Тема: Задачи и методы оптимального планирования

КТН, доцент
Манкевич
Александр Валерьевич

Учебные вопросы:

1. **Основные понятия**
2. **Математическая постановка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП)**
3. **Транспортная задача**
4. **Геометрический метод решения ОЗЛП**
5. **Пример решения задачи линейного программирования (ЗЛП)**
6. **Двойственные задачи линейного программирования**

Первый учебный вопрос:

Основные понятия

1. Основные понятия
1.1 Сущность задач оптимального планирования

Оптимальное планирование **– комплекс методов который позволяет выбрать из многих возможных планов или программы наилучший с точки зрения заданного критерия оптимальности при определённых ограничениях.**

В экономическом анализе критерий оптимальности – показатель показывающий предельную меру экономического эффекта принимаемого решением (максимум прибыли, минимум трудозатрат, наименьшее время достижения цели и т.д.).

1.1 Сущность задач оптимального планирования

Основные задачи:

1. **Правильно и чётко формулировать цели экономической системы в целом и каждого его звена.**
2. **Отбирать критерий оптимальности для всего комплекса задач планирования.**
3. **Решать каждую задачу планирования в отдельности оптимально (*находить единственно наилучшее решение с учётом избранных критериев оптимальности*).**

1.2 Классификация задач оптимального планирования

I. ***По характеру взаимосвязи между переменными:***

1. **линейные;**
2. **нелинейные.**

II. ***По характеру изменения переменных:***

1. **непрерывный;**
2. **дискретный.**

III. ***По характеру учёта факторов времени:***

1. **статические;**
2. **динамические.**

1.2 Классификация задач оптимального планирования (продолжение)

IV. *По наличию информации:*

1. полные определённости;
2. неполные информации.

V. *По числу критериев оценки альтернатив:*

1. простые (однокритериальные);
2. сложные (многокритериальные).

Оптимальное планирование основано на решении задач математического программирования.

1.3 Методы математического проектирования

1. Дифференциальный;
2. Линейный;
3. Нелинейный;
4. Динамический;
5. Стохастический (вероятностный);
6. Эвристический (интуиция, мнение экспертов) и т.д.

1.4 Проблемы решаемые методами линейного программирования

1. **Оптимальное распределение мощностей различных машин, станков, механизмов;**
2. **Оптимальное использование транспортных средств путём определения рациональных планов перевозок;**
3. **Рациональное комплектование сырья и составление любых смесей и т.д.**

Второй учебный вопрос:

Математическая постановка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП)

2.1 Общие математические признаки общей задачи линейного программирования (ОЗЛП)

1. **Отыскание экстремума (*min*; *max*);**
2. **Наличие большого числа переменных;**
3. **Область существования переменных это линейные равенства и неравенства.**

2.2 Постановка общей задачи

Найти значение переменных X_1, X_2, …, X_n, которые обращают в *max* или *min* функцию:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} \qquad (1)$$

и удовлетворяет уравнениям или неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} b_i \qquad (2) \qquad \begin{matrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{matrix}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (3)$$

№ 1 – целевая функция;

№ 2 – ограничения;

№ 3 – условие неотрицательности;

***a*, *b*, *c* – известные коэффициенты.**

Вид функций 1 и 2 определяют класс или вид математического программирования.

2.3 Формы записи задачи линейного программирования

1. Стандартная;
2. Каноническая;
3. Векторная;
4. Матричная.

Третий учебный вопрос:

Транспортная задача

3.1 Транспортная задача

Данная задача впервые в мире была поставлена и решена в 1939 году в России Канторовичем Л.В. Её решением было положено начало методу линейного проектирования.

В зависимости от выбранного критерия эффективности различают следующие задачи:

- **по суммарному пробегу;**
- **по стоимости;**
- **по времени;**
- **комбинированные.**

3.1 Транспортная задача линейного проектирования (ТЗЛП) в общем виде

Исходные данные:

$Ск_i$ - склады с запасом имущества в количестве a_i;

$П_j$ – потребители с потребностями в имуществе в количестве b_j;

C_{ij} – стоимость перевозки единицы имущества со склада потребителю;

x_{ij} – количество единиц имущества доставленных со склада потребителю.

