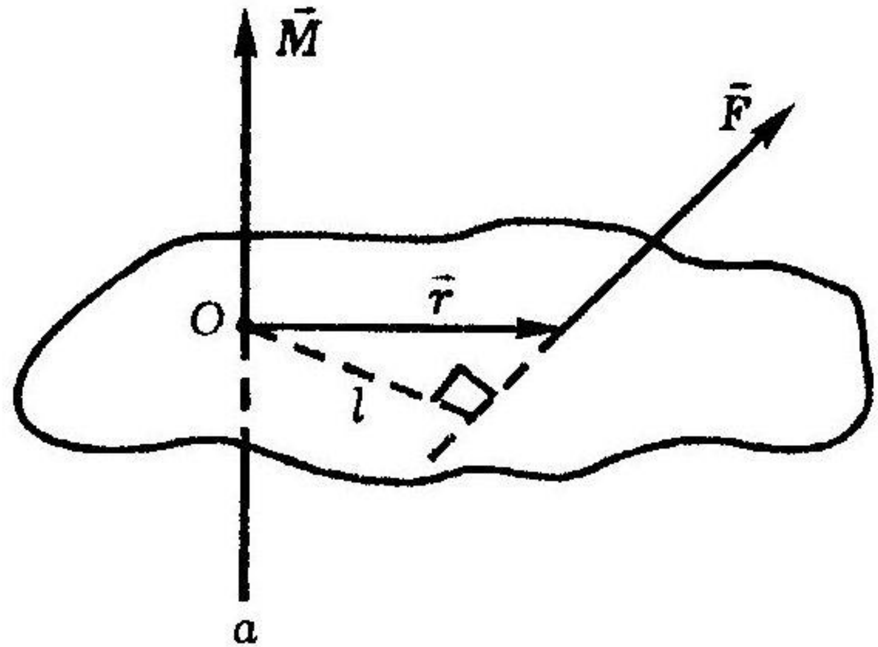


Рис. 9.4

Предположим, что на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси *a*, проходящей через точку *O*, действует постоянная сила **F** (рис.9.3). Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка. Положение точки приложения силы **F** определяется радиус–вектором **r**.

Элементарная работа силы δA при повороте радиус-вектора **r** на угол dφ

$$\delta A = Fr\sin\alpha\, d\varphi, \qquad (10.10)$$

где α – угол, образованный векторами **r** и **F.**

Величина $r\sin\alpha = l$ представляет кратчайшее расстояние между осью вращения и линией действия силы. Её называют **плечом силы.** **Величина равная векторному произведению радиус-вектора r на силу F, носит название момента силы относительно точки (рис. 9.4)**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}] \qquad (10.11)$$

Вектор **M** образует с векторами **r** и **F** правовинтовую систему. Модуль этого вектора

$$M = Fr\sin(\widehat{r, F}) = Fl. \qquad (10.11a)$$

Следует иметь ввиду, что в механике принято различать момент силы относительно точки O и момент силы относительно оси вращения, на которой лежит данная точка. Первая величина, как мы только что видели, является вектором, а вторая – проекцией вектора **M** на ось a.

Если угол, образованный радиус-вектором **r** и осью вращения, равен π/2, то направление вектора **M** совпадает с осью вращения. Именно такой случай показан на рис. 9.3 и 9.4.

Теперь возвратимся к выражению 9.10 и элементарную работу силы **F** выразим как произведение момента этой силы относительно оси M_a на угол поворота радиуса-вектора dφ:

$$\delta A = M_{\grave{a}} d\varphi.$$

Если M и dφ имеют одинаковые знаки, то $\delta A > 0$; если же их знаки противоположны, то $\delta A < 0$.

Но в соответствии с законом сохранения механической энергии элементарная работа всех внешних сил равна приращению кинетической энергии тела, так как его собственная потенциальная энергия не меняется. Поэтому

$$M_a d\varphi = d\left(\frac{I\omega_a^2}{2}\right) = I\omega_a d\omega_a,$$

Или после деления на промежуток времени *dt,* за который Произведена элементарная работа:

$$M_a \frac{d\varphi}{dt} = I\omega_a \frac{d\omega_a}{dt}.$$

Поскольку $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_a$ и $\frac{d\omega_a}{dt} = \varepsilon_a$, то

$$M_a = I\varepsilon_a, \qquad (9.12)$$

где M_a - суммарный момент импульса всех внешних сил относительно неподвижной оси вращения (если к телу приложено не одна, а несколько сил); ε_a - угловое ускорение тела относительно этой же оси.

Справедливо также и уравнение

$$M = I\varepsilon. \qquad (9.12a)$$

$$M = I\varepsilon.$$

Данное уравнение носит название основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

Из уравнения видно, что момент инерции определяет инерциальные свойства твердого тела при вращении: при одном и том же значении момента силы тело приобретает тем меньшее угловое ускорение, чем большим моментом инерции оно обладает.

6. Момент импульса

Если момент инерции тела является постоянным во времени, то уравнение $M_a = I\varepsilon_a,$ можно записать так:

$$M_a = \frac{d(I\omega_a)}{dt}. \tag{9.13}$$

Величина $I\omega_a = L_a$ носит название момента импульса относительно оси *a*. Таким образом, производная по времени от момента импульса относительно оси равна моменту силы относительно этой оси:

$$M_a = \frac{dL_a}{dt}.$$

Момент импульса твердого тела можно рассматривать как сумму орбитальных моментов импульса всех частиц, из которых состоит тело. Тогда легко обнаруживается связь между импульсом и моментом импульса частицы. Эти два вектора вместе с радиусом-вектором **r**, определяющим положение частицы относительно некоторой произвольно выраженной точки на оси *a*, образуют правовинтовую систему:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \qquad (9.14)$$

Момент импульса относительно оси есть проекция вектора **L** на данную ось вращения (рис.9.5)

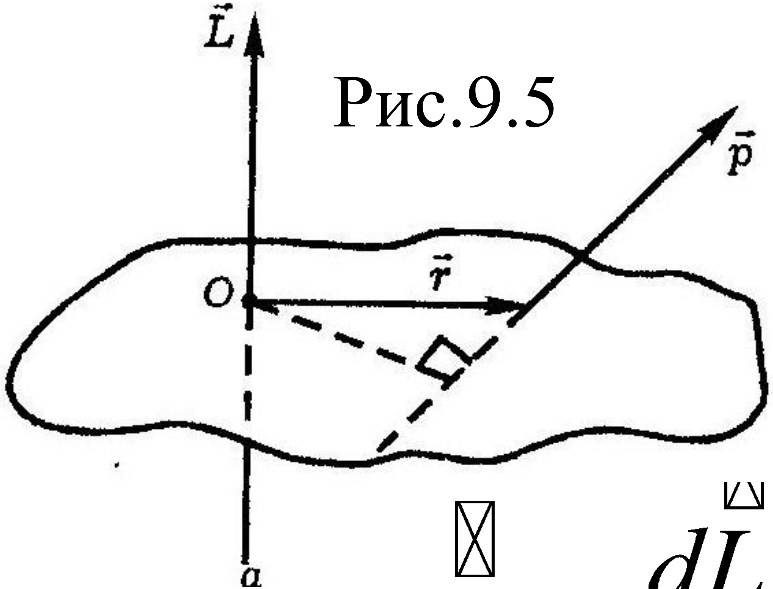


Рис.9.5

Если векторы **M** и **L** взяты относительно одной и той же точки, то для твердого тела (системы частиц) справедливо уравнение

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{M}dt = d\vec{L}. \qquad \mathbf{(9.15)}$$

Это уравнение носит название уравнения моментов. В динамике твердого тела оно занимает такое же место, как в динамике материальной точки уравнение

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Содержание

Значение момента импульса не ограничивается лишь рамками классической механики. Он играет громадную роль и при анализе явлений, происходящих в немеханических системах.

Единицей момента импульса в СИ служит килограмм - метр на секунду в квадрате (кг·м/с^2) .

