



*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный
Университет (Сибстрин)*

***ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
КИНЕМАТИКА***

**ЛЕКЦИЯ
СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ
ТВЕРДОГО ТЕЛА**



Кафедра теоретической механики

План лекции

Задача механики сводится только к тому, чтобы раскрыть происходящие явления, а не к тому, чтобы доискиваться их причин.

Густав Кирхгоф

Введение

- **Сферическое движение твердого тела**
- **Угловые скорость и ускорение при сферическом движении**
- **Скорость и ускорение точек при сферическом движении**
- **Произвольные движения твердого тела**
- **Сложное движение твердого тела**
- **Заключение**

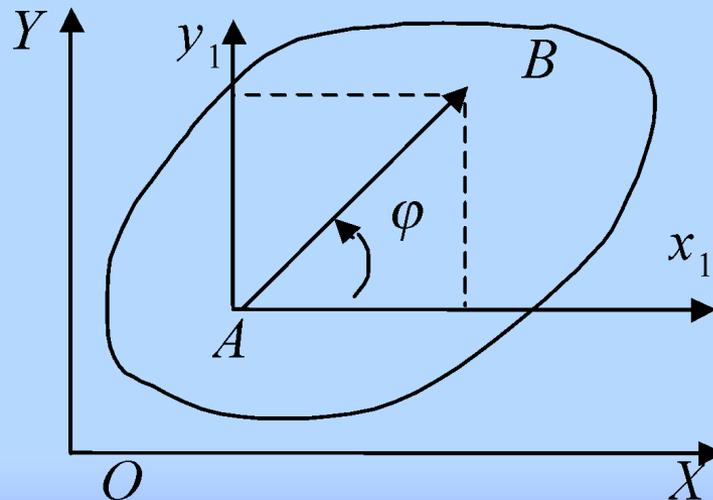
На предыдущих лекциях

Мы уже изучили:

- Кинематику точки
- Простейшие движения твердого тела:
 поступательное и вращательное
- Плоское движение твердого тела.

При этом мы представили его как сумму простейших движений. Сделали мы это с помощью введения вспомогательной системы координат

Ax_1y_1 :



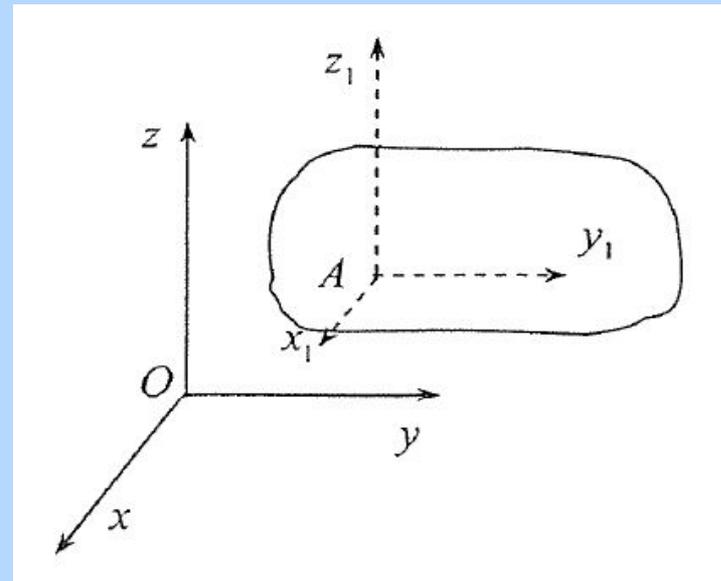
Введение

Пусть теперь тело совершает **произвольное пространственное движение**.

Для его изучения также возьмем одну точку **A** за полюс и введем вспомогательную систему координат

$$Ax_1y_1z_1 : Ax_1 \parallel Ox, Ay_1 \parallel Oy, Az_1 \parallel Oz,$$

В системе $Ax_1y_1z_1$ точка **A-неподвижна**, т.е тело будет совершать движение с одной неподвижной точкой. Такое движение называется **сферическим**.



Произвольное движение представляется в виде **суммы** двух движений: **Поступательного** вместе с полюсом **A** и **сферического** вокруг полюса **A**.

