РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЕМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

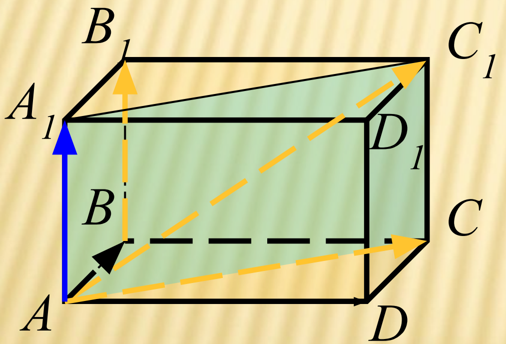
МОБУ «СОШ №78»

учитель математики
Ягодникова Наталья Олеговна

Определение компланарных векторов

***Компланарные векторы** – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

Пример:

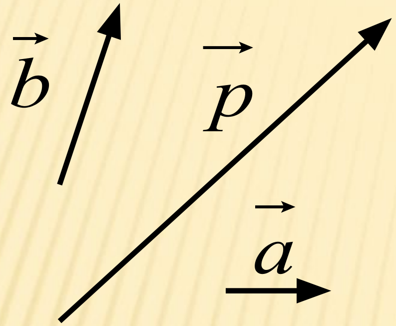


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ – *компланарны, т.к.* $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, *а векторы* $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$ *лежат в плоскости* (AA_1C)

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ

- ***Теорема.***
- *Любой вектор можно разложить по двум*
- *данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ



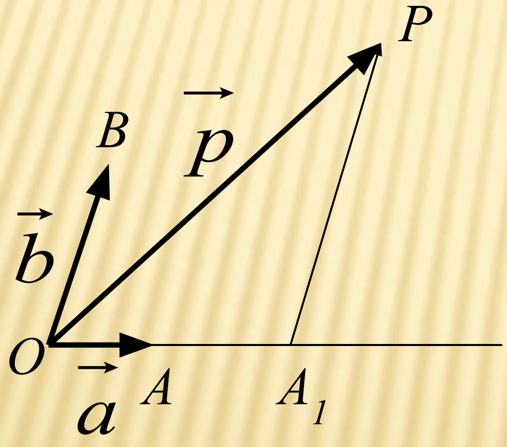
Дано:

$\vec{a}, \vec{b}$ – *неколлинеарные векторы*

Доказать:

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Доказательство:



1) Пусть $\vec{p}$ *коллинеарен* $\vec{b}$.

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$*, где y – некоторое число.*

Следовательно,

$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$

т.е. $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

2) $\vec{p}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$.

Отметим О – произвольную точку.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$PA_1 \parallel BO$ $PA_1 \cap OA = A_1$

$\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$ *(пп правилу треугольника)*