7. Закон сохранения момента импульса

Во всех записанных нами уравнениях: 1) **M является моментом внешней силы или равнодействующей внешних сил**, 2) **сумма моментов внутренних сил всегда равна нулю**. Это последнее утверждение принимается как постулат в механике Ньютона, дополнительно к законам Ньютона. Если система замкнута, то алгебраическая сумма моментов внешних сил, действующих на тело, равна нулю, т.е. **M** = 0. Тогда из (9.15) следует, что и dL = 0, т. е.

$$\vec{L} = \sum L_i = const, \qquad (9.16)$$

в инерциальной системе отсчета суммарный момент импульса замкнутой системы частиц сохраняется.

Мы получили очень важный результат, который называется законом сохранения момента импульса: **момент импульса замкнутой системы частиц является постоянной величиной**.

Момент импульса может сохраняться и для незамкнутых систем. Если относительно некоторой точки *O* в выбранной системе отсчета суммарный момент внешних сил равен нулю, то согласно уравнению моментов сохраняется момент импульса относительно этой точки *O*.

Если проекция суммарного момента всех внешних сил, например, на неподвижную ось равна нулю, то сохраняется не сам момент импульса, а его проекция на эту ось. Иначе говоря, в этом случае сохраняется момент импульса относительно оси:

$$\vec{L}_z = \sum L_{iz} = const. \qquad (9.16)$$

При этом сам импульс **L** относительно точки *O* на этой оси может изменяться.

Сохранение момента импульса замкнутой системы допускает, что моменты импульса отдельных её частей могут со временем изменяться. Однако при всех изменениях убыль момента импульса одной части системы всегда равна приращению момента импульса другой её части.

Из закона сохранения момента импульса в применении к вращению твердого тела относительно оси

$$\vec{L}_z = I\omega_z = const \qquad (9.17)$$

следует, что изменяя (увеличивая или уменьшая) каким-либо способом момент инерции тела во время вращения, можно изменять (уменьшать или увеличивать) в такое же число раз угловую скорость. Иллюстрацией могут служить, например, опыты на скамье Жуковского – подставке, свободно вращающейся в горизонтальной плоскости. Сидящий на скамье человек раскидывает или прижимает к туловищу руки и тем самым изменяет момент инерции (рис. 9.6). В соответствии с законом сохранения момента импульса её угловая скорость изменяется.

Рис.9.6

8. Аналогия между величинами и соотношениями между ними при поступательном и вращательном движениях

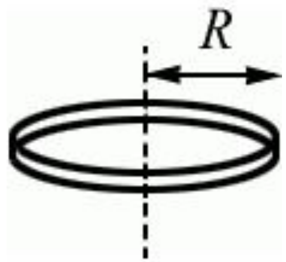
Таблица 2

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Путь	s	Угол поворота	φ
Скорость	$v = \frac{ds}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Импульс	$p = mv$	Момент импульса	$L = J\omega$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Равнодействующая внешних сил	F	Сумма моментов внешних сил	M
Основное уравнение динамики	$F = ma = \frac{dp}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M = J\varepsilon = \frac{dL}{dt}$
Работа	$F\,ds$	Работа вращения	$M\,d\varphi$
Кинетическая энергия	$mv^2/2$	Кинетическая энергия вращения	$J\omega^2/2$

Моменты инерции некоторых распространенных тел (относительно указанных на рисунках осей)

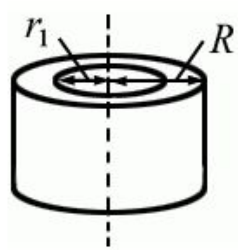
$$MR^2$$

кольцо



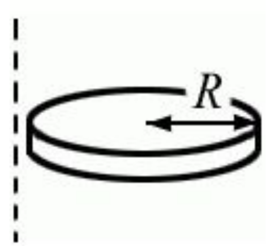
$$\frac{1}{2}m\left(R^2 + r_1^2\right)$$

Кольцо толщиной R-r_1



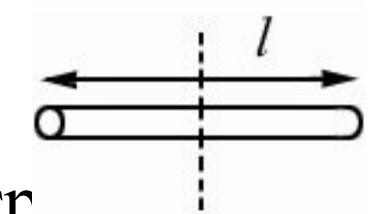
$$\frac{3}{2}mR^2$$

Диск (край)



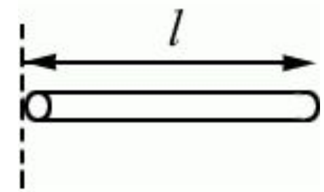
$$\frac{ml^2}{12}$$

Стержень-центр



$$\frac{ml^2}{3}$$

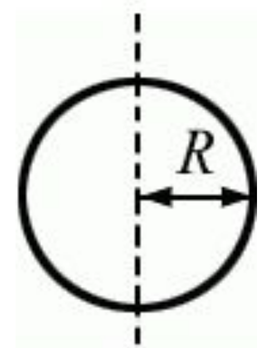
Стержень-край



$$\frac{2}{5}mR^2$$

$$\frac{2}{3}mR^2$$

Сферическая оболочка



Содержание

6.6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

Три фундаментальных закона природы: закон сохранения импульса, момента импульса и энергии.

Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета. В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а последние применимы только в инерциальных системах.

Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если систему можно считать ***замкнутой*** (сумма всех внешних сил, и собственно, всех моментов сил, равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно – тело должно быть еще и ***адиабатически изолированным*** (т.е. не участвовать в теплообмене).

Во всей истории развития физики, законы сохранения оказались, чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

1. ***В основе закона сохранения энергии*** **лежит** ***однородность времени***, т. е. **равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени).**

Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 на момент времени t_2, без изменения значений координат и скорости частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены, координаты и скорости частиц имеют в любой момент времен $t_2 + t$ такие же значения, какие имели до замены, в момент времени $t_1 + t$

2. **В основе *закона сохранения импульса* лежит *однородность пространства*,** т. е. **одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат).**

Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.

3. **В основе закона сохранения момента импульса** лежит *изотропия пространства*, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат).

Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы, как целого, не отражается на её механических свойствах.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса.

Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п.

Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как принципы запрета:

Любое явление, при котором не выполняются хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются.

Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается.

При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распадаться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных, и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления и в макромире.

9. Свободные оси вращения. Гироскоп

Если ось вращения тела является свободной (например, тело свободно падает), то сохранение момента импульса не означает, что в инерциальной системе отсчета сохраняется направление угловой скорости. За редким исключением мгновенная ось, как говорят, прецессирует вокруг направления момента импульса тела. Это проявляется в «кувыркании» тела при падении. Однако у тел существуют так называемые главные оси инерции, совпадающие с осями симметрии этих тел. Вращение вокруг них сохраняется устойчивым, векторы угловой скорости и момента импульса совпадают по направлению и никакого «кувыркания» не происходит. В этом случае справедливо выражение

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (9.18)$$

Именно так ведет себя хорошо известный всем волчок, или гироскоп.

Гироскоп – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.

Название «гироскоп» происходит от греческого *gyréuō* – кружусь, вращаюсь, и *skopéō* – смотрю, наблюдаю. Гироскоп обладает интересными свойствами, проявляющимися у вращающихся небесных тел, артиллерийских снарядов, роторов турбин, установленных на судах. На свойствах гироскопов основаны различные приборы и устройства, применяемые в современной технике.

В механике гироскопом называют любое массивное однородное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с большой угловой скоростью. Обычно ось вращения выбирают так, чтобы момент инерции относительно этой оси был максимальным. Тогда вращение наиболее устойчиво.

Свойства гироскопов реализуются при выполнении двух условий:

1. Ось вращения гироскопа должна иметь возможность изменять свое положение в пространстве;
2. Угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть очень велика по сравнению со скоростью изменения направления оси в пространстве.

Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, его обычно закрепляют на кольцах так называемого карданова подвеса (рис.9.7).