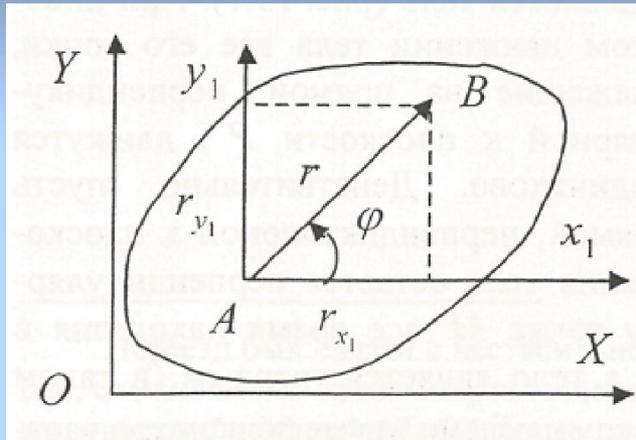
Цель лекции

Сначала изучить сферическое движение твердого тела, а потом уже и произвольное пространственное движение.

Практические примеры



Задание движения твердого тела

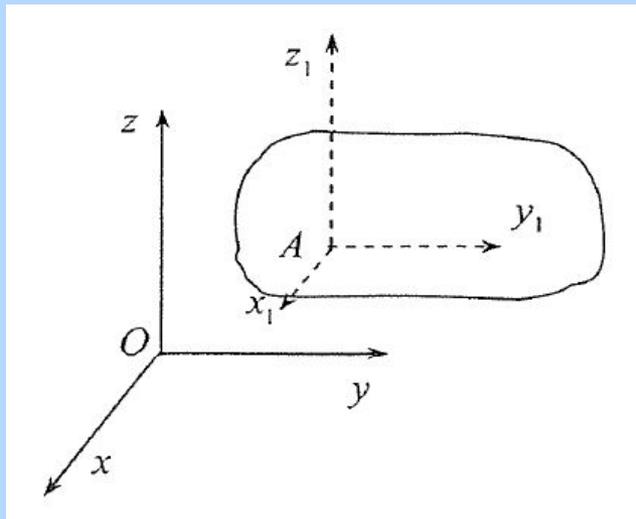


Плоское движение

$$x_A = x_A(t)$$

$$y_A = y_A(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$



Поступательное движение

$$x_A = x_A(t)$$

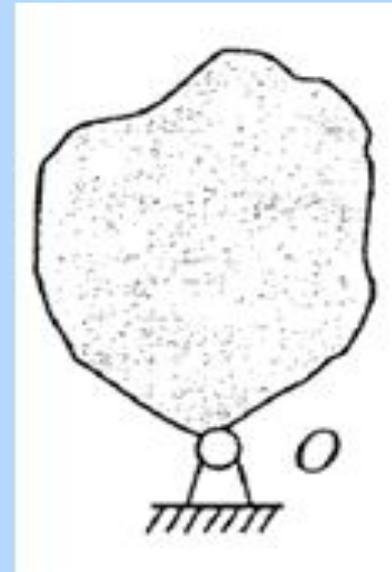
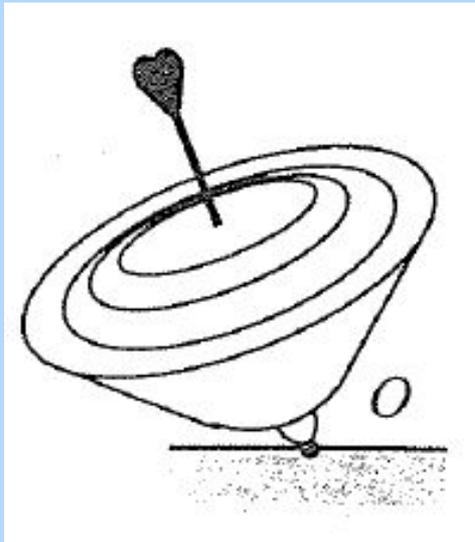
$$y_A = y_A(t)$$

$$z_A = z_A(t)$$

Поступательное движение полностью определится движением полюса

Сферическое движение твердого тела

Движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, называют *сферическим движением* или вращением вокруг неподвижной точки.



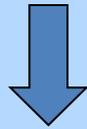
При сферическом движении любая точка тела будет находиться на сфере с центром O .