Требуется найти такой план перевозок (x_{ij}), который бы удовлетворял ограничениям и суммарная стоимость перевозок была минимальной.

3.1.1 Составляем логическую таблицу

Склады	Потребитель				Запасы на складах
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$	
$Ск_1$	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1n} C_{1n}	a_1
$Ск_2$	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…	X_{2n} C_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
$Ск_m$	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…	X_{mn} C_{mn}	a_m
Потребности потребителей	b_1	b_2	…	b_n	Условия выполнения плана снабжения $\sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i$

3.1.2 На основе таблицы составляем целевую функцию

Целевая функция

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to \min$$

Ограничения по запасам на складах

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = \overline{1,m})$$

Ограничения по потребностям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n})$$

Условие неотрицательности

$$x_{ij} \ge 0$$

Четвёртый учебный вопрос:

Геометрический метод решения ОЗЛП

4.1 Основа метода

Задачам линейного программирования можно дать наглядную геометрическую интерпретацию, которая позволяет наглядно увидеть ряд основных свойств задач линейного программирования, а также решить простейшие задачи.

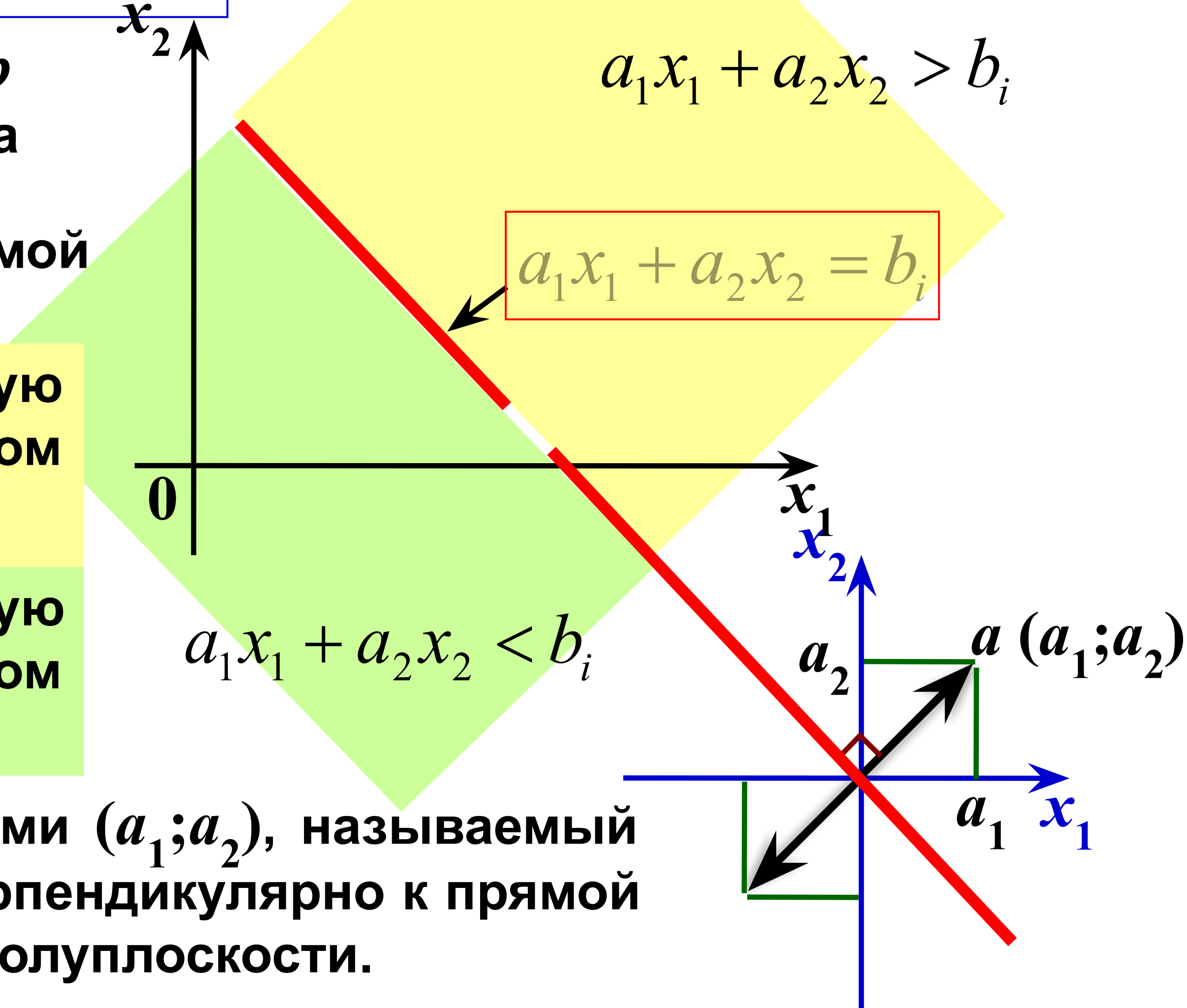