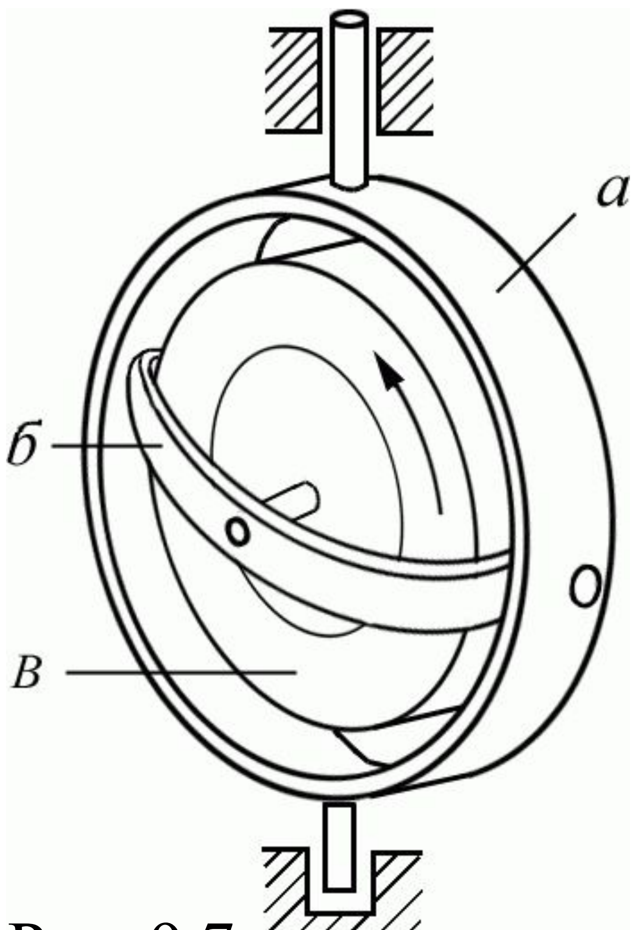


Рис. 9.7

Он представляет собой две кольцевые обоймы *а* и *б,* которые входят одна в другую и могут вращаться относительно друг друга. Точка пересечения всех трех осей $OO, O'O', O''O''$

совпадает с положение центра масс гироскопа *С* (рис. 9.8). В таком подвесе гироскоп может вращаться вокруг любой из трех взаимно центр масс относительно подвеса будет покоиться. Пока гироскоп неподвижен, его без особых усилий можно повернуть вокруг любой оси. Если гироскоп привести в быстрое вращение относительно оси *OO* и после этого попытаться повернуть подвес, то ось гироскопа стремится сохранить свое направление

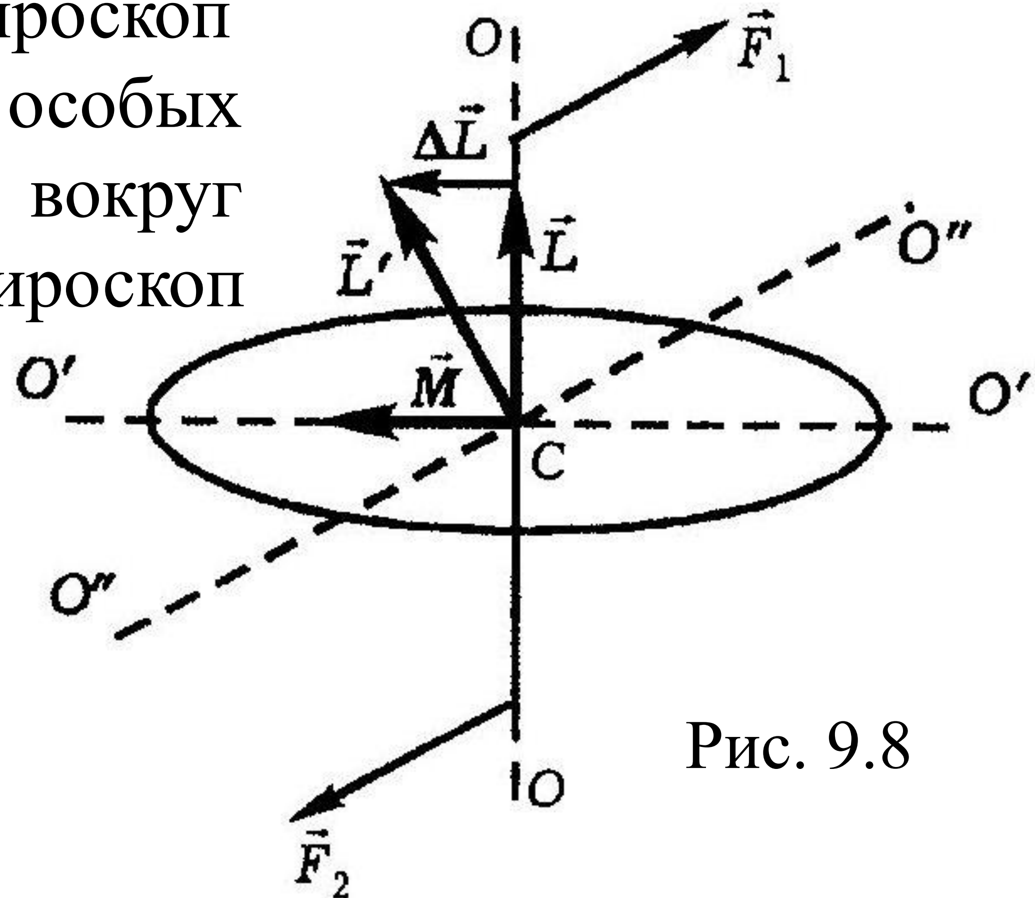


Рис. 9.8

неизменным. Причина такой устойчивости вращения связана с законом сохранения момента импульса.

Для изменения направления оси гироскопа относительно неподвижной системы координат надо, чтобы на тело действовал момент сил. Если этот момент сил мал, он не в состоянии заметно изменить момент импульса гироскопа. Ось вращения гироскопа, с направлением которой вектор момента импульса почти совпадает, не отклоняется далеко от своего положения, а лишь дрожит, оставаясь на месте.

Пусть теперь на ось гироскопа действует вращающий момент **M,** создаваемый парой сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 9.8). Казалось бы, он должен вызвать поворот оси гироскопа в той плоскости, в которой лежат эти силы. В действительности ось гироскопа поворачивается вокруг оси, перпендикулярной к указанной плоскости. Это явление, получившее название гироскопического эффекта,

