Кафедра медицинской и биологической физики

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисление.

лекция № 5 для студентов 1 курса, обучающихся по специальности 030401– Клиническая психология

к.п.н., доцент Шилина Н.Г.

Красноярск, 2015

План лекции

- Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
- Частные производные. Полный дифференциал.
- Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл.
- Методы интегрирования (по формулам, заменой переменной, по частям).
- Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Применение определенного интеграла для вычисления площадей криволинейных фигур.

Значение темы

- Понятие производной и интеграла широко используется в математике, статистике и прикладных науках. С их помощью определяют скорости изменения функций, функции распределения, вычисляют площади, ограниченные кривыми.

Понятие производной

Производной функции f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Правила дифференцирования производная сложной функции

$$(U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U'$$

$$C' = 0$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - V'U}{V^2}$$

$$y = f\left[z(x)\right]$$

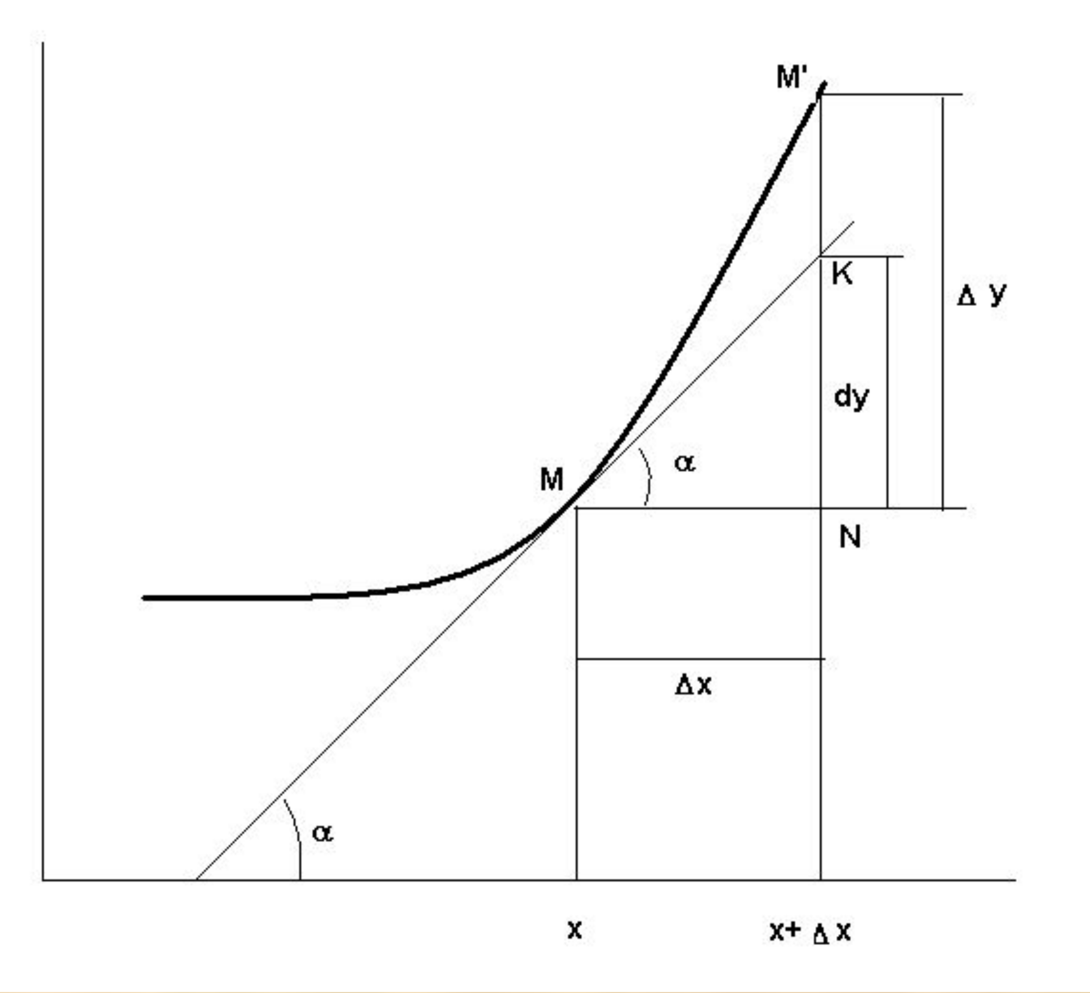
$$y' = f'_z \cdot z'_x$$

Таблица производных от основных функций

Функция	Производная
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Геометрический смысл дифференциала

$$NK = MN \cdot tg\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy$$



Δy – приращение ординаты кривой;

dy – приращение ординаты касательной;

