Введение в математический анализ

Функцией **называется правило, по которому каждому элементу X некоторого множества K соответствует единственный элемент Y другого множества L.**
Графиком **функции y=f(x) называется множество точек плоскости XOY для каждой из которых абсцисса X является значением аргумента, а ордината Y – соответствующим значениям данной функции.**

Способы задания функции:

1)аналитическая (формула) 2)табличный 3) графический

Основные элементарные функции

1)Y=const 2)y=xα , α-действительное, α≠0 3) y=ax (a>0, a≠1) 4)y= logA x (a>0, a≠1)

Тригонометрические

1)y=sin x 2) y=cos x 3) y=tg x 4) y=ctg x

Обратные тригонометрические

1)y=arcsinx 2) y=arccosx 3) y=arctgx 4) y=arcctgx

Функция y= f(ϕ(x)) называется **сложной функцией** или функцией от функции.
Элементарной называется функция, составленная из основных элементарных функций с помощью действий «+», «–», «÷», «* » и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз.

Окрестностью точки x_0 на числовой прямой называется любой интервал (a;b), содержащий эту точку.

Внешность любого интервала (a,b)называется окрестностью интервала бесконечности.

Пусть X={x} произвольное множество действительных чисел.

Множество X называется **ограничением сверху**, если сущ. действительное число такое, что любой $x \in X$, $x \leq M$.

Ограничение снизу, если существует $m \rightarrow x \geq m$.

Множество ограничений снизу и сверху называется **ограниченным.**

Предел функции.

Число b -предел функции при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ сущ. точки a U_a^f такая, что для всех $x \in U_a^f$ выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Лемма: Функция y=f(x), имеющая конечный предел при $x \rightarrow a$, ограничена в некоторой окрестности.

Обратное не верно.

Теорема: Пусть сущ. предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $m \leq f(x) \leq M$ в некоторой окрестности U,тогда $m \leq b \leq M$.

Односторонние пределы.

Любой интервал (a-δ,a) называется **левой окрестностью** точки a.

Любой интервал (a, a+δ) называется **правой окрестностью** точки a.

Теорема: Для того, чтобы функция f(x) при x→a имела предел, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$

Предел последовательности.

Под последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_{n,}$, … понимается функция x_u=f(n), заданная на множестве натуральных чисел.

Число a есть предел последовательности x_n (n=1,2,…), если записать lim x_n=a, если для любого ε>0 существует N=N(ε), что для всех натуральных n>N выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Функция y=f(x) называется **бесконечно малой** при x→a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Функция y=f(x) называется ограниченной при x→a, если существует M и S>0, любой x, $x \in U_a^s$ то отсюда следует f(x) ≤ M. В противном случае – неограниченной при x→a

Функция y=f(x) называется **бесконечно большой** при x→a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Свойства бесконечно малой функции

1. Сумма конечного числа бесконечно малой функции есть функция бесконечно малая.
2. Если существует конечный предел функции при x→a, то функция f(x) является ограниченной при x→a. Если при этом предел не 0, то функция $\frac{1}{f(x)}$ так же является ограниченной при x→a.
3. Произведение бесконечно малой функции при x→a на ограниченную при x→a есть функция бесконечно малая при x→a.
4. Cα(x) – бесконечно малая, если α(x)-бесконечно малая.
5. α(x)·β(x) – бесконечно малая, если α, β- бесконечно малые.
6. $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ - бесконечно малая, если α(x)-бесконечно малая,φ(x) не стремится к нулю.

Свойства бесконечно большой функции.

1. C· б.б. =б.б. , где C-const
2. f·g = б.б., при условии что f и g –бесконечно большие.
3. f+g =б.б. , при условии что f и g –бесконечно большие.

Теоремы о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

.Если α(x) – бесконечно малая при x→a, α(x)≠0, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая при x→a.

1.Если f(x) - бесконечно большая при x→a, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при x→a.

Свойства пределов.