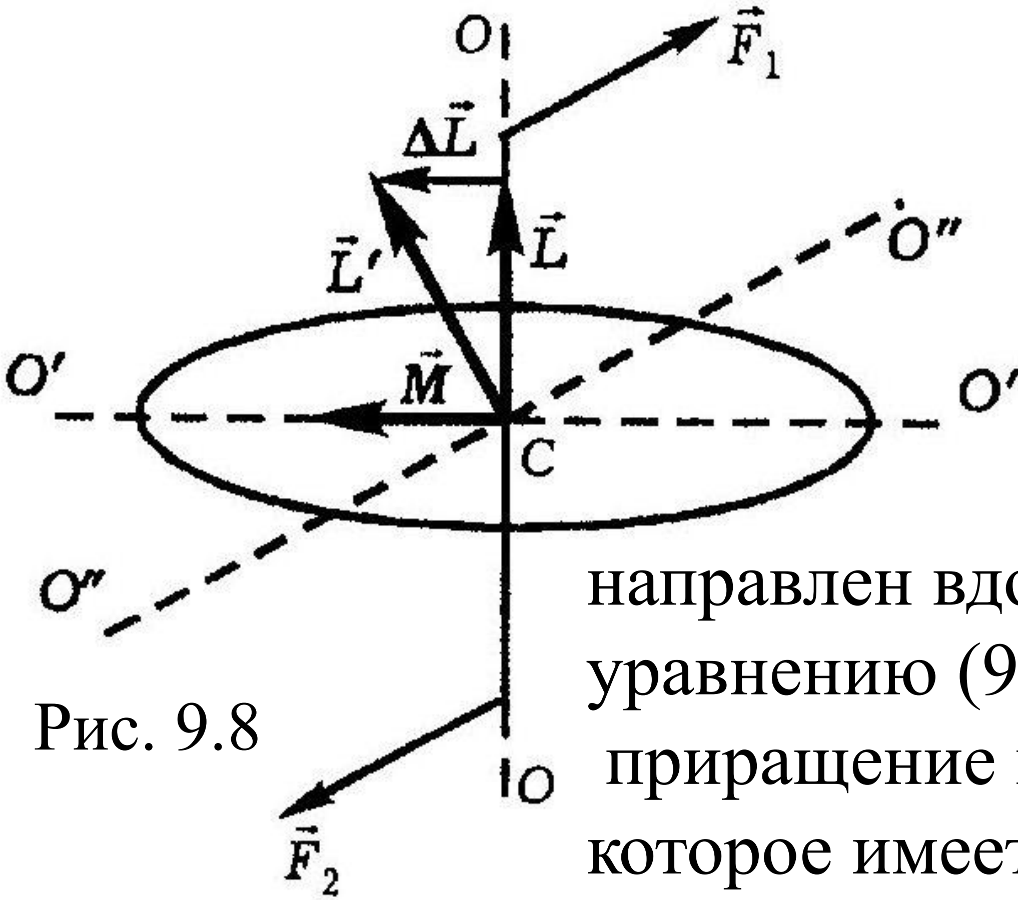


Рис. 9.8

также происходит в полном соответствии с законам сохранения момента импульса.

На рис.9.8 вектор **M** направлен вдоль оси $O'O'$. Согласно уравнению (9.15) за время Δt он вызовет приращение момента импульса **ΔL,** которое имеет такое же направление, как и вектор **M:**

$$\vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L}. \quad (9.19)$$

Направление вектора $\vec{L}'$ и будет определять новое направление оси $O''O''$ так, чтобы угол между направлениями векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ уменьшался.

Ось гироскопа *OO* при этом стремится совместиться с осью вынужденного вращения $O'O'$. В этом случае под действием тяжести $m\vec{g}$ ось окажется наклоненной к вертикали, но волчок не падает, а прецессирует, т.е. его ось описывает конус вокруг оси Z.

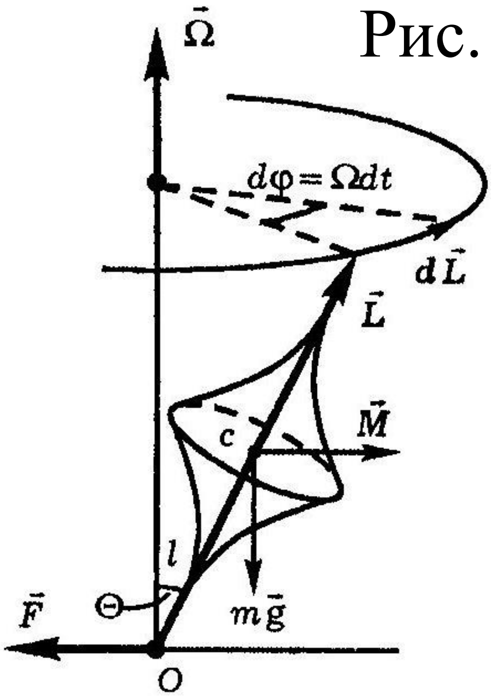


Рис. 9.9

Опыт показывает, что чем больше угловая скорость вращения волчка $\vec{\omega}$, тем меньше угловая скорость прецессии $\vec{\Omega}$. Такое поведение волчка легко объяснить с помощью закона сохранения момента импульса. Если ω >> Ω, то появлением некоторого добавочного момента импульса можно пренебречь, и поэтому в дальнейшем будем считать, что $\vec{L} = I\vec{\omega}$, где I – момент инерции относительно главной оси вращения. Момент силы тяжести $\vec{M}$ вызовет приращение вектора $\vec{L}$ на $d\vec{L} = \vec{M}dt$. Направление вектора $d\vec{L}$ совпадает с направлением $\vec{M}$ и $d\vec{L} \perp \vec{L}.$ А так как сила $\vec{F} = m\vec{g}$ действует непрерывно, то вектор $\vec{L}$ и вместе с ним ось волчка будут непрерывно прецессировать вокруг вертикальной оси Z с некоторой угловой скоростью прецессии $\vec{\Omega}.$

Из рисунка 9.9 следует, что

$$d\varphi = M\Omega dt = \frac{dL}{L\sin\Theta} = \frac{Mdt}{I\omega\sin\Theta} = \frac{mgl\sin\Theta}{I\omega\sin\Omega}dt. \quad (9.20)$$

Если к оси гироскопа приложена сила с моментом M, то угловая скорость прецессии равна

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\alpha} = \frac{M}{I\omega\sin\alpha},$$

где α – угол между направлениями вектора силы **F** и вектором $\mathbf{L}_0$, I – момент инерции гироскопа относительно оси y, ω – угловая скорость собственного вращения гироскопа вокруг оси y, **M** – момент силы **F** относительно центра O.

Из формулы следует, что скорость прецессии Ω тем медленнее, чем больше величина $I\omega$, называемая собственным кинетическим моментом гироскопа или моментом количества движения.

Прецессия гироскопа возможна лишь при действии момента сил на ось гироскопа ($M \neq 0$).

Вращение прекратится, как только исчезнет силовое воздействие на ось гироскопа M=0. Этим ги-роскоп принципиально отличается от невращающегося тела. Невращающееся тело под влиянием приложен-ного момента начинает ускоренно вращаться, и это вращение будет происходить с достигнутой скоростью бесконечно долго и после прекращения действия момента – закон сохранения момента импульса. Гироскоп начинает вращаться с постоянной угловой скоростью Ω сразу после приложения момента силы M и останавливается немедленно после прекращения действия момента силы.

Пример прецессионного вращения дает артиллерийский снаряд. Если снаряд не вращается вокруг собственной оси, то под действием силы сопротивления воздуха он начинает кувыркаться. Его полет становится беспорядочным, при этом значительно возрастает сопротивление движению и уменьшается дальность полета. Вращающийся вокруг оси снаряд обладает всеми свойствами гироскопа, и сила сопротивления воздуха вызывает его прецессию вокруг прямой, по которой направлена его скорость, т.е. вокруг касательной к траектории движения центра тяжести. Это делает полет правильным и обеспечивает попадание в цель головной частью. Вращение снаряду придают специальные направляющие в стволе орудия – нарезные стволы.

Если гироскоп находится в кардановом подвесе, то он имеет три степени свободы. Гироскоп на кардановом подвесе не испытывает действия момента в результате вращения Земли или в результате движения самолета, в котором он находится. Поэтому ось вращающегося тела будет сохранять определенное направление в пространстве.

Если эту ось направить на звезду, то при любых перемещениях прибора и толчках она будет продолжать указывать на эту звезду, меняя свою ориентировку относительно осей, связанных с Землей.

Если ось ротора закреплена в основании и это основание неподвижно, то ось гироскопа не может изменять свое направление в пространстве. Если вращать основание с угловой скоростью Ω, то ось ротора будет давить на подшипники с моментом силы

$$M = I\Omega\omega\sin\alpha.$$

На морских судах и самолетах имеется много вращающихся частей: вал двигателя, ротор турбины, гребные и воздушные винты и т.д. При разворотах судна, качке на подшипники, в которых укреплены эти вращающиеся части, действуют указанные гироскопи-ческие силы, и их необходимо учитывать при соответствующих инженерных расчетах, чтобы избежать катастрофы.

6.6. Законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

Три фундаментальных закона природы: *закон сохранения импульса, момента импульса и энергии*.

Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета. В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а последние применимы только в инерциальных системах.

Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если систему можно считать *замкнутой* (сумма всех внешних сил, и собственно, всех моментов сил, равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно – тело должно быть еще и *адиабатически изолированным* (т.е. не участвовать в теплообмене).

Во всей истории развития физики, законы сохранения оказались, чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

1. В основе **закона сохранения энергии** лежит ***однородность времени***, т. е. равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени).

Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 на момент времени t_2, без изменения значений координат и скорости частиц не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены, координаты и скорости частиц имеют в любой момент времен

$t_2 + t$ такие же значения, какие имели до замены, в момент времени $t_1 + t$

2. В основе *закона сохранения импульса* лежит ***однородность пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат).

Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.

3. В основе закона сохранения момента импульса лежит ***изотропия пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат).

Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы, как целого, не отражается на её механических свойствах.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса.

Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как ***принципы запрета****:*

Любое явление, при котором не выполняются хотя бы один из законов сохранения, запрещено, *и в природе такие явления никогда не наблюдаются.*

Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается.

При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распадаться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных, и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления и в макромире.

Лекция окончена!

Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета появляется сила инерции, называемая силой Кориолиса или кориолисовой силой инерции.

Возврат

Принцип суперпозиции гравитационных полей

Гравитационные поля подчиняются принципу суперпозиции. Согласно этому принципу гравитационное поле, возбуждаемое какой-либо массой, совершенно не зависит от наличия других масс. Кроме того, гравитационные поля, создаваемые несколькими телами, накладываются, не изменяя друг друга.

Поэтому напряженность поля, создаваемого несколькими точечными источниками, равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из источников:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}1 + \mathbf{G}2 + \ldots$$

Возврат

Зависимость момента количества движения

Изменение момента количества движения тела пропорционально приложенному движущему моменту силы и осуществляется по направлению вращательного действия этого момента силы.

Соответствующая зависимость имеет следующий вид:

$$\frac{d(I(t)\cdot\overline{\omega}(t))}{dt}\,\overline{\mathrm{M}}(t)$$

где *I(t)* - момент инерции тела вокруг оси вращения; $\overline{\omega}(t)$ - вектор угловой скорости; $\overline{\mathrm{M}}(t)$ - вектор момента количества движения (момента импульса) тела; t - время.

Возврат

Лекция 10**. Движение в неинерциальных системах отсчета.

1. Силы инерции.
2. Центробежная сила инерции.
3. Сила Кориолиса.
4. Законы сохранения в неинерциальных системах отсчета.

САМОСТОЯТЕЛЬНО!

И.В. Савельев. Курс общей физики. Т.1.- М.: Наука, 1982, с.118-130.

4.5. Силы инерции

4.5.1. Уравнение Ньютона для неинерциальных систем отсчета

Законы инерции выполняются в инерциальной системе отсчета. А как описать движение тела в неинерциальной системе?

Рассмотрим пример: вы стоите в троллейбусе спокойно. Вдруг троллейбус резко трогается, и вы невольно отклонитесь назад. Что произошло? Кто вас толкнул?

С точки зрения наблюдателя на Земле (в инерциальной системе отсчета), в тот момент, когда троллейбус тронулся, вы остались стоять на месте – в соответствии с первым законом Ньютона.

С точки зрения сидящего в троллейбусе – вы начали двигаться назад, как если бы кто-нибудь вас толкнул. На самом деле, никто не толкнул, просто ваши ноги, связанные силами трения с троллейбусом «поехали» вперед из-под вас и вам пришлось падать назад.

Можно описать ваше движение в инерционной системе отсчета. Но это не всегда просто, так как обязательно нужно вводить силы, действующие со стороны *связей*.

Они могут быть самыми разными и ведут себя по разному – нет единого подхода к их описанию. *Можно и в неинерциальной системе воспользоваться законами Ньютона, если ввести силы инерции*. Они *фиктивны*. Нет тела или поля под действием которого вы начали двигаться в троллейбусе. Силы инерции вводят специально, чтобы воспользоваться уравнениями Ньютона в неинерциальной системе.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. На силы инерции законы Ньютона не распространяются.

Найдем количественное выражение для силы инерции при *поступательном движении* неинерциальной системы отсчета.

Введем обозначения:

$\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы;

$\vec{a}^{*}$ – ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной (относительно Земли).

Тогда ускорение тела относительно инерциальной системы:

$$\vec{a} = \vec{a}^{*} + \vec{a}'. \qquad (4.5.1)$$

Ускорение в инерциальной системе можно выразить через второй закон Ньютона

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}^{*} + \vec{a}',$$

где *m* – масса движущегося тела, или

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}^{*}.$$

Мы можем и $\vec{a}^{*}$ представить в соответствии с законом Ньютона (формально)

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_{\text{ин}}}{m},$$

где $\vec{F}_{\text{ин}}$ – сила, направленная в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы.

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}^{*}$$

тогда получим

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}}$$

– ***уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета.***

Здесь $\vec{F}_{\text{ин}}$ – фиктивная сила, обусловленная свойствами системы отсчета, необходимая нам для того, чтобы иметь возможность описывать движения тел в неинерциальных системах отсчета с помощью уравнений Ньютона.

Силы инерции неинвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую. Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движения тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле. Силы инерции всегда являются внешним по отношению к любому движению системы материальных тел.

4.5.2. Центростремительная и центробежная силы

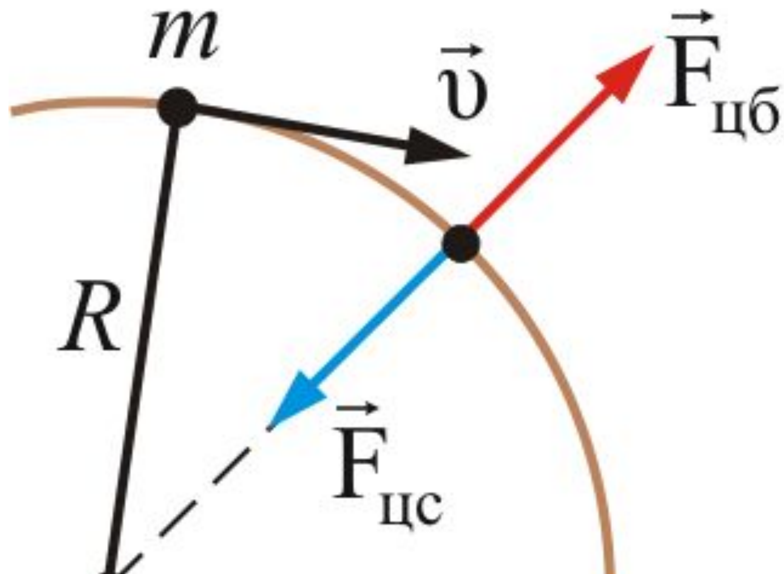
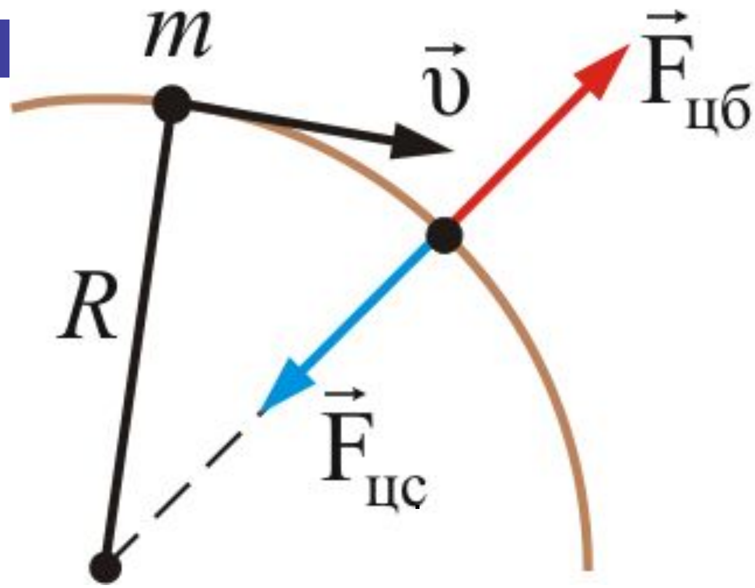