***Основное условие*:**

- ✔ **число переменных величин n на 2 больше чем число уравнений m ($n = m + 2$)**

Геометрическая интерпретация ЗЛП

Целевая функция $F = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max$

Ограничения $a_1x_1 + a_2x_2 \le b_i$



* **Уравнение $a_1x_1+a_2x_2=b$ определяет прямую на плоскости**

* **Плоскость делится прямой на 2 полуплоскости:**

- **положительную описывают неравенством $a_1x_1+a_2x_2>b$**
- **отрицательную описывают неравенством $a_1x_1+a_2x_2<b$**

* **Вектор a с координатами $(a_1;a_2)$, называемый нормалью, направлен перпендикулярно к прямой и только в сторону « + » полуплоскости.**

Так как в ограничении стоит знак ≤, то вектор строим в сторону « – » полуплоскости.

Алгоритм решения задачи графическим методом:

1. **Построить на координатной плоскости область соответствующую ограничениям, которые представлены прямыми линиями.**

2. **Определить положительную или отрицательную полуплоскость ограничений в зависимости от вида неравенства с помощью вектора прямых, который направлен только в положительную полуплоскость.**

3. **Выделить область допустимых решений *(ОДР)* и её вершины**

4. **Построить целевую функцию F.**

Алгоритм решения задачи графическим методом (продолжение):

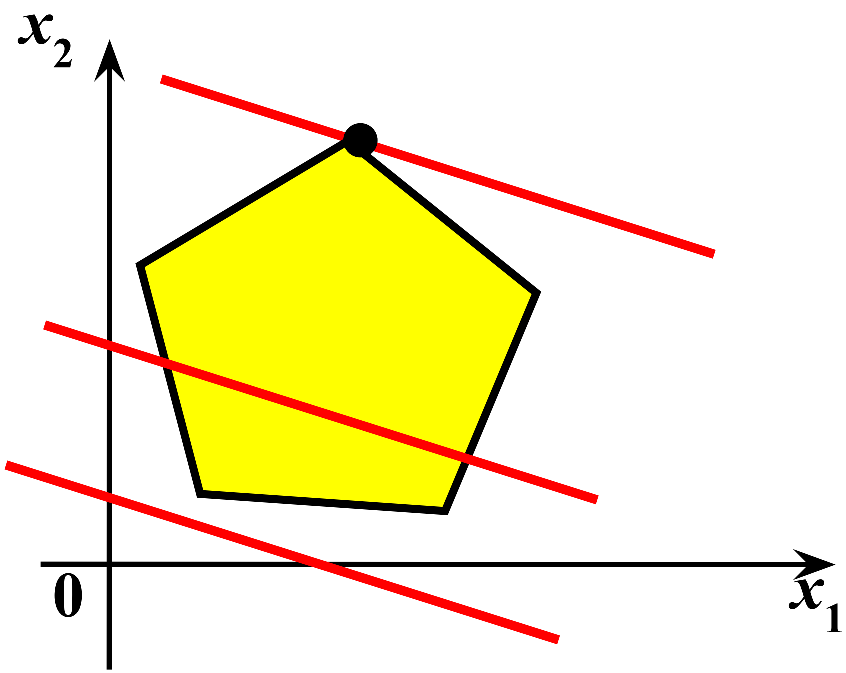
5. **Определить направление возрастания или убывания целевой функции в зависимости от её вида (*min*; *max*) с помощью вектора C (направленного в положительную полуплоскость).**