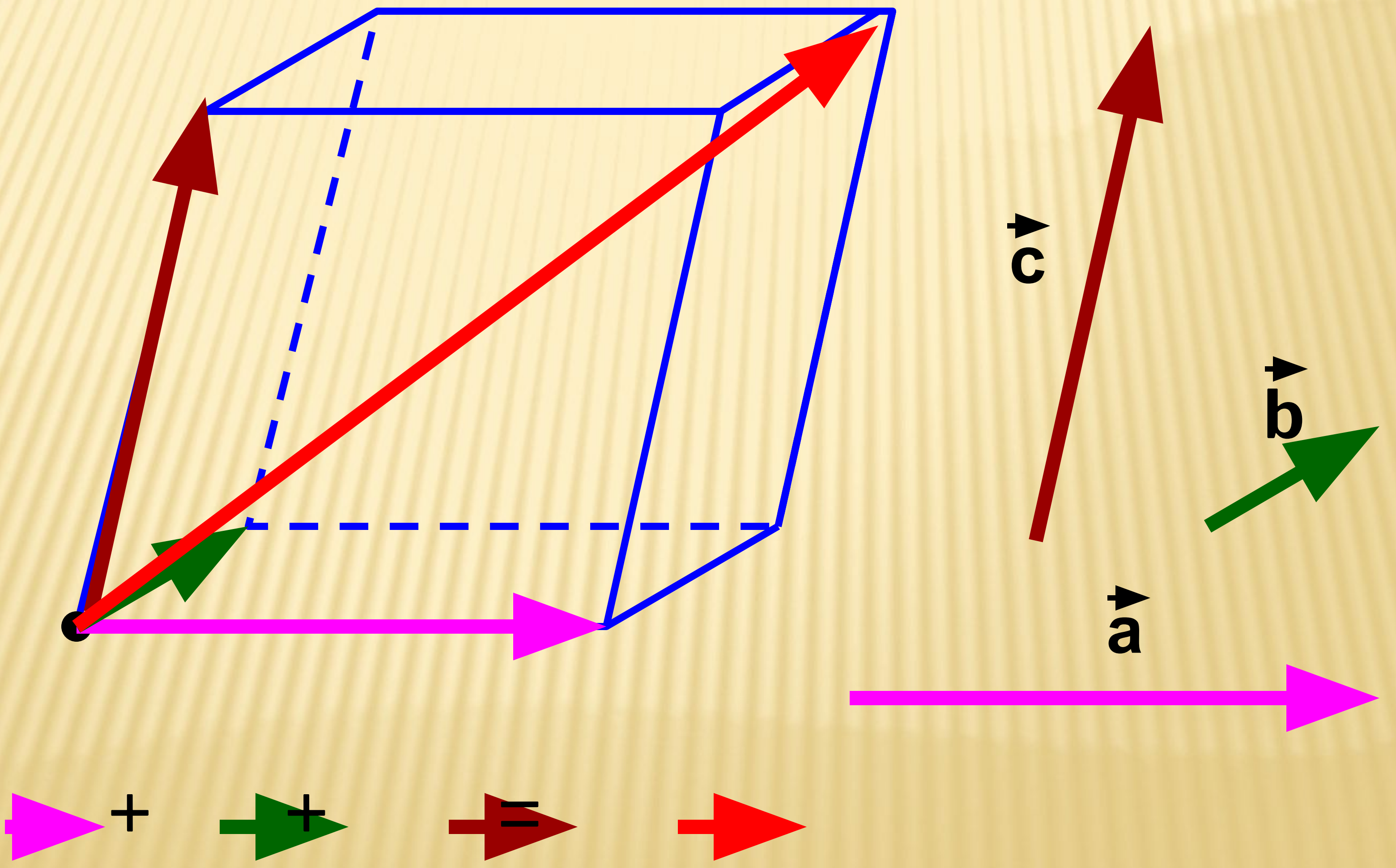
но: $\overrightarrow{OA_1}$ *и* $\overrightarrow{A_1P}$ *коллинеарны* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *соответственно,*