Лемма: Для того, чтобы существовал конечный предел функции f(x) при x→a необходимо и достаточно, чтобы f(x) можно было представить в виде f(x)=b+ α(x), где $b=\lim_{x\to a} f(x)$,

α(x) – бесконечно малая при x→a.

Теоремы о пределах

Теорема 1. Если f(x)=C=const, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{\varphi} = \frac{A}{B}$,если B≠0.

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a} f^{\varphi} = A^{B}$, при условии A≠0, B≠0

Теорема 5. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 6. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^k = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^k$

Теорема 7. (О сжатой переменной**)**.
Если функция удовлетворяет неравенству φ(x)≤f(x)≤Φ(x) и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=b$
то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

Теорема 8.
Если f(x)≥0 и сущ. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то b≥0, если f(x)≤0 и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$,
то b≤0.

Теорема 9.
Если φ(x)≥f(x) , то $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\geq\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 10.
Если f(x) возрастает при x→a и ограниченна, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\leq M$.

Замечательные пределы

Теорема 1. $$\lim_{\substack{x\to a,\\ \alpha(x)\to 0}} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

α(x) – бесконечно малая при x→a.

Теорема 2. Можно показать, что решения $f(x)=(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}$, где α(x) бесконечно малая при x→a, монотонно возрастает, ограниченна при x→a, то она имеет конечный предел.

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ \alpha(x)\to 0}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

.

Теорема 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$, если **a=e**, то $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

.

Теорема 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$, если **a=e**, то $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Сравнение бесконечно малых величин.

Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ называются эквивалентными при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \qquad \alpha(x) \sim \beta(x).$$

Свойства эквивалентных функций.

1)$\alpha(x) \sim \alpha(x)$ 2) $\alpha(x) \sim \beta(x) \leftrightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$ 3) $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

<u>Теорема.</u>

Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, и существует $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, тогда существует $\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Таблица эквивалентных функций.

1)$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$, $\alpha(x) \to 0$ 2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$ 3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$

4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$ 5) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ 6)$e^{\alpha(x)}+1 \sim \alpha(x)$

7) $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ 8)$a^{\alpha}-1 \sim \alpha\ln a$ 9) $\log_a(1+\alpha) \sim \frac{x}{\ln a}$

Говорят, что при x→a порядок бесконечно малой β(x) выше порядка бесконечно малой α(x) при x→a (или, что тоже самое, порядок бесконечно малой α(x) ниже порядка бесконечно малой β(x)), если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ есть бесконечно малая при x→a,

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$$

Обозначается: β(x)=∘ (α(x)) при x→a.

Говорят, что бесконечно малая β(x) имеет порядок **n** (n –натуральное число) относительно бесконечно малой α(x) при x→a, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)}=k$$

(k≠0), т.е. β(x) и $\alpha^n(x)$ - одного и того же порядка (эквивалентны).

Понятие об асимптотических формулах.

Если при x→a справедливо равенство * f(x)= φ(x)+ ∘(φ(x)), то φ(x) называется асимптотическим членом (или асимптотическим выражением) для функции y=f(x) при x→a.

Из формулы * следует, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$$

График линейно асимптотического члена y=kx+b называется асимптотой кривой y=f(x)

Непрерывность функции.

Приращение функции.
Непрерывные функции.

Приращением некоторой переменной величины называется разность между новым значением этой величины и её прежним значением, т.е. $x - x_{1.}$

Обозначается: Δx (любое по знаку), x – старое значение, $x + \Delta x$ – новое значение.

Функция $y=f(x)$, определенная на множестве x, называется непрерывной при $x=x_0$, $x_0 \in x$, или непрерывной в точке $x_{0,}$ если

1. функция определена при $x=x_0$ (т.е. x_0 и некоторой окрестности)
2. приращение функции в точке x_0 стремится к 0, когда приращение аргумента Δx стремится к 0, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

, где бесконечно малая Δx приобретает лишь те значения, для которых $f(x0 + \Delta x)$ имеет смысл.

Другое определение непрерывности функции.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной при $x \to x_0$, если

1)эта функция определена при $x=x_0$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Это эквивалентные определения).