Задача сферического движения твердого тела

$Oxyz$ - неподвижная система координат

$O\xi\eta\zeta$ - подвижная система координат

три степени свободы

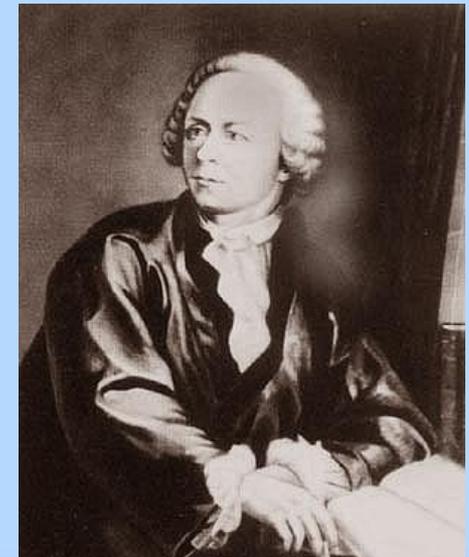
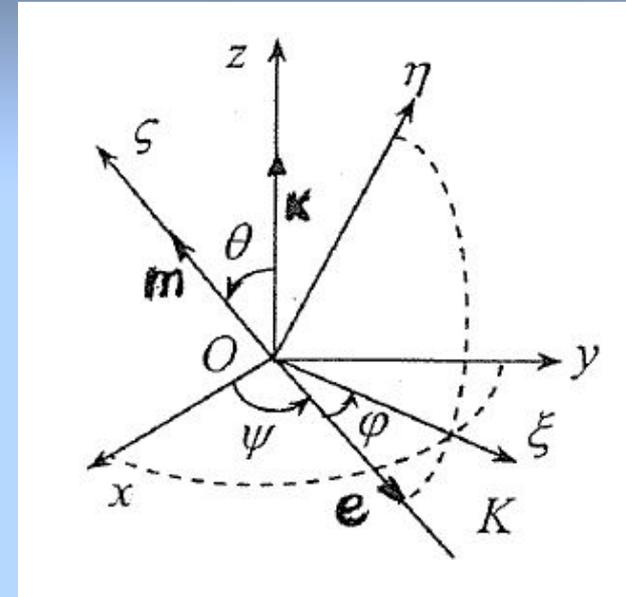


три угла Эйлера

Ψ - угол прецессии

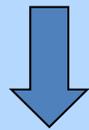
Θ - угол нутации

φ - угол собственного вращения



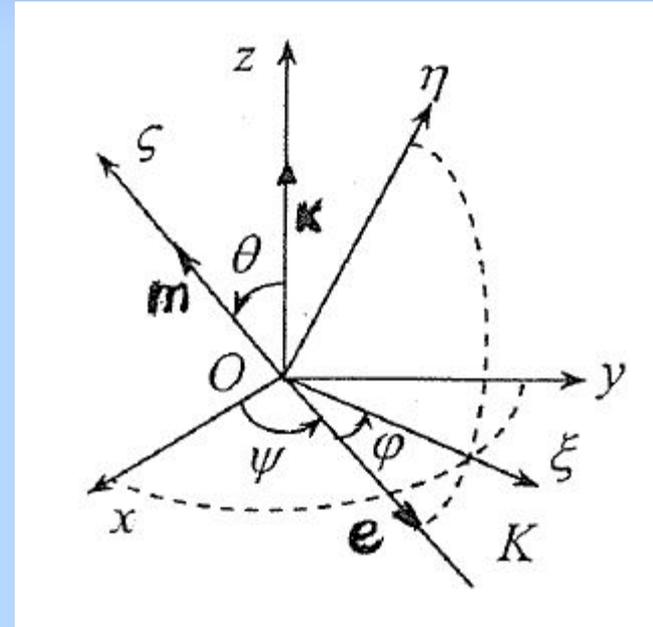
Построение подвижной системы координат

1. Изобразить линию узлов OK
(линию пересечения плоскостей Oxy и $O\xi\eta$,
т.е. повернуть Ox на угол ψ
вокруг оси Oz
2. Повернуть Oz на угол θ вокруг
оси OK
3. Повернуть OK на угол φ вокруг
оси $O\xi$



Закон сферического движения

$$\psi = \psi(t) \quad \theta = \theta(t) \quad \varphi = \varphi(t)$$



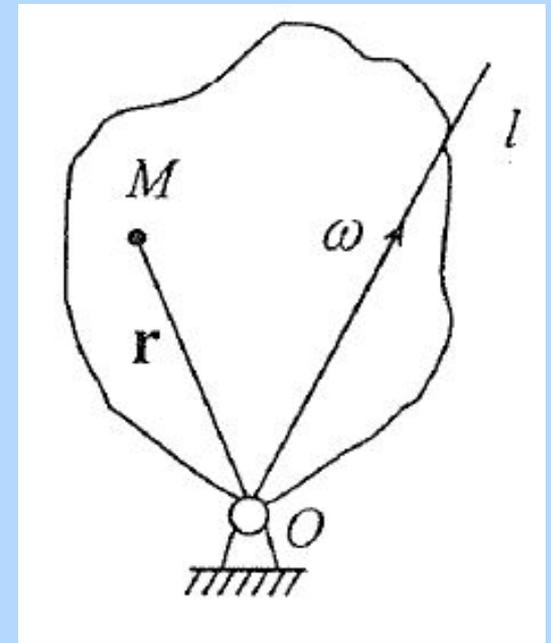
Мгновенная ось вращения

Вспомним: МЦС для плоского движения.