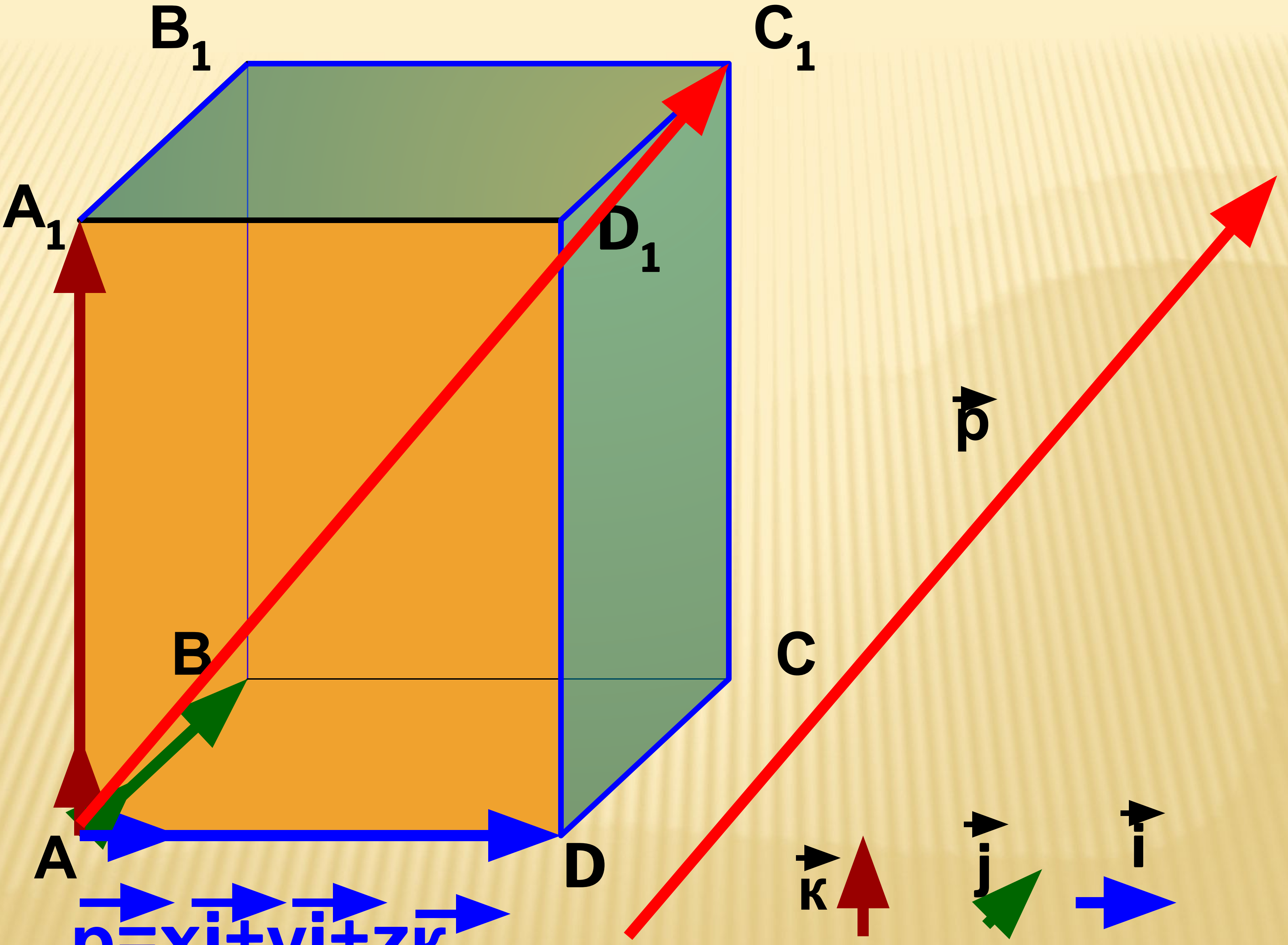
значит $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = y\vec{b}$,

следовательно $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.е.* $\vec{p}$ *разложен по* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