Дифференциал

Дифференциал ***dy*** - главная часть приращения функции ***Δy***

Дифференциалом ***dx*** называют приращение **Δx**, то есть ***dx=Δx***

$$dy = y'_x \cdot dx$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx}$$

Правила дифференцирования

$$d(cu) = c \cdot du$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Частные производные

$$z = f(x, y)$$

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Использование дифференциала в приближенных вычислениях

- Для нахождения приближенного значения приращения функции

$$\Delta y \approx dy = y'dx$$

- Для нахождения приближенного значения функции в заданной точке

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'_x \cdot dx$$

- Для вычисления погрешностей

$$\Delta N_{абс} \approx dN; \Delta N_{отн} \approx \frac{dN_{абс}}{N}$$

Основные характеристики и свойства функции ***Y=f(X)***

- Область значений ***y*** и ***x***

-Постоянство или монотонность функции на отрезке - Нули функций

- Разрывы и полюса функции

- Экстремумы, минимумы и максимумы функции

- Перегибы функции

- Асимптоты функции

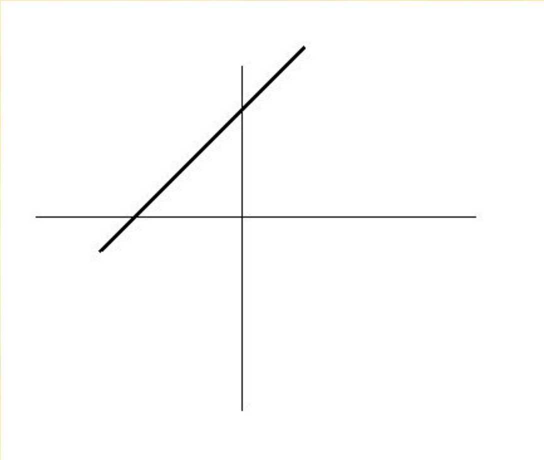
- Вогнутость и выпуклость функции

Постоянство и монотонность функции

Для того чтобы функция ***f(x)*** была постоянной на отрезке ***[a,b],*** нужно, чтобы производная этой функции была равна нулю на этом отрезке.

Для того, чтобы функция ***f(x)*** была монотонной на отрезке ***[a,b],*** нужно чтобы производная не меняла своего знака на этом отрезке и не обращалась тождественно в нуль ни в какой точке или промежутке, составляющем часть отрезка.

Нули функции: решения уравнения ***Y(X) =0***

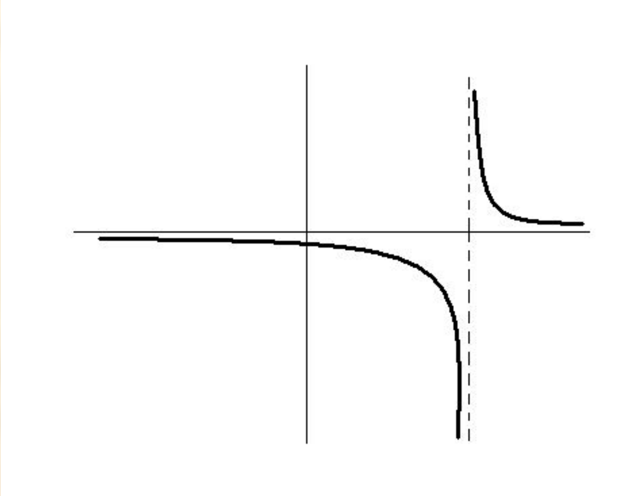


$$Y = aX + b$$

$$aX + b = 0$$

$$X_0 = -\frac{b}{a}$$

Полюса функции: значения X, при котором Y стремится к бесконечности



$$Y = \frac{k}{X - a}$$

$$\textit{когда} \;\; \mathrm{X} \to \mathrm{a},\ \textit{и}\ \mathrm{X} < \mathrm{a}, \mathrm{Y} \to -\infty;$$

$$\textit{когда} \;\; \mathrm{X} \to \mathrm{a},\ \mathrm{и}\ \mathrm{X} > \mathrm{a},\ \mathrm{Y} \to +\infty$$

Минимумы и максимумы функции

Функция f(x) имеет в точке x_0 минимум (максимум), если в некоторой окрестности этой точки ее значения больше (меньше) значения $f(x_0)$

Экстремум = минимум или максимум

Необходимое, но недостаточное условие существования экстремума: экстремум функции достигается в точках, где значение производной равно нулю.