Для сферического движения – роль МЦС играет **мгновенная ось вращения** – она проходит через точку **O** и скорости ее точек равны нулю.

Утверждение (без доказательства).

В каждый момент времени сферическое движение можно представить как вращение вокруг мгновенной оси вращения.

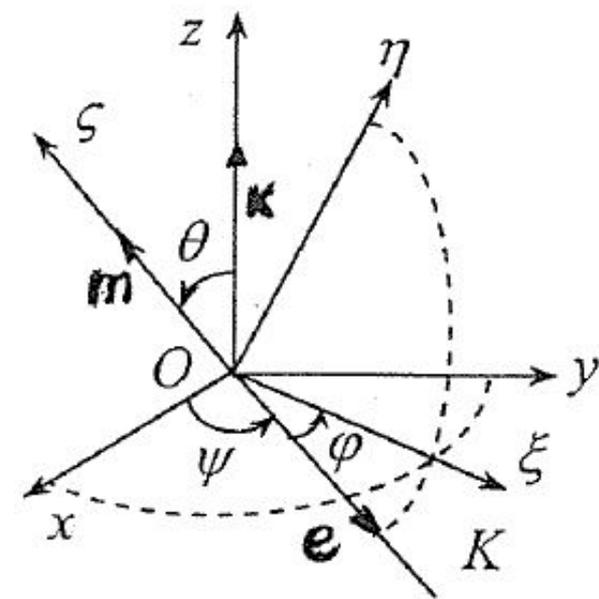


Задание угловой скорости тела

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{e} + \dot{\phi} \mathbf{m}$$

- угловая скорость, направлена
вдоль мгновенной оси вращения

$\mathbf{m}, \mathbf{e}, \mathbf{k}$ - единичные векторы осей
 $O\xi, OK, Oz$



$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi} \mathbf{k}$ - угловая скорость прецессии

$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta} \mathbf{e}$ - угловая скорости нутации

$\boldsymbol{\omega}_3 = \dot{\phi} \mathbf{m}$ - угловая скорости
собственного вращения

Проекции угловой скорости на подвижные оси

$$\omega_{\xi} = \omega_{1\xi} + \omega_{2\xi} + \omega_{3\xi},$$

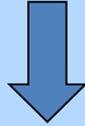
$$\omega_{\eta} = \omega_{1\eta} + \omega_{2\eta} + \omega_{3\eta},$$

$$\omega_{\zeta} = \omega_{1\zeta} + \omega_{2\zeta} + \omega_{3\zeta}.$$

$$\omega_{1\xi} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \omega_{2\xi} = \dot{\theta} \cos \theta, \omega_{3\xi} = 0$$

$$\omega_{1\eta} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \omega_{2\eta} = -\dot{\theta} \sin \varphi, \omega_{3\eta} = 0$$

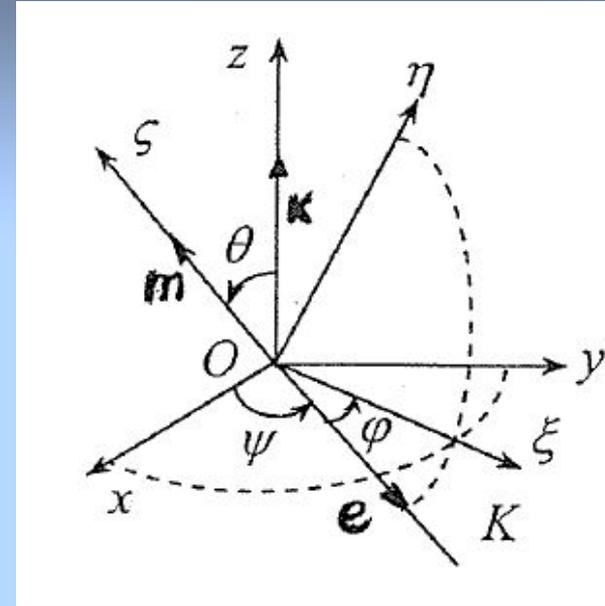
$$\omega_{1\zeta} = \dot{\psi} \cos \theta, \omega_{2\zeta} = 0, \omega_{3\zeta} = \dot{\varphi}$$



$$\omega_{\xi} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \theta,$$

$$\omega_{\eta} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_{\zeta} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$$