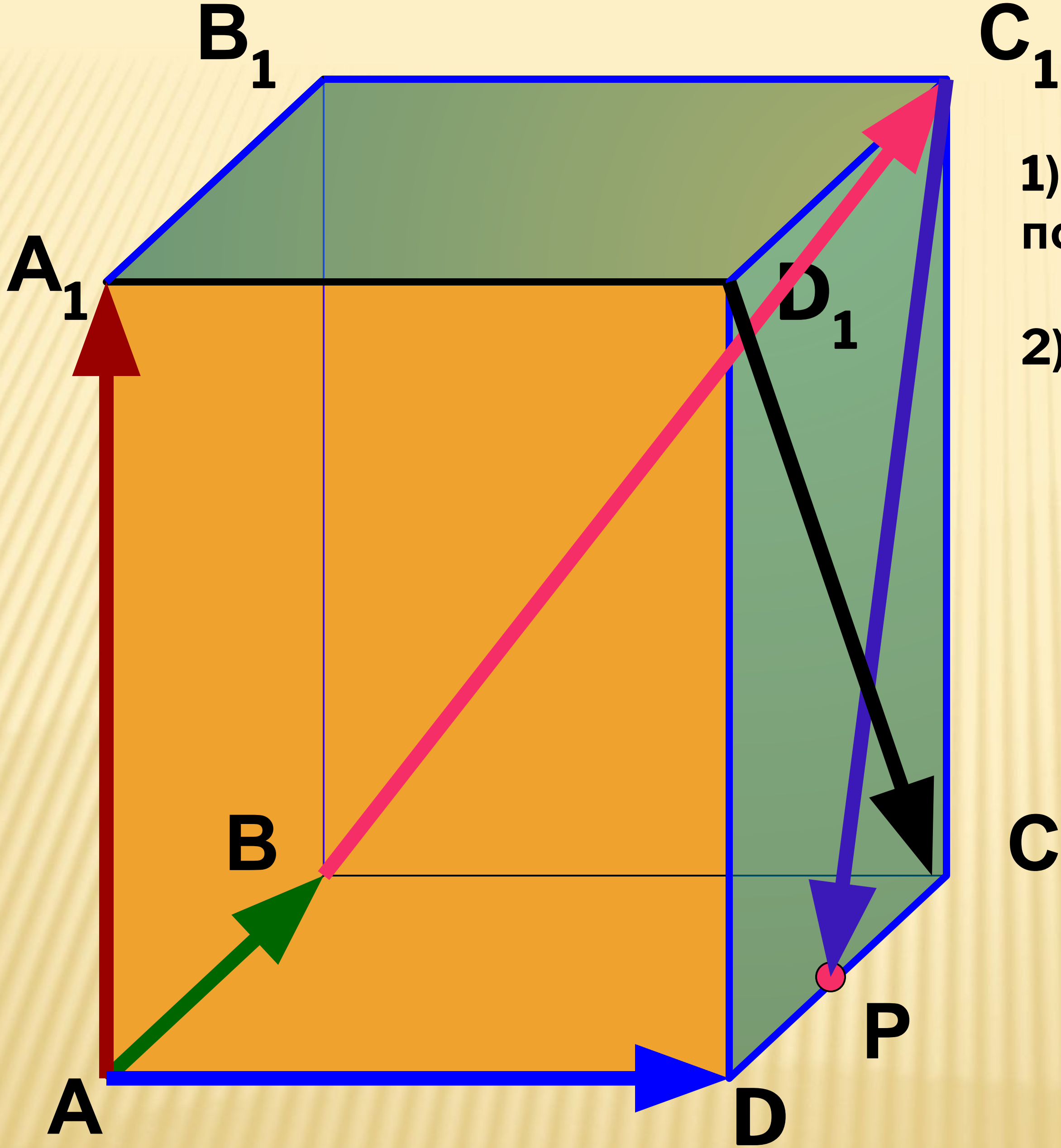
ч.т.д.

Правило параллелепипеда.





$$\vec{p}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{к}$$



1). Разложить $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{D_1C}$ по векторам $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{D_1C}$

2). Найти длину $\overrightarrow{C_1P}$, если $|\overrightarrow{AA_1}|=8$, $|\overrightarrow{AB}|=12$

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$, P – середина CD.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЕМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

Если вектор ***p*** *представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где ***x, y, z*** *– некоторые числа, то говорят, что вектор* $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$*.*

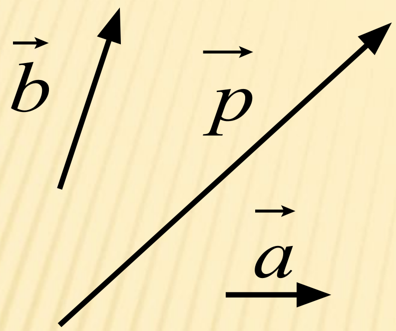
Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

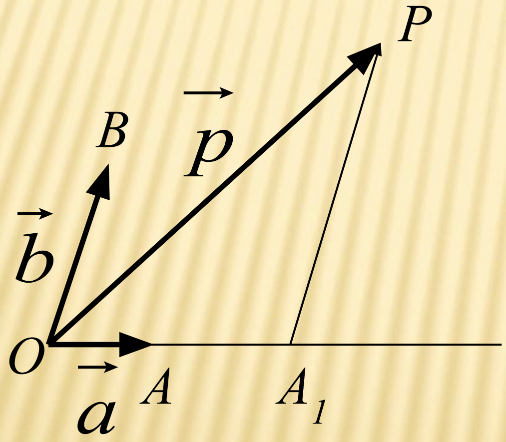
<u>Теорема</u>

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ





Дано:

$\vec{a}, \vec{b}$ – *неколлинеарные векторы*

Доказать:

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Доказательство:

1)*Пусть* $\vec{p}$ *коллинеарен* $\vec{b}$.