6. **Найти координаты точки *max* или *min* в вершине *ОДР* с помощью целевой функции F.**

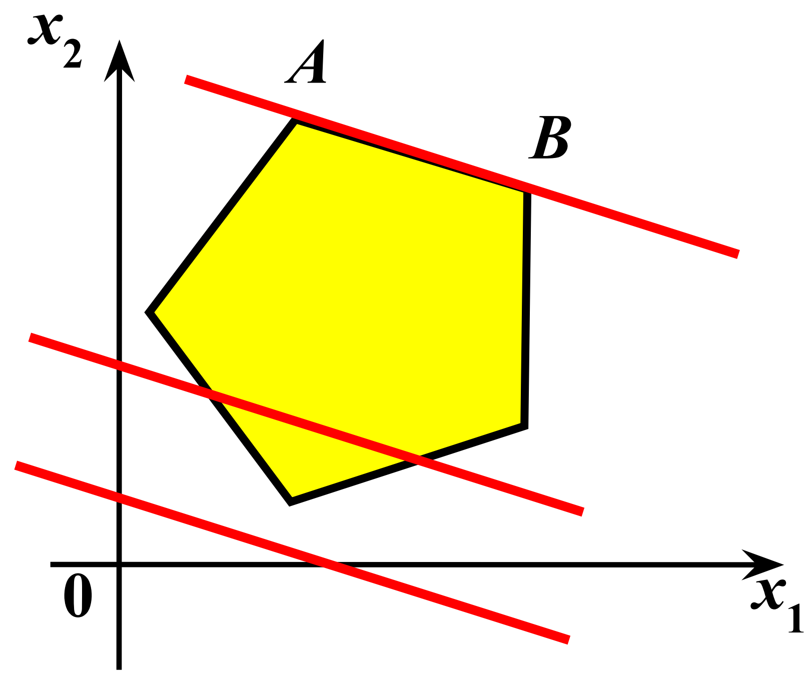
Примечание: *Решение может быть:*

- ***единственным;***
- ***множественным;***
- ***отсутствует.***

Виды решений ЗЛП

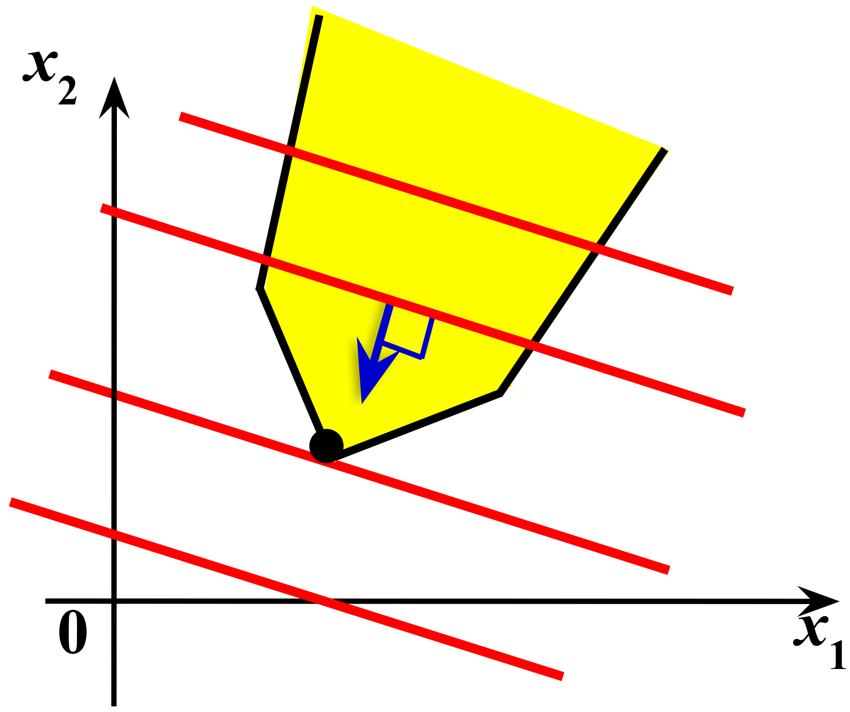


ЗЛП **имеет единственное решение**

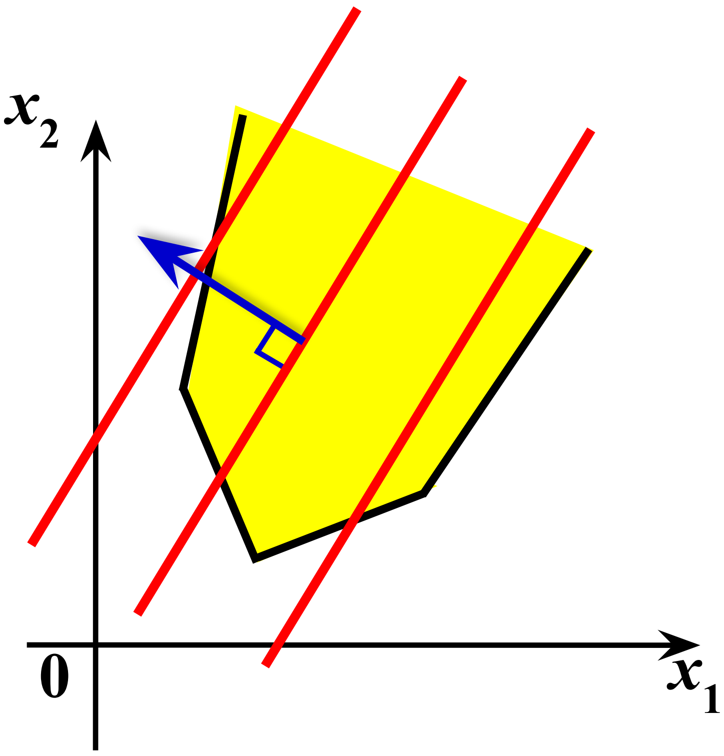


ЗЛП **имеет альтернативный оптимум (линия АВ)**

Виды решений ЗЛП



ЗЛП **имеет минимум и не имеет максимума**



ЗЛП **не имеет решения**

Пятый учебный вопрос:

Пример решения ЗЛП

Решение задачи

Целевая функция $F = 2x_1 + x_2 \to max$

Ограничения

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \le 7 & (2) \\ 4x_1 - 3x_2 \le 6 & (3) \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Решить</u> задачу геометрическим методом

Решение задачи

***I Этап*:**

1) $-x_1 + x_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = 2 \\ x_2 = 0; \quad x_1 = -2 \end{array}\right.$$

2) $x_1 + 2x_2 = 7$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = 3{,}5 \\ x_2 = 0; \quad x_1 = 7 \end{array}\right.$$

3) $4x_1 - 3x_2 = 6$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = -2 \\ x_2 = 0; \quad x_1 = 1{,}5 \end{array}\right.$$

***II Этап*: Определить направление векторов.**

III Этап*: Выделить *ОДР* и её вершины – *ОАВСД

***IV Этап*:**

$2x_1 + x_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \quad x_2 = 0 \\ x_2 = 2; \quad x_1 = -1 \end{array}\right.$$