Теорема Если функция непрерывна, то знаки предела и функции перестановимы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim x)$$

Теоремы о непрерывных функциях.

1.Основные элементарные функции непрерывны в области определения.
2.Сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.
3.Произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.
4.Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых делитель не равен 0.

Следствие: R(x)= $\dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$

непрерывна всюду, за исключением тех значений x, в которых знаменатель равен 0
5.Непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.
6.**<u>Теорема о непрерывности обратной функции.</u>**
Если функция y=f(x) непрерывна и строго монотонна (строго возрастает или строго убывает) на промежутке [a, b], то существует однозначная обратная функция x=φ(y), ограниченная на промежутке [f(a),f(b)], причем x=φ(y) непрерывна и монотонна в том же смысле.

«Истинное» значение функции.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то f(x) непрерывна в точке x0.

Операция нахождения lim называется раскрытием неопределенности, а сам предел, если он существует, называется «истинным» значением функции f(x) при $x=x_0$.

Классификация точек разрыва.

Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется точкой разрыва этой функции.

Функция разрывна т.к.: 1. не существует предела функции в этой точке, или

2. предел функции в данной точке, т.е. левый предел равен правому пределу, но он не совпадает со значением функции в данной точке.

Точка x_0 называется точкой разрыва 1-ого рода устранимого разрыва функции, если

$$\lim_{x \to x-} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) \neq f(x_0).$$ (если $f(x_0)$ не существует).

Функция, допускающая на отрезке лишь конечное число точек разрыва 1-ого рода, называется кусочно-непрерывной на этом отрезке (в точках разрыва функция может быть не определена).

Производная функции

Понятие производной функции в точке x_0

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел сущ. $y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке *x0* , то она непрерывна в этой точке

Производная как функция. Правила дифференцирования

Пусть D_1 - множество точек, в которых функция f дифференцируема. Сопоставляя каждому $x\in D_1$ число $f'(x)$, получим новую функцию с областью определения D_1 . Эта функция называется производной функции $y=f(x)$ и обозначается f' или y'

Правила дифференцирования:

$$(U+V)'=U'+V'$$

$$(UV)'=U'V+UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

Производная сложной функции.

Пусть $U = \varphi(x)$ и $y = f(U)$. Тогда $y = f\left(\varphi(x)\right)$ называется сложной функцией от *x*.

Теорема: Если функция $U = \varphi(x)$ имеет производную U'_x в точке *x*, а функция $y = f(U)$ имеет производную y'_U в соответствующей точке *U*, то сложная производная $y = f\left(\varphi(x)\right)$ в точке *x* имеет производную y'_x, причем

$$y'_x = y'_U \cdot U_x{}'$$

Геометрический и физический смысл производной.

Геометрический смысл: Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке *x0*, тогда угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке $\left(x_0; f(x_0)\right)$, равен $y'\left(x_0\right)$

Физический смысл:

материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону

$S = f(t)$, где *t*- время, *S* – путь, проходимый точкой за время *t*.

Тогда скорость точки в момент времени *t* равна $V = S'(t)$

Таблица производных элементарных функций

1) $C' = 0$, где $C = const$

2) $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\sin x \neq 0$

3) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

6) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, где n – натуральное число

8) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a>0$, $a \neq 1$

Частный случай: $(e^x)' = e^x$

9) $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\cos x \neq 0$

10) $(\sin x)' = \cos x$ $\cos x \neq 0$

11) $(\cos x)' = -\sin x$

12) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $a>0$, $a \neq 1$

Частный случай: $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

Производная функции, заданной неявно.

Функция вида $\Phi(x;y)=0$ называется функцией заданной неявно, т. е. *y* не выражено через *x*.

Правило нахождения

y'_x (*x* – независимая переменная, *y* – функция, независящая от *x*): чтобы найти y'_x функции $\Phi(x;y)=0$, надо найти производную обеих частей равенства. Из равенства: $\Phi'(x;y;y')=0$ получим y'

Производная степенно-показательной функции.