**кинематические
уравнения Эйлера.**

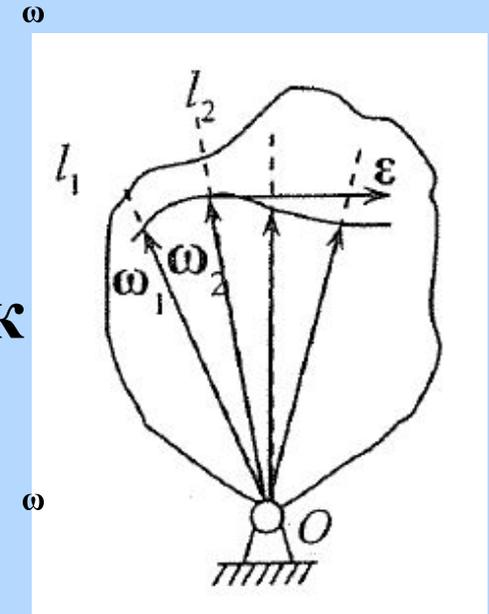
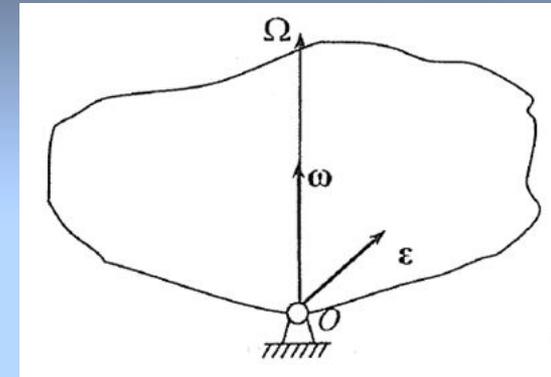
Нахождение углового ускорения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{l}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{l} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l})$$

$\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{l}$ - изменение угловой скорости по величине

$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l})$ - изменение угловой скорости по направлению

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - направлен по касательной к годографу $\boldsymbol{\omega}$



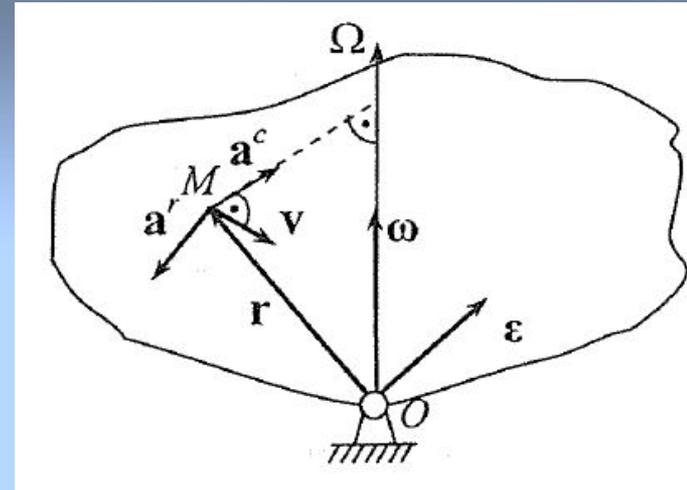
Направления $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ в общем случае не совпадают!

Нахождение скорости и ускорения точек

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} =$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$



$\mathbf{a}^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ - **вращательное** ускорение

$\mathbf{a}^c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ - **осестремительное** ускорение (направлено к мгновенной оси вращения)

$$a = \sqrt{(a^c)^2 + (a^r)^2 + 2a^c a^r \cos(\mathbf{a}^c \mathbf{a}^r)}$$

Итог: Обе задачи кинематики для сферического движения твердого тела нами решены.

