ФИЗИКА – НАУКА О ПРИРОДЕ.

СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА – НАУКА, ИЗУЧАЮЩАЯ ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИИ – ВЕЩЕСТВА И ПОЛЯ.

Первый шаг при выбранной концепции построения курса физики – *Механика* рассматривала физические модели: материальная точка и абсолютно твердое тело, не вникая во внутреннюю структуру.

Следующий шаг в познании свойств материи – *Статистическая физика* устанавливает из каких частей (атомов и молекул) состоит тело, и как эти части взаимодействуют между собой.

Поскольку атомы построены из электрически заряженных частиц (электронов и ядер), то следующий шаг в познании строения вещества – исследование электромагнитных взаимодействий.

Электричество

- Электростатика
- Постоянный ток
- Электромагнетизм

Исторический очерк. Электрические явления были известны в глубокой древности.

1) Порядка 500 лет до нашей эры Фалес Милетский обнаружил, что потертый шерстью янтарь притягивает легкие пушинки. Его дочь пыталась почистить шерстью янтарное веретено и обнаружила этот эффект.

От слова «электрон», означающий по-гречески «янтарь» и произошел термин «электричество». Термин ввел английский врач Гильберт в XVI веке. Он обнаружил, что еще ряд веществ электризуется.

2) При раскопках древнего Вавилона (4000 лет назад) обнаружены сосуды из глины, содержащие железный и медный стержни. На дне битум – изолирующий материал. Стержни разъедены лимонной или уксусной кислотой, то есть находка напоминает гальванический элемент.

3) Золотое покрытие вавилонских украшений можно объяснить только гальваническим способом их нанесения.

Электростатика – раздел физики, изучающий взаимодействие и свойства систем электрических зарядов неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

- **Электрический заряд** – мера электрических свойств тел или их составных частей.

Термин ввел Б.Франклин в 1749 г. Он же – «батарея», «конденсатор», «проводник», «заряд», «разряд», «обмотка».

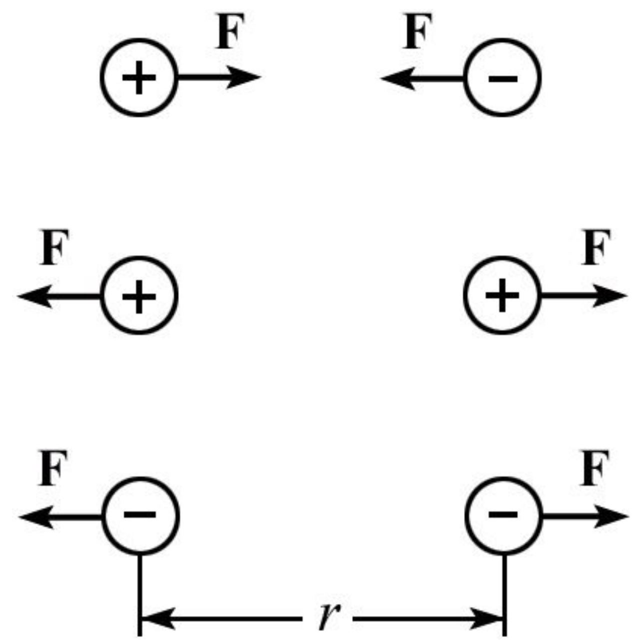
Свойства электрических зарядов

1) В природе существуют **2** ***рода электрических зарядов***:

● положительные (стекло ↕ кожа),

● отрицательные (янтарь ↕ шерсть).

● Между одноименными электрическими зарядами действуют силы отталкивания, а между разноименными – силы притяжения.



- Выбор наименований зарядов исторически случаен. Безусловный смысл имеет только различие знаков заряда. Законы не изменились бы, если бы положительные заряды переименовали в отрицательные и наоборот: законы взаимодействия зарядов симметричны к замене

  $+q$ на $-q$.

Фундаментальное свойство – наличие зарядов в двух видах – то, что заряды одного знака отталкиваются, а противоположного – притягиваются. Причина этого современной теорией не объяснена. Существует мнение, что положительные и отрицательные заряды – это противоположное проявление одного качества.

Свойства электрических зарядов

2) ***Закон сохранения заряда*** – фундаментальный закон (экспериментально подтвержден Фарадеем в 1845 г.)

Полный электрический заряд изолированной системы есть величина постоянная.

Полный электрический заряд – сумма положительных и отрицательных зарядов, составляющих систему.

Под изолированной в электрическом поле системой понимают систему, через границы которой не может пройти никакое вещество, кроме света.

В соответствии с законом сохранения заряда разноименные заряды рождаются и исчезают попарно: сколько родилось (исчезло) положительных зарядов, столько родилось (исчезло) отрицательных зарядов. Два элементарных заряда противоположных знаков в соответствии с законом сохранения заряда всегда рождаются и исчезают одновременно.