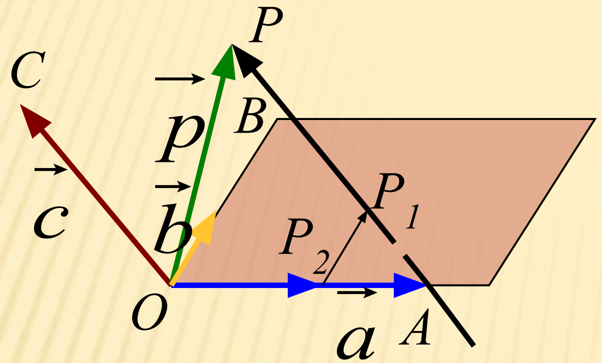
Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, *где* y – *некоторое число.*

Следовательно,

$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$

т.е. $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Доказательство теоремы



Дано:

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – некомпланрные векторы

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

$\overrightarrow{OP_2}$, и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{OC}$ – коллинеарны

$\overrightarrow{OP_2} = x\cdot\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{P_2P_1} = y\cdot\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{P_1P} = z\cdot\overrightarrow{OC}$

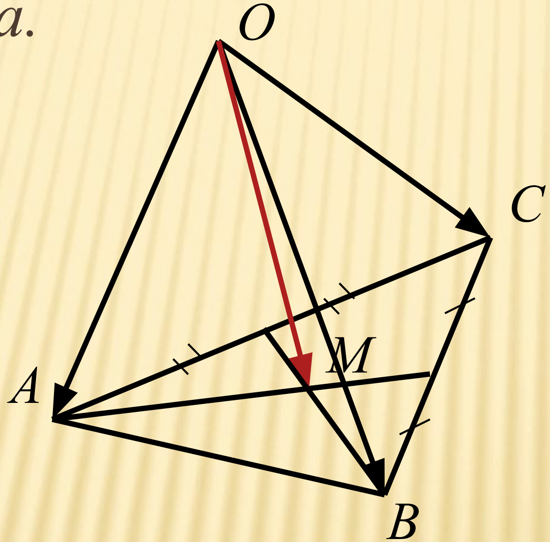
$\overrightarrow{OP} = x\cdot\overrightarrow{OA} + y\cdot\overrightarrow{OB} + z\cdot\overrightarrow{OC}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ч.т.д.

Вектор, проведенный в центроид треугольника,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

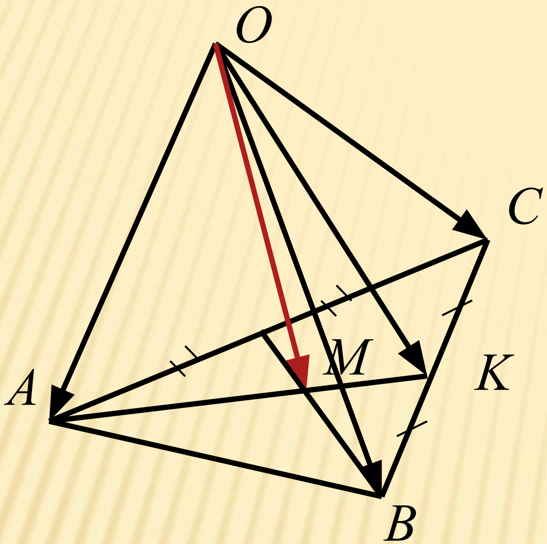
***Центроид** – точка пересечения медиан треугольника.*



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Дано :

ΔABC

$M-$центроид

Доказать :

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

Доказательство :