Функция вида $y=U(x)^{V(x)}$ наз. степенно-показательной функцией

$$y'=U^V\cdot\ln U\cdot V'+V\cdot U^{V-1}\cdot U'$$

Производная функции, заданной параметрически.

Функция $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ называется функцией, заданной параметрически,,*t* – параметр, $t\in T$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

Производные высших порядков

Произв. от первой наз. произв. второго порядка от функции $y=f(x)$ и обозн.: y''_{x^2} ;

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ ;\quad y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'\ ;\quad f''_{x^2}$$

Теорема Лагранжа о конечном приращении функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$ и дифференцируема в интервале $\left(a;b\right)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in \left(a;b\right)$, для которой выполняется условие:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Теорема Ролля.

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$ и дифференцируема в интервале $\left(a;b\right)$ и $f(a) = f(b) = 0$

.

Определение возрастающей (убывающей) функции.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если для любых значений $x_2 > x_1$ этого промежутка выполняется условие

$$f(x_2) > f(x_1) \ \left(f(x_2) < f(x_1)\right)$$

Необходимый и достаточный признак монотонности функции.
Интервал, на котором функция возрастает или убывает, называется интервалом монотонности функции.
Теорема 1: Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная в каждой точке $(a;b)$

$$f'(x) \geq 0 \ \left(f'(x) \leq 0\right)$$

Теорема 2 : Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ в каждой точке интервала $(a;b)$ имеет положительную (отрицательную) производную, то эта функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$

Определение точки минимума и точки максимума функции.
Определение минимума и максимума функции.
Функция $y = f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такая окрестность точки *x0*, что для всех *x*, принадлежащих этой окрестности, выполняется условие $f(x) < f(x_0) \ \left(f(x) > f(x_0)\right), \quad x \neq x_0$

.

Необходимое условие существования экстремума функции.

Если дифференцируемая в точке *с* функция $y=f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(c)=0$

Достаточное условие существования экстремума функции.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала , содержащего критическую точку *с* (за исключением, может быть, самой этой точки), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева на право через критическую точку *с* меняет знак с плюса на минус, то функция в точке *с* имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.

Определение промежутков вогнутости и выпуклости графика функции.

Определение точки перегиба.

График диффер. функции наз. выпуклым (вогнутым) в интервале, если он расположен ниже (выше касательной. Точка графика непрерывной функции, отделяющая выпуклую часть от вогнутой, наз. точкой перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба.

функция $y=f(x)$ имеет в интервале $(a;b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$ и точка $x_0 \in (a;b)$ является абсциссой точки перегиба графика данной функции. Тогда $f''(x)$ равна нулю или не сущ.

Достаточное условие вогнутости и выпуклости графика функции.

Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x)<0$, то график в интервале $(a;b)$ выпуклый; если же $f''(x)>0$ - вогнутый.

Вертикальные и невертикальные асимптоты графика функции.

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, расстояние от которой до текущей точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Для нахождения вертикальных асимптот, надо найти точки разрыва функции второго рода. Если x_0 – такая точка, то хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)$ равен бесконечности. Это означает, что прямая $x=x_0$ вертикальная асимптота Уравнение невертикальной асимптоты можно записать в виде: $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad b=\lim_{x \to \infty}\left(f(x)-kx\right)$$

В частном случае при $k=0$ – горизонтальная асимптота.

Приближенное значение функции в точке.

Пусть значение функции $y_0=f(x_0)$ и ее производной $y_0'=f'(x_0)$

Значение в точке x: $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot \Delta x$

Уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Касат. к графику диффер-ой в точке x_0 функции f –прямая, проход. через точку $\left(x_0; f(x_0)\right)$ и имеющ. угл. коэфф. $f'(x)$

Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Формулы Тейлора для функции. Общая формула и формулы для элементарных функций.

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n$$

Общая схема исследования функции и построения графика функции.

Область определения; Точки разрыва, характер разрыва; Асимптоты графика функции;

Четность (нечетность); Период; Точки пересечения с осями координат;

Интервалы монотонности; Интервалы вогнутости, выпуклости, точки перегиба.