Пример: электрон и позитрон, встречаясь друг с другом, аннигилируют, рождая два или более гамма-фотонов.

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma.$$

Свет может входить и выходить из системы, не нарушая закона сохранения заряда, так как фотон не имеет заряда; при фотоэффекте возникают равные по величине положительные и отрицательные заряды, а фотон исчезает.

И наоборот, гамма-фотон, попадая в поле атомного ядра, превращается в пару частиц – электрон и позитрон.

$$\gamma \rightarrow e^{-} + e^{+}.$$

Свойства электрических зарядов

3) Электрический заряд – ***инвариант,***

его величина не зависит от выбора системы отсчета.

4) Электрический заряд – ***величина релятивистки инвариантная,***

не зависит от того движется заряд или покоится.

5) ***Квантование заряда,*** электрический заряд дискретен, его величина изменяется скачком.

Опыт Милликена (1910 – 1914 гг.)

$q = \pm n \cdot e$, где n – целое число. Заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (Кулон).

Суммарный заряд элементарных частиц, если частица им обладает, равен элементарному заряду.

- Наименьшая частица, обладающая отрицательным элементарным электрическим зарядом, – электрон, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг,
- Наименьшая частица, обладающая положительным элементарным электрическим зарядом, – позитрон, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Таким же зарядом обладает протон, входящий в состав ядра.

Равенство зарядов электрона и протона справедливо с точностью до одной части на 10^{20}. То есть фантастическая степень точности. Причина неясна.

Более точно: установлено, что элементарные частицы представляют собой комбинацию частиц с дробным зарядом – кварков, имеющих заряды

$\pm\frac{1}{3}e$ и $\pm\frac{2}{3}e$.

В свободном состоянии кварки не обнаружены.

Свойства электрических зарядов

6) Различные тела в классической физике в зависимости от концентрации свободных зарядов делятся на

- проводники (электрические заряды могут перемещаться по всему их объему),
- диэлектрики (практически отсутствуют свободные электрические заряды, содержит только связанные заряды, входящие в состав атомов и молекул),
- полупроводники (по электропроводящим свойствам занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками).

Свойства электрических зарядов

Проводники делятся на две группы:

1) проводники первого рода (металлы), в которых перенос зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями,

2) проводники второго рода (растворы солей, кислот), перенос зарядов (+ и − ионов) в них сопровождается химическими изменениями.

Свойства электрических зарядов

7) Единица электрического заряда в СИ [1 Кл] – электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

$$q = I \cdot t.$$

Закон Кулона –
основной закон электростатики

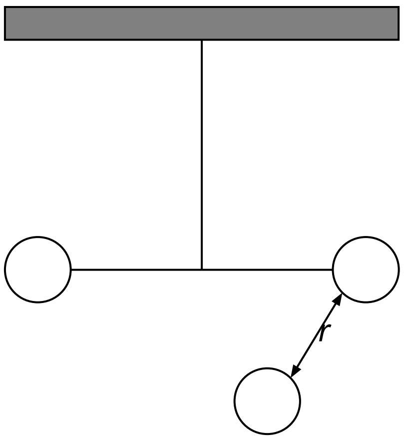
Описывает взаимодействие точечных зарядов.

- ***Точечный заряд*** *сосредоточен на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел.*

Точечный заряд, как физическая модель, играет в электростатике ту же роль, что и материальная точка и абсолютно твердое тело в механике, идеальный газ в молекулярной физике, равновесные процессы и состояния в термодинамике.

Закон впервые был открыт в 1772 г. Кавендишем.

Закон Кулона



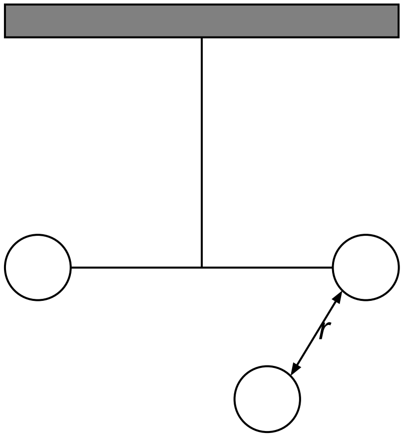
В 1785 г. Шарль Огюстен Кулон экспериментальным путем с помощью крутильных весов определил:

сила взаимодействия *F* двух неподвижных точечных зарядов пропорциональна величине каждого из зарядов q_1, q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц.

Закон Кулона



В опытах определялся вращающий момент:

$$M = \gamma\varphi = Fr.$$

Сам Кавендиш, работы которого остались неизвестными, еще в 1770 г. получил «закон Кулона» с большей точностью.