Пример

Дано: V_C , высота и радиус
основания конуса

Найти: ω ε \mathbf{v}_A \mathbf{v}_B \mathbf{a}_A \mathbf{a}_B

Решение

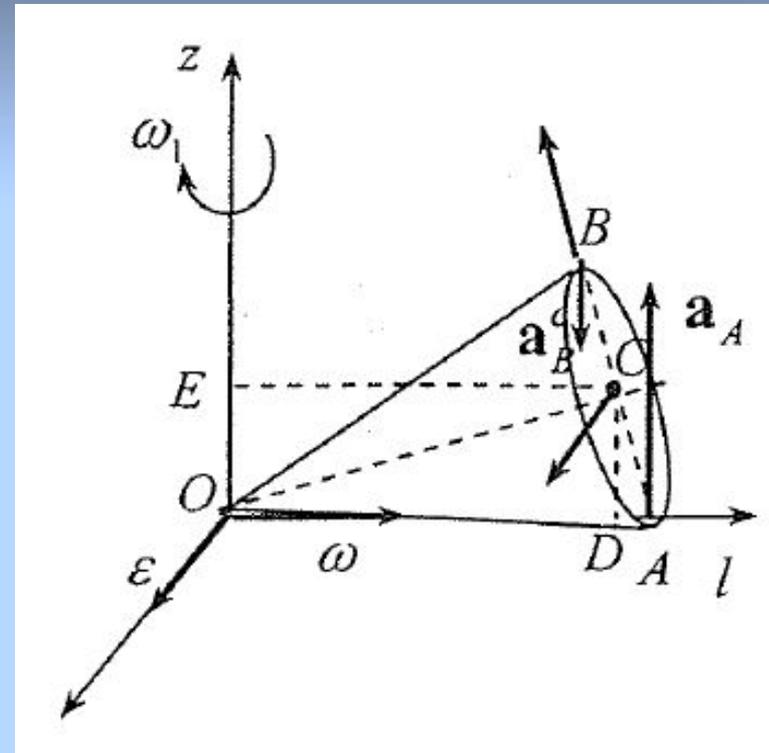
$$\omega = v_c / CD, \quad \mathbf{v}_A = 0, \quad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OB}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^c + \mathbf{a}_A^r, \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B^c + \mathbf{a}_B^r$$

$$\mathbf{a}_A^c = 0, \quad \mathbf{a}_B^c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B$$

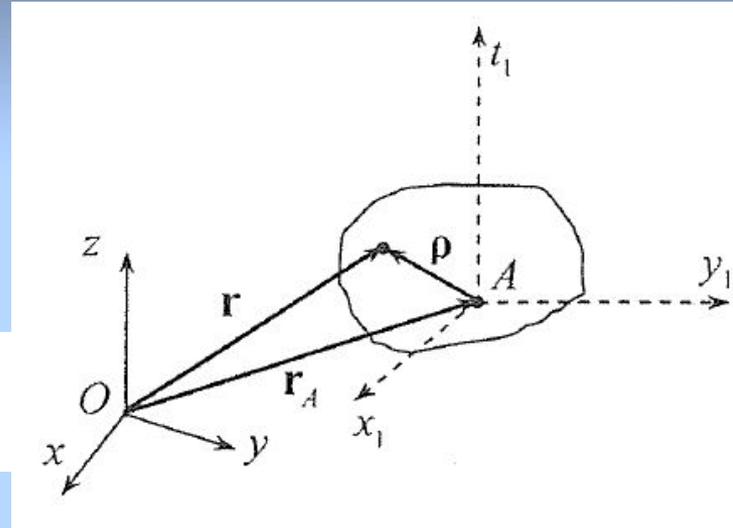
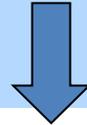
$$\mathbf{a}_A^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{OA}, \quad \mathbf{a}_B^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{OB}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega \mathbf{l}) = \omega \frac{d\mathbf{l}}{dt}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \omega \boldsymbol{\omega}_1; \quad \omega_1 = v_c / CE$$



Произвольное движение твердого тела

Шесть степеней свободы



$$\varphi = \varphi(t)$$

Произвольное движение представляется в виде **суммы** двух движений: **Поступательного** вместе с полюсом **A** и **сферического** вокруг полюса **A**.