Решение задачи

***V Этап*: Определить направление вектора.**

***VI Этап*: Перебираем все точки для $F = 2x_1 + x_2$**

точка *O* − $F = 2*0 + 0 = 0$

точка *A* − $F = 2*0 + 2 = 2$

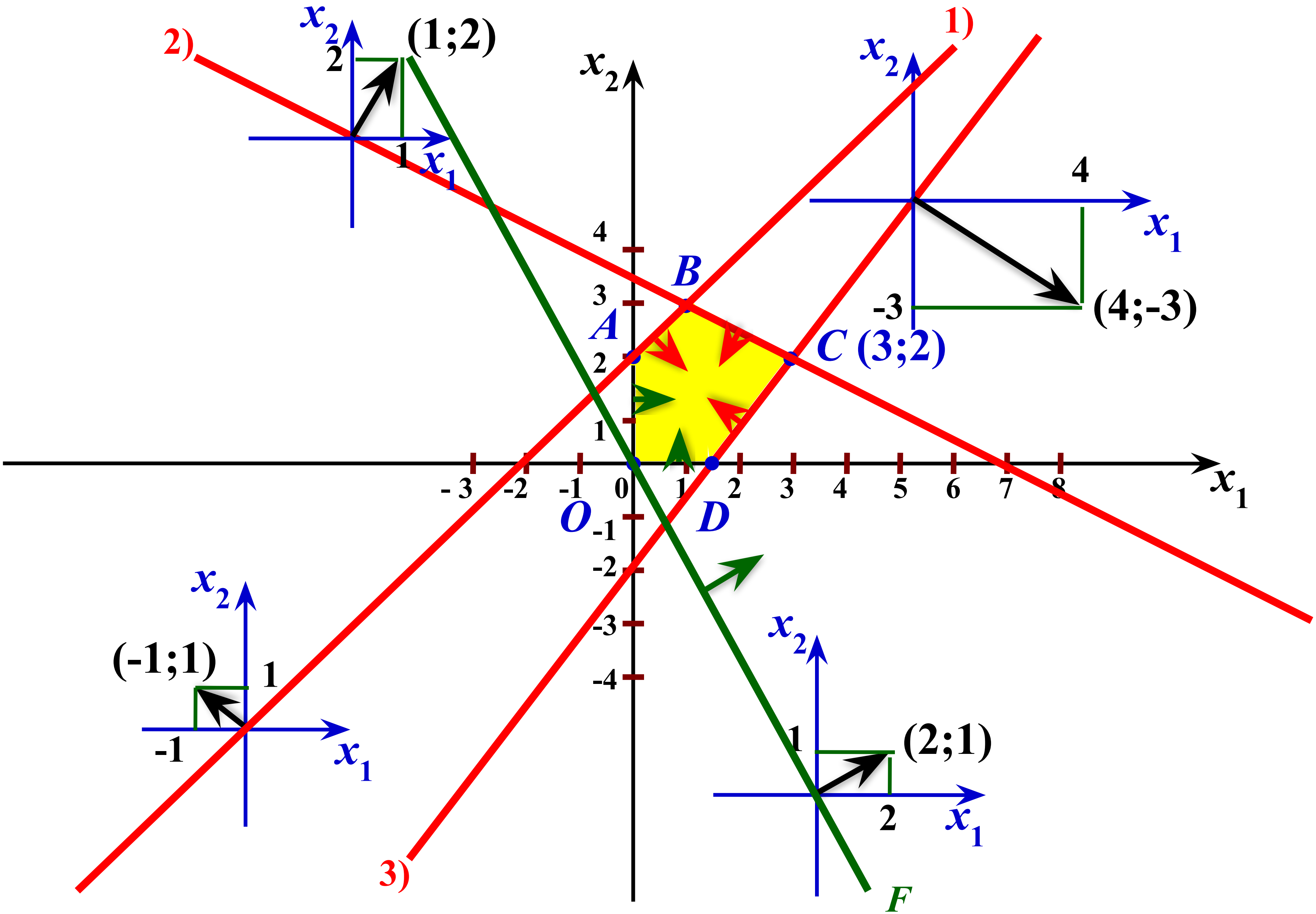
точка *B* − $F = 2*1 + 3 = 5$

точка *C* − $F = 2*3 + 2 = 8$

точка *Д* − $F = 2*1,5 + 0 = 3$

***Ответ*: точка *C* с координатами (3;2) является оптимальной, так как в ней $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$**

Решение задачи



Решение задачи

P.S. **Если взять целевую функцию $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$ при тех же ограничениях, тогда F будет параллельна прямой BC, следовательно, задача линейного проектирования будет иметь альтернативный оптимум (будет иметь множество значений на отрезке BC).**

Шестой учебный вопрос:

Двойственные задачи линейного программирования

6.1 Основные понятия

Двойственность в линейном программировании **это принцип, который заключается в том, чтобы для каждой задачи ЛП путём замены отдельных её элементов на двойственные можно сформулировать двойственную задачу.**

Связь между прямой и двойственной задачами устанавливается двумя теоремами:

- **теоремой (признаком) двойственности;**
- **теоремой (признаком) оптимальности.**

6.1 Основные понятия (продолжение)

Прямая		Двойственная	
Целевая функция			
1)	$F_{ПР} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$	$F_{ДВ} = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min$	4)
Ограничения			
2)	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1, m})$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$	5)
Условия неотрицательности			
3)	$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$	$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}$	6)
Требуется			
	Составить такой план выпуска продукции $X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной, при условии, что потребности ресурсов не превысят по каждому виду продукции имеющихся запасов (b_i). C_j – цена продукции.	Найти такой набор цен ресурсов $Y(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ при котором общие затраты на ресурсы будут минимальны, при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не больше прибыли от реализации этой продукции.	

6.2 Экономические свойства оценок

- В экономической литературе цены ресурсов y_1, y_2, …, y_m носят следующие названия – учётные, неявные, теневые.
- Внешние цены c_1, c_2, …, c_n на продукции известны как правило до начала производства.

6.2 Экономические свойства оценок

Алгоритм составления двойственной задачи

I. Привести все неравенства системы ограничений прямой задачи к одному смыслу:

1) Если в прямой задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы необходимо привести к виду меньше (≤).

2) Если в прямой задаче ищут минимум линейной функции, то все неравенства системы необходимо привести к виду больше (≥).

С этой целью неравенства, где данное требование не выполняется, надо умножить на «– 1».

Алгоритм составления двойственной задачи (продолжение)

II. Составить расширенную матрицу коэффициентов прямой задачи

$$A = \left|\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hdashline c_1 & c_2 & \cdots & c_n & F_{np} \end{array}\right|$$

Алгоритм составления двойственной задачи (продолжение)

III. Составить расширенную матрицу двойственной задачи, транспонированную (замена строк столбцами с сохранением порядка) к прямой

$$A^T = \left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & c_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_m & F_{\partial в} \end{array} \right|$$

Алгоритм составления двойственной задачи (продолжение)

IV. Сформировать двойственную задачу.

- $F_{\text{пр}} \to F_{\text{дв}}, x_j \to y_i$;
- **число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений под № 2 в прямой задаче;**
- **число ограничений в системе (5) двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи;**
- **коэффициенты при неизвестных целевой функции (4) двойственной задачи являются свободными членами в системе (2) прямой задачи;**
- **правые части ограничения в (5) двойственной задаче это коэффициенты при неизвестных в целевой функции(1);**
- **Если в прямой задаче ограничения имеют знак ≥, то в двойственной задаче – ≤, и наоборот.**

Пример

Составить задачу двойственную следующей

Целевая функция $F = -x_1 + x_2 \rightarrow max$

Ограничения

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 & (1) \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 & (2) \\ x_1 - x_2 \leq 3 & (3) \\ x_1 + x_2 \geq 5 & (4) \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Пример. Решение

I. Приведём все неравенства системы ограничений к виду ≤, так как ЦФ → max. С этой целью обе части неравенств с (1) по (4) умножим на «– 1» и получим

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1 & (1) \\ -x_1 + 4x_2 \le 24 & (2) \\ x_1 - x_2 \le 3 & (3) \\ -x_1 - x_2 \le -5 & (4) \\ x_1 \ge 0;\, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Пример. Решение (продолжение)

II. Составим расширенную матрицу коэффициентов прямой задачи

$$A = \left|\begin{array}{cc:c} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ \hdashline -1 & 1 & F_{np} \end{array}\right|$$

Пример. Решение (продолжение)

III. Составим расширенную матрицу двойственной задачи транспонированную к прямой

$$A^T = \left| \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 24 & 3 & -5 & F_{дв} \end{array} \right|$$

Пример. Решение (продолжение)

IV. Сформируем двойственную задачу

Целевая функция $F_{ДВ} = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow min$

Ограничения

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ 1y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

Спасибо за внимание!