Рисунок 4.8

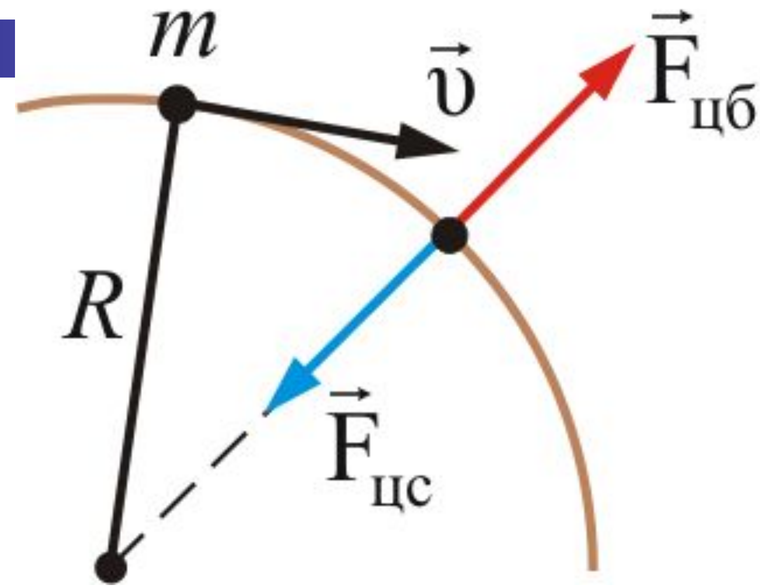
В каждый момент времени камень должен был бы двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Однако он связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила, действующая на камень, направленная вдоль веревки к центру вращения. Это и есть ***центростремительная сила*** (при вращении Земли вокруг оси в качестве центростремительной силы выступает сила гравитации).



$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_{цс}, \qquad \vec{a}_{цс} = \vec{a}_n,$$

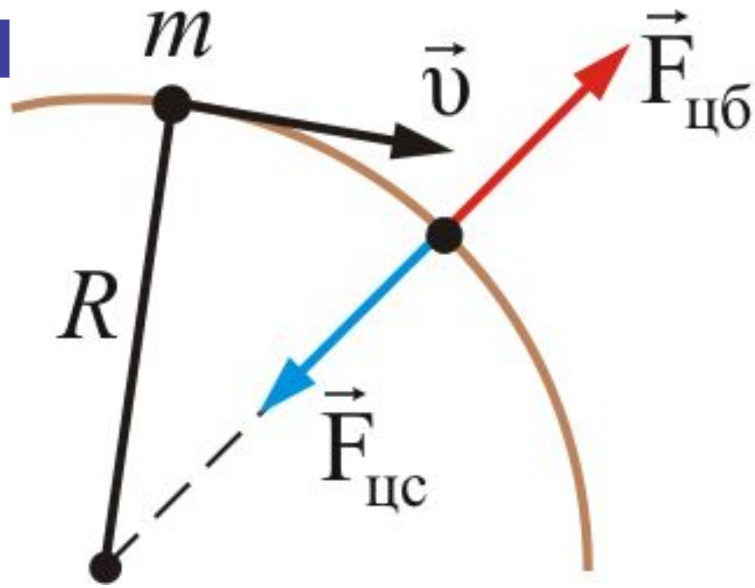
$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_n, \qquad (4.5.2)$$

$$F_{цс} = m\frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (4.5.3)$$



Центростремительная сила возникла в результате действия камня на веревку, т.е. это *сила, приложенная к телу – сила инерции второго рода. Сила, приложенная к связи и направленная по радиусу от центра, называется* ***центробежной.***

Т.о. центростремительная сила приложена к вращающему телу, а центробежная сила – к связи. Центробежная сила – сила инерции первого рода.



$$\vec{F}_{цб} = -m\vec{a}_n,$$

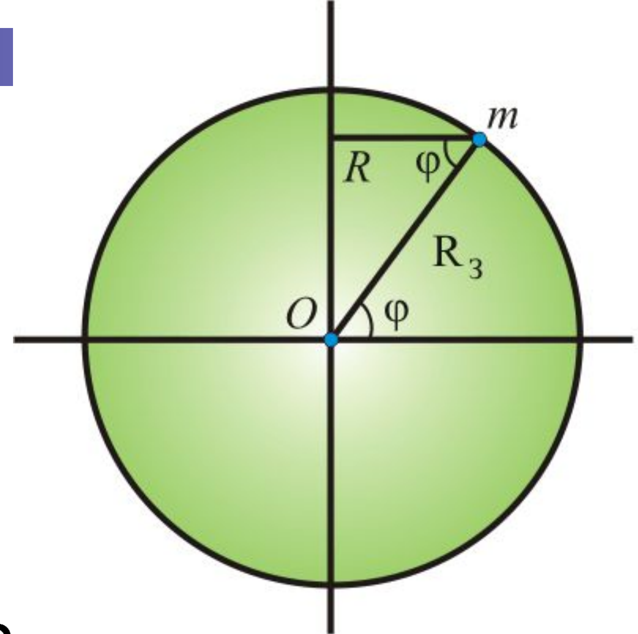
$$F_{цб} = -m\frac{\upsilon^2}{R},$$

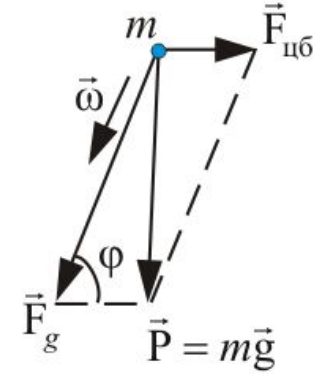
т.к. $$a_n = \omega^2 R$$

(здесь ω – угловая скорость вращения камня, а υ – линейная), то

$$F_{цб} = m\omega^2 R. \qquad (4.5.4)$$

Рисунок 4.9





$$R = R_з \cos\varphi$$

(φ – широта местности)

$$F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_з \cos\varphi,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли. Сила тяжести есть результат сложения $\vec{F}_g$ и $\vec{F}_{цб}$

g (а значит и *mg*) *зависят от широты местности*

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб}$$

g = 9,80665 м/с^2 – ускорение свободного падения тела. Направлено *g* к центру только на полюсе и на

Сила тяжести и вес тела

Вес P тела массой m $\boxed{\vec{P} = -\vec{N}}$

Тогда, учитывая, что $\vec{F}_{ци} = -m\vec{a}_{ц} = m\vec{\rho}\omega^2$

где ρ – радиус окружности, по которой движется частица вместе с Землей, получим

$$\vec{P} = m\vec{g} + m\vec{\rho}\omega^2$$

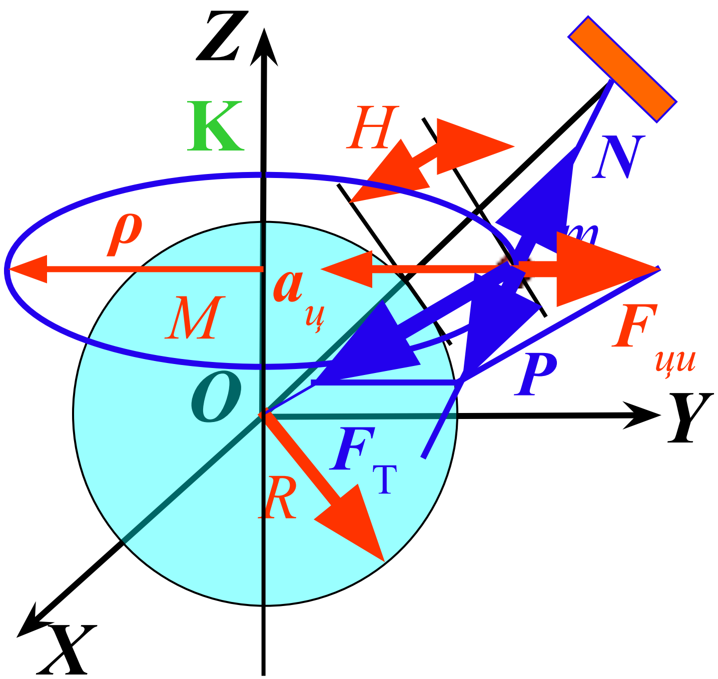
***Введем* обозначение**

$$\boxed{\vec{g}_R = \vec{g} + \vec{\rho}\omega^2}$$

Таким образом* вес тела *массой m

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}_R}$$

где g_R **– ускорение свободного падения *на* широте, *на которой расположена частица***



4.5.3. Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центростремительной и центробежной сил, появляется еще одна сила, называемая ***силой Кориолиса*** или *кориолисовой силой инерции* (Г. Кориолис (1792 – 1843) – французский физик).