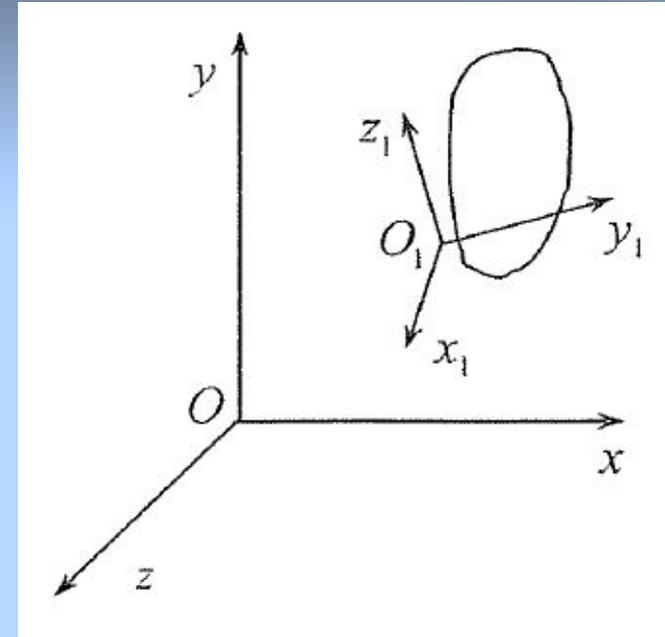
Скорости и ускорения точки при произвольном движении

Скорость любой точки произвольно двигающегося тела равна сумме скорости полюса и скорости сферического движения тела вокруг полюса.

Ускорение любой точки при произвольном движении твердого тела равно сумме ускорения полюса и вращательного и осестремительного ускорений точки при ее сферическом движении вокруг полюса.

Сложное движение твердого тела

Если тело движется относительно подвижных осей, а эти оси совершают движение по отношению к неподвижным осям, то результирующее движение тела называется ***сложным***.



Движение тела относительно неподвижной системы называют ***абсолютным***, его движение относительно подвижной системы— ***относительным***, а движение вместе с подвижной системой отсчета — ***переносным***.

При поступательном движении



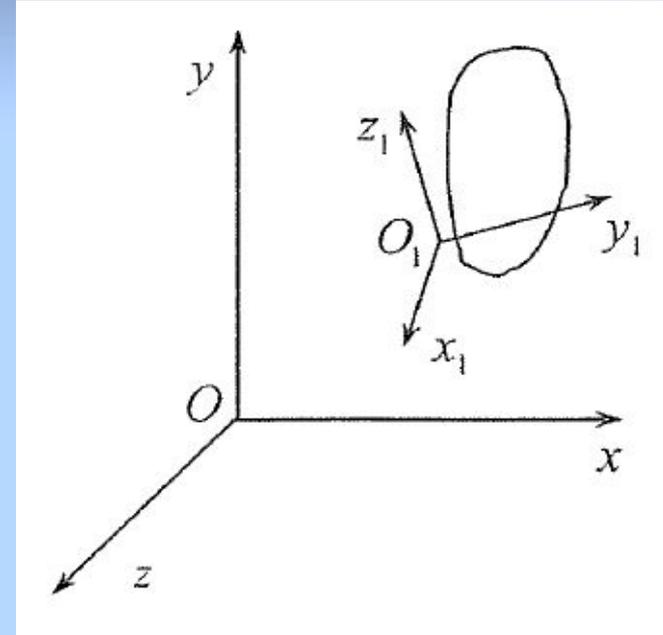
Частные случаи сложного движения твердого тела

1. Сложение поступательных движений

Пусть тело движется поступательно относительно системы $O_1x_1y_1z_1$ со скоростью \vec{v}_1

А система $O_1x_1y_1z_1$ движется поступательно относительно системы $Oxyz$ со скоростью \vec{v}_2

Тогда $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$



Частные случаи сложного движения твердого тела

2. Сложение вращений вокруг параллельных осей (вращения в одну сторону)

МЦС – С



Резльтирующее движение – мгновенное вращение вокруг
оси, параллельной данной с угловой скоростью

Частные случаи сложного движения твердого тела

3. Сложение вращений вокруг параллельных осей (вращения в разные стороны)

МЦС – С

**Результирующее движение – мгновенное вращение
вокруг оси, параллельной данным, с угловой
скоростью**

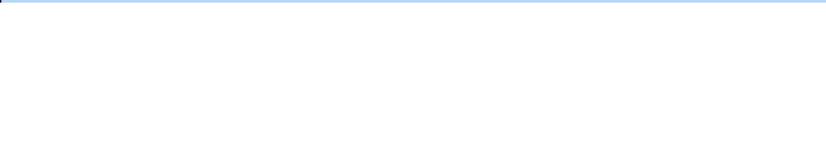
Частные случаи сложного движения твердого тела

4. Пара вращений

(вращения в разные стороны, при этом )