Контр-пример: $$y = x^3;\ y' = 2x^2;\ y'(x = 0) = 0$$

Достаточное условие:

Если первая производная в точке x_0 равна нулю, а вторая производная - больше нуля, то функция имеет минимум;

Если первая производная в точке x_0 равна нулю, а вторая производная меньше нуля, то функция имеет максимум

Правило нахождения экстремума

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = 0; \frac{d^2y(x_0)}{dx^2} > 0 - \textit{в точке } \mathrm{x}_0 \textit{ минимум};$$

$$\frac{\mathrm{dy}(\mathrm{x}_0)}{dx} = 0; \frac{d^2y(x_0)}{dx^2} < 0 - \textit{в точке } \mathrm{x}_0 \textit{ максимум}$$

Перегибы, выпуклость и вогнутость функции

Если вторая производная в точке М больше нуля, то кривая в той точке вогнутостью направлена вверх.

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0$$

Если вторая производная в точке М меньше нуля, то кривая в той точке вогнутостью направлена вниз.

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0$$

Если вторая производная в точке М равна нулю, то М – точка перегиба

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0$$

Первообразная функции

Прямая задача: известно уравнение движения s=s(t); найти скорость v=ds/dt и ускорение dv/dt

Обратная задача: задана функция ускорения a=a(t), требуется определить скорость v и пройденный путь s

Интегрирование: зная функцию a(t), восстановить функцию v=v(t), для которой a(t) является производной.

Функция F(x) называется **первообразной** функцией для функции f(x) или **интегралом** от f(x), если f(x) является производной для функции F(x), или, что то же самое, f(x)dx служит для F(x) дифференциалом.

$F'(x) = f(x)$ ***или*** $dF(x) = f(x)dx$ $\qquad F(x) = \int f(x)\,dx$

Свойства операции интегрирования

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int dx = x$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Закон инерции Ньютона: как, зная уравнение для второго закона Ньютона, найти уравнение для скорости тела?

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$$v = \int adt = a\int dt = at + C$$

Таблица интегралов основных функций

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

Пример:

$$\int (6x^2 - 3x + 5)dx =$$

$$= \int 6x^2\, dx - \int 3x\, dx + \int 5dx =$$

$$= 6\int x^2 dx - 3\int x dx + 5\int dx = 6\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + C$$

Интегрирование путем замены переменной

$$\int \sin^3 x \cos x dx$$

$$d \sin x = \cos x \, dx$$

$$t = \sin x$$

$$\sin^3 x \cos x \, dx = \sin^3 x \, d \sin x = t^3 \, dt$$

$$\int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Интегрирование по частям

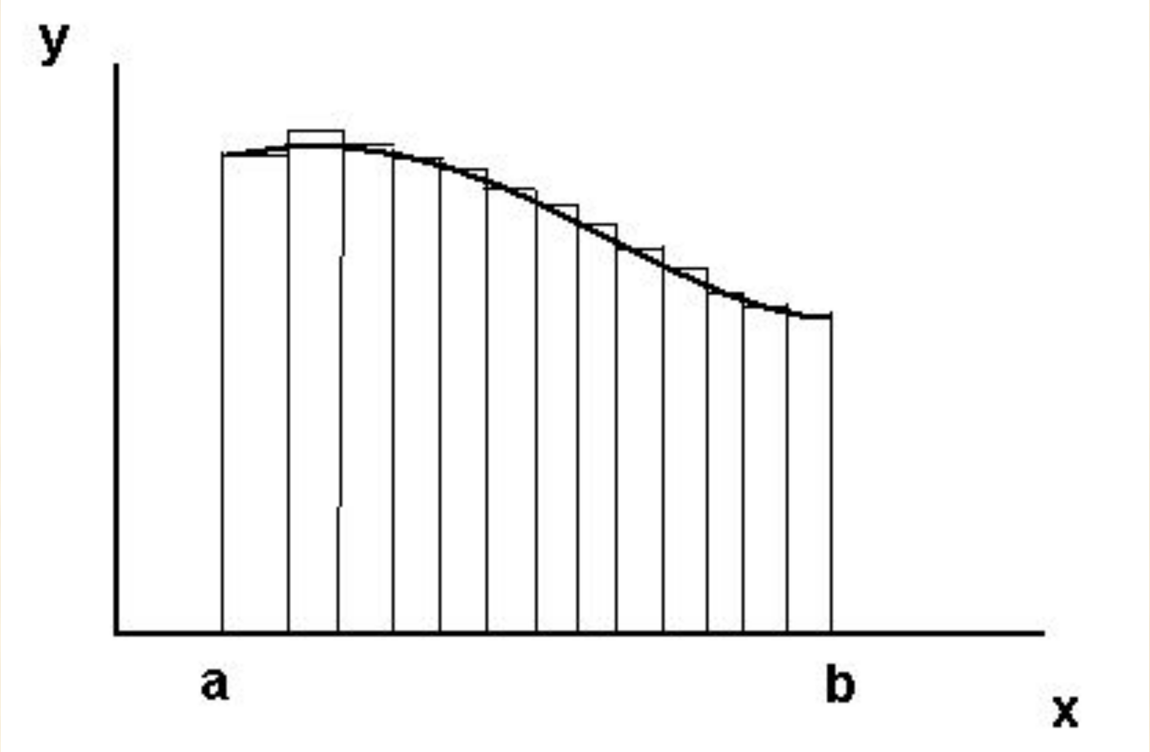
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\cos x\,dx = ?$$

$$u = x;\ dv = \cos x\,dx;\ du = dx;\ v = \sin x$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Определенный интеграл