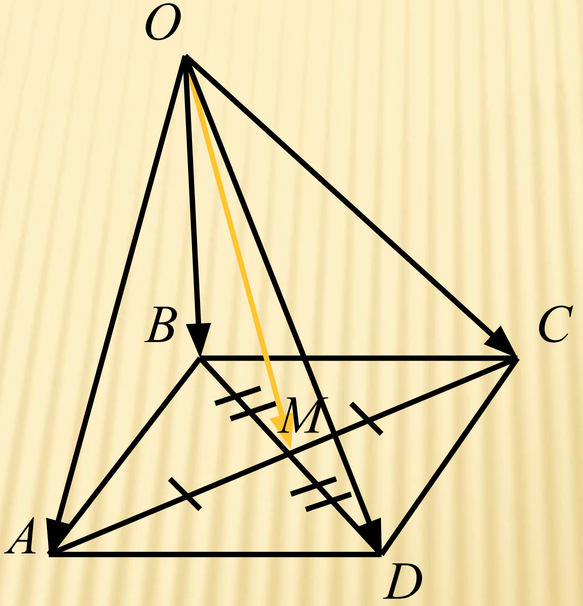
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}=$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}))=$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\text{ ч.т.д.}$$

ВЕКТОР, ПРОВЕДЕННЫЙ В ТОЧКУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДИАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА,

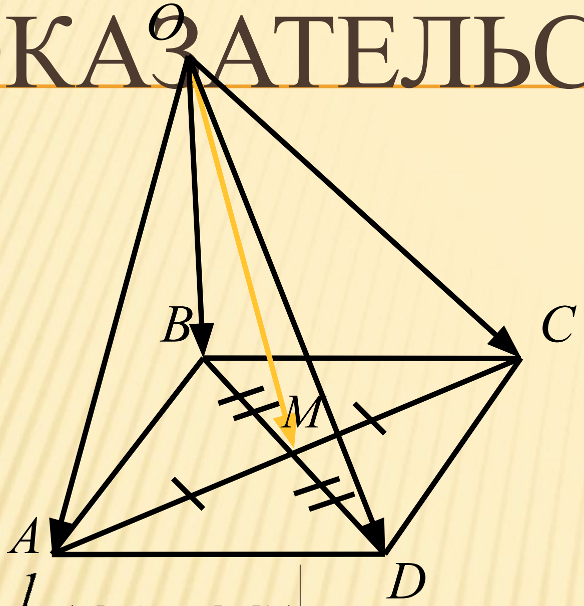
равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.



$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Дано :

$ABCD - пар - м$

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\left.\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned}\right| +$$

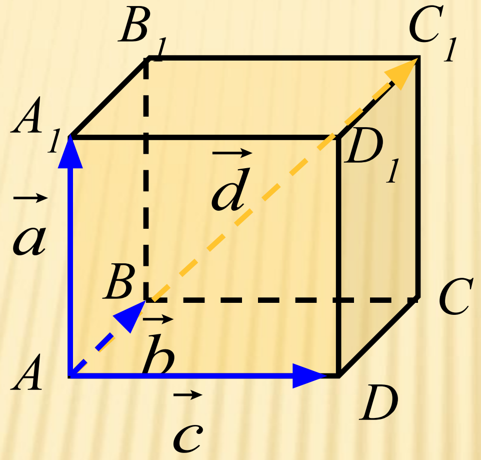
$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) ÷.ò.ä.$$

ВЕКТОР, ЛЕЖАЩИЙ НА ДИАГОНАЛИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА,

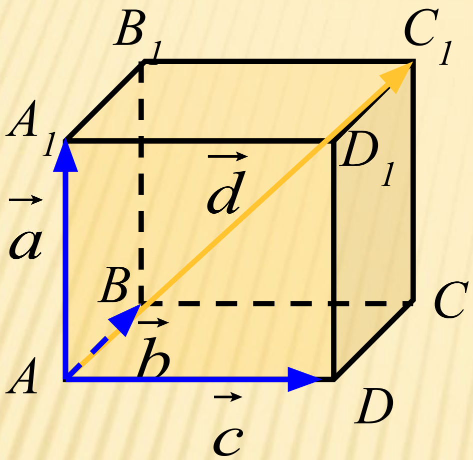
равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах, исходящих из одной вершины.



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1 - пар - м$

$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$

Доказать :

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Доказательство :

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} =$

$= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$

$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ч.т.д.