МЦС не существует

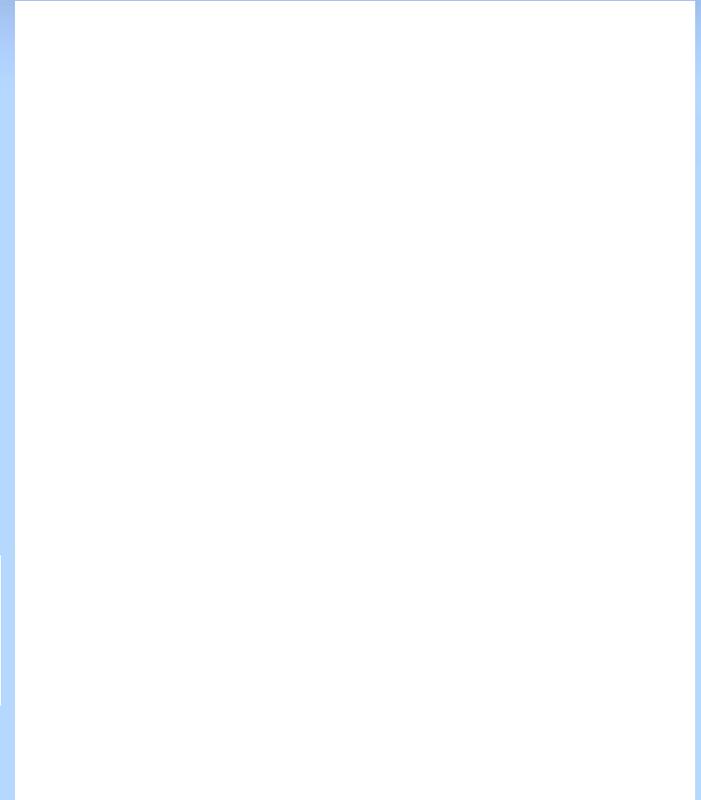
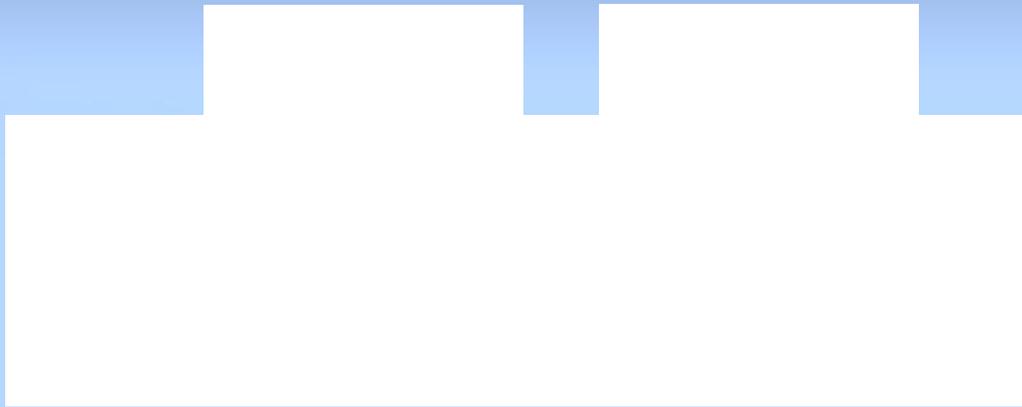


Результирующее движение является мгновенно поступательным.

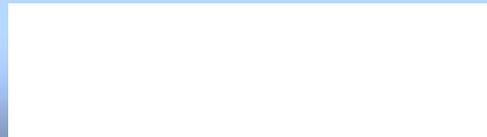
Пример: Движение педали велосипеда DE

Частные случаи сложного движения твердого тела

4. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей



Результирующее движение – мгновенное вращение вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью



Заключение

1. Рассмотрено **сферическое движение** твердого тела.
2. Выведены формулы для определения **угловой скорости и углового ускорения**.
3. Определены **скорости и ускорения отдельных точек**.
4. **Произвольное движение** твердого тела представлено как **сумма поступательного** вместе с полюсом и **сферического** вокруг полюса.
5. Рассмотрены частные случаи **сложного движения** твердого тела.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется сферическим ?
2. Приведите примеры сферического движения.
3. Как определяются углы Эйлера ?
4. Задание сферического движения посредством углов Эйлера единственное возможное или нет ?
5. Что называется мгновенной осью вращения ?
6. Совпадает ли направление угловой скорости и углового ускорения тела, совершающего сферическое движение ?
7. Каким образом можно представить произвольное движение твердого тела?
8. Сложное движение – это какой-то особый вид движения ?
Если да, то какой ?