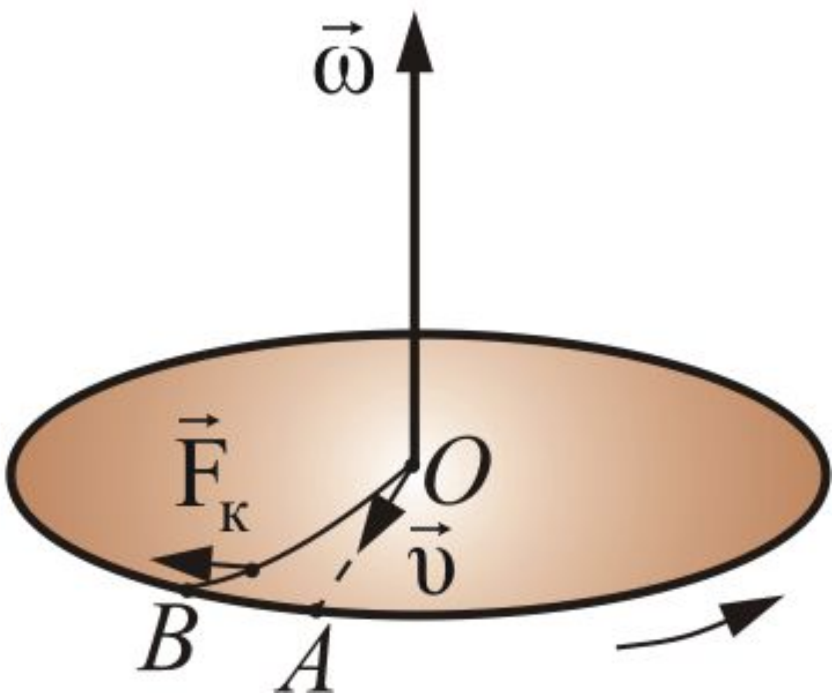
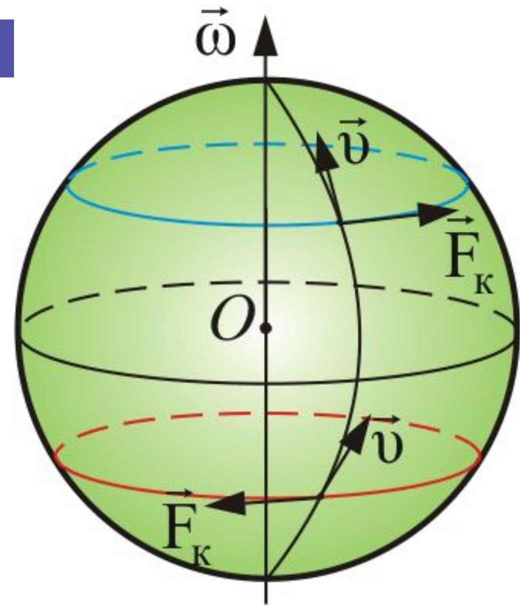


Рисунок 4.10



Сила Кориолиса, действует на тело, *движущееся вдоль меридиана* в северном полушарии вправо и в южном – влево.

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в севером полушарии и левый – в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника (маятник Фуко). Для простоты предположим, что маятник расположен на полюсе:

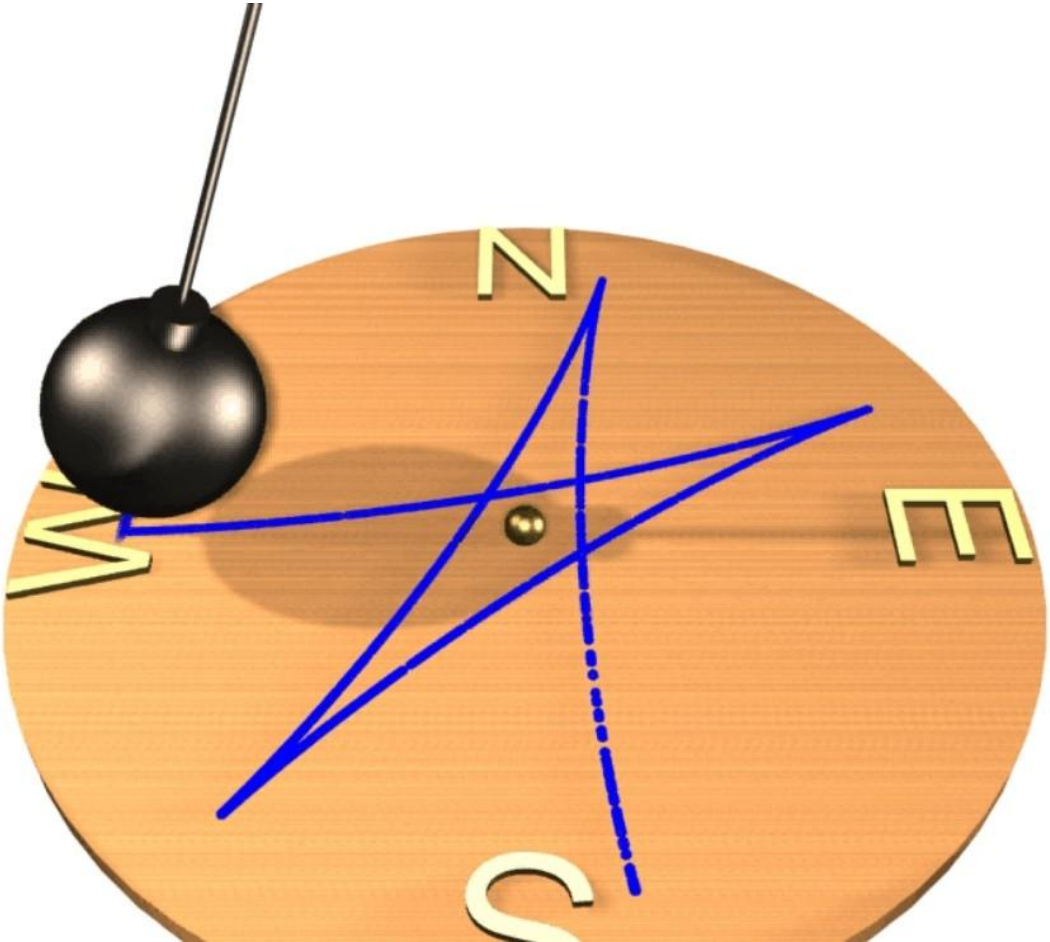


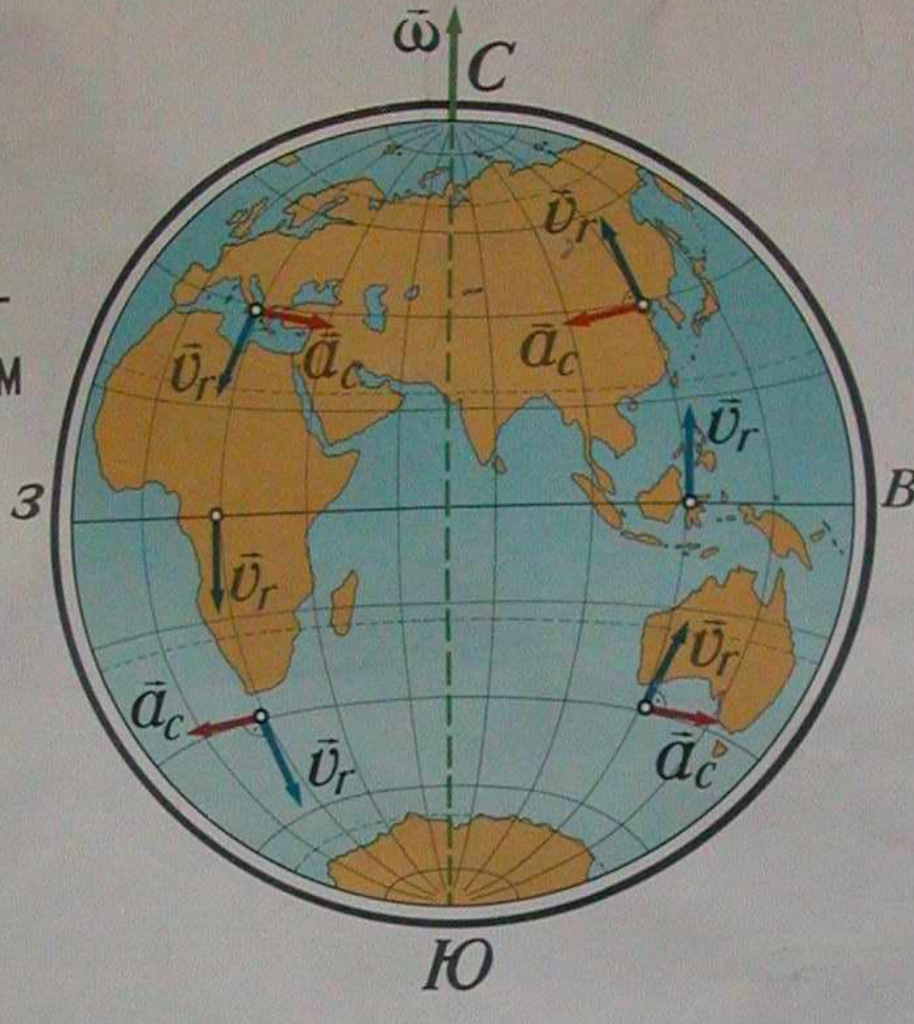
Рисунок 4.12

НАПРАВЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ КОРИОЛИСА

УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА ВЫРАЖАЕТСЯ УДВОЕННЫМ ВЕКТОРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ВЕКТОРА $\bar{\omega}$ НА ВЕКТОР $\bar{v}_r$:

$$\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$$

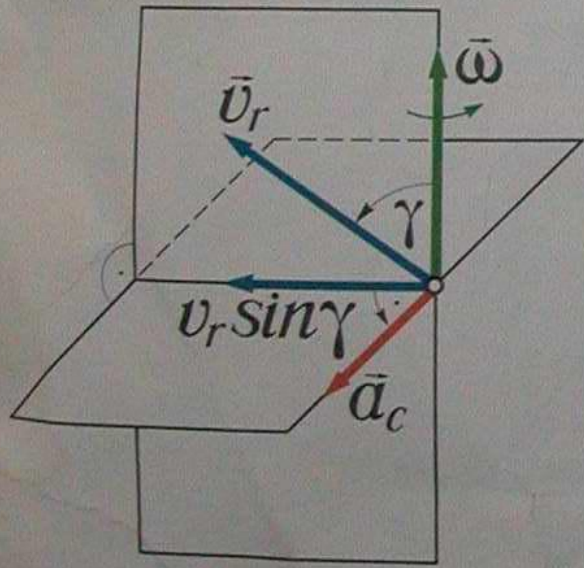
СЛЕДОВАТЕЛЬНО:



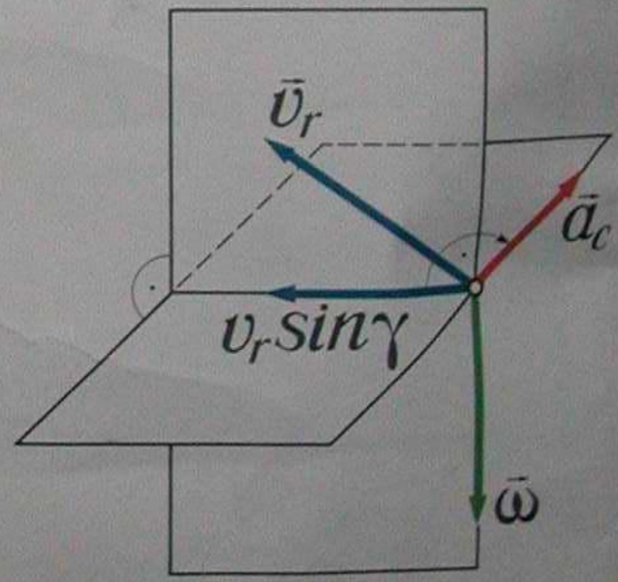
$\bar{a}_c$ НАПРАВЛЕНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ЭТИМ ВЕКТОРАМ В ТАКУЮ СТОРОНУ, ОТКУДА УГОЛ γ, СОСТАВЛЯЕМЫЙ $\bar{\omega}$ С $\bar{v}_r$, ПОЛОЖИТЕЛЕН И МЕНЬШЕ π

$$0 < \gamma < 180^\circ$$

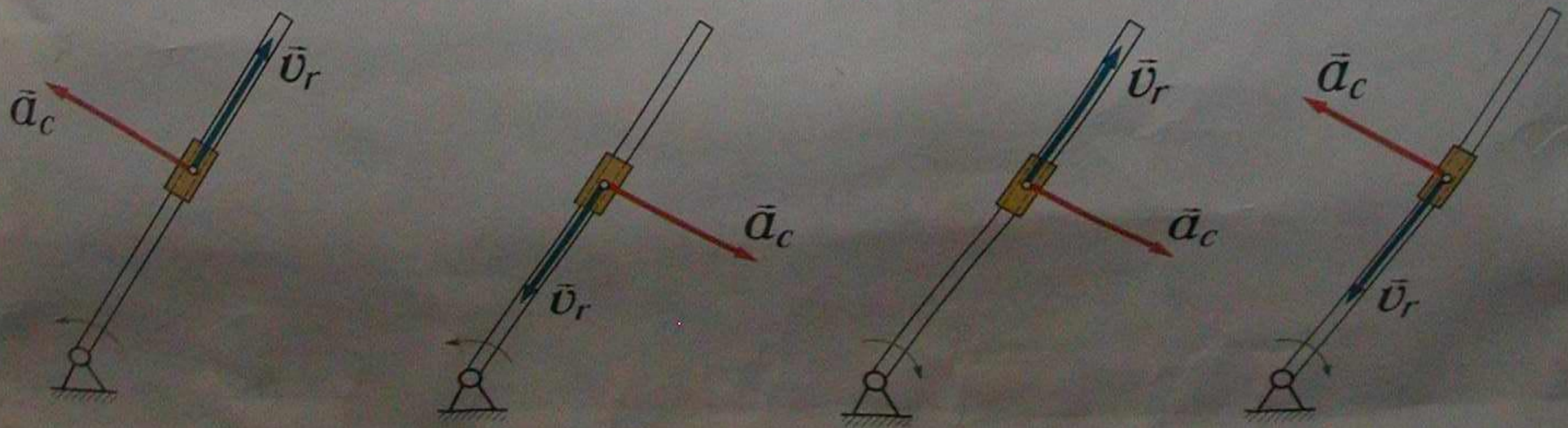
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ УСКОРЕНИЯ КОРИОЛИСА НАДО:



1. СПРОЕКТИРОВАТЬ $\vec{v}_r$ НА ПЛОСКОСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНУЮ $\vec{\omega}$;
2. ПОВЕРНУТЬ ПРОЕКЦИЮ В ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ В СТОРОНУ ПЕРЕНОСНОГО ВРАЩЕНИЯ НА 90°



ЕСЛИ $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}$, ТО ПОВЕРНУТЬ $\vec{v}_r$ НА 90° В СТОРОНУ ПЕРЕНОСНОГО ВРАЩЕНИЯ



С учетом всех сил инерции, уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета примет вид:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{к}}, \quad (4.5.7)$$

$\vec{F}_{\text{ин}}$ – сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета;

$\vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{к}}$ – две силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета;

$\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы от

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a},$$

$$\vec{F}_{\text{к}} = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}],$$

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\vec{a}_n.$$

Второй закон Кеплера есть следствие закона сохранения импульса.

II закон Кеплера: в равный промежуток времени радиус–вектор планеты описывает равные площади. Покажите мне доказательство этого, исходя из закона сохранения момента импульса.

Содержание