$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i$$

$$P = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum y_i \Delta x_i \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$$

a и **b** – верхний и нижний пределы интеграла

определенный интеграл

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Основная формула интегрального исчисления

$$\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,dx = ?$$

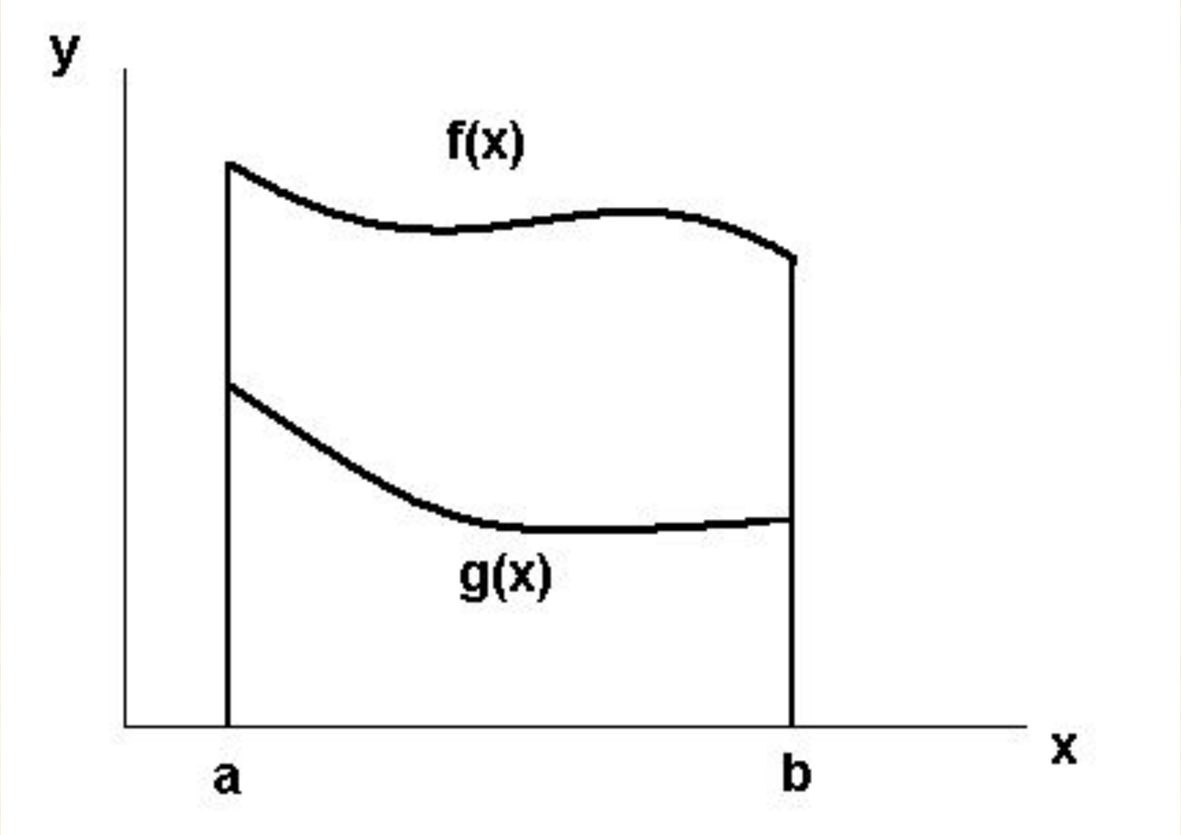
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

F(x) – первообразная ***f(x)***

$$\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b x^\mu\,dx = \left.\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}$$

Площадь фигуры



$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

- **Обязательная:**
- Кричевец, А.Н. Математика для психологов /А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков. – М.: Флинта: НОУ ВПО «МПСИ», 2010.– 376 с.
- Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных/А.Д. Наследов.- СПб.: Речь, 2008.
- **Дополнительная:**
- Математика в примерах и задачах: учебное пособие /Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В.Никонова и др. – М.: ИНФРА–М, 2011. –373 с.
- Болдин К.В., Башлыков В.Н., Рукосуев А.В. Высшая математика /К.В. Болдин К, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта, 2010
- **Электронные ресурсы:**
- УБИЦ КрасГМУ Портал центра дистанционного образования Электронная библиотека
- Ресурсы интернет

Благодарю за внимание!