Закон Кулона

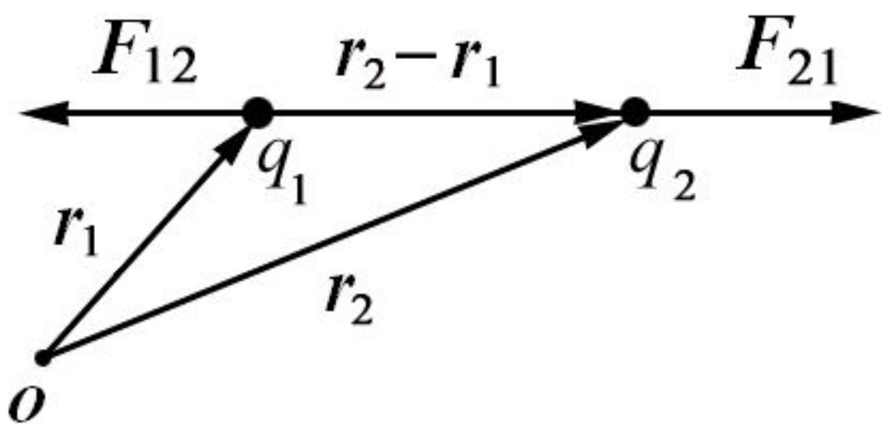
Сила $\vec{F}$ направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды.

Кулоновская сила является ***центральной силой.***

Закон Кулона в векторном виде

Сила – величина векторная.

Поэтому запишем закон Кулона в векторном виде.

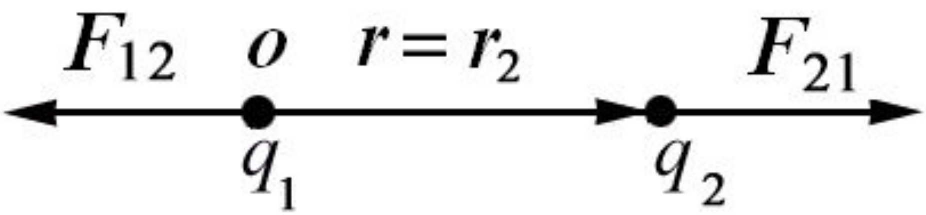


1) Для произвольно выбранного начала отсчета.

$$\vec{F}_{21} = k\,\frac{|q_1||q_2|}{(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = 1 \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Закон Кулона в векторном виде



2) Начало отсчета совпадает с одним из зарядов.

$$\vec{F}_{21} = k\frac{|q_1||q_2|}{r^3}\vec{r}$$

Закон Кулона

- Закон Кулона выполняется при расстояниях 10^{-15} м $< r < 4\cdot 10^{4}$ км.
- В системе СИ: $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^{9}$ $\left[\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}\right]$ [м / Ф].
- В системе СГС: $k = 1$.

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ $\left[\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\right]$, [Ф / м] – электрическая постоянная.

Электрическое поле.
Напряженность электрического поля

- ***Поле –*** *форма материи, обуславливающая взаимодействие частиц вещества.*
- ***Электрическое поле*** *– особая форма существования материи, посредством которого взаимодействуют электрические заряды.*
- ***Электростатическое поле*** - поле, посредством которого осуществляется кулоновское взаимодействие неподвижных электрических зарядов.

Является частным случаем электромагнитного поля.

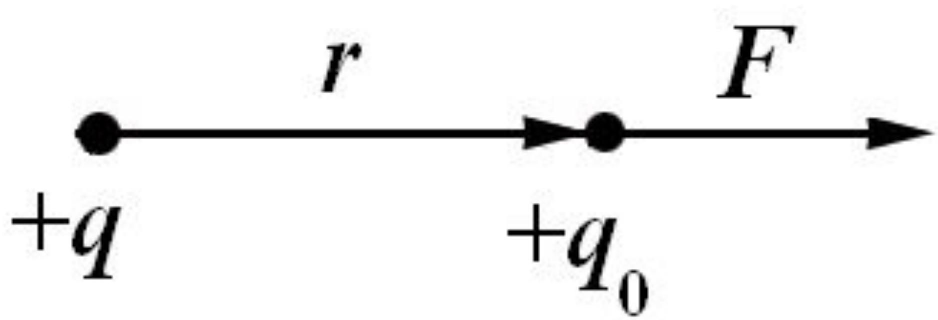
Пробный точечный положительный заряд q_0

используют для обнаружения и исследования электростатического поля.

q_0 не вызывает заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле.

Силовая характеристика электростатического поля определяет, с какой силой поле действует на единичный положительный точечный заряд q_0. Такой характеристикой является ***напряженность электростатического поля.***

Напряженность электрического поля – ***физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный точечный положительный заряд q_0, помещенный в эту точку поля.***



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{0+}},$$

q – источник поля.

q_{0+} – пробный заряд.

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{0+}}.$$

Напряженность электростатического поля в данной точке численно равна силе, действующей на единичный положительный точечный заряд, помещенный в данную точку поля.

Зная напряженность поля в какой-либо точке пространства, можно найти силу, действующую на заряд , помещенный в эту точку:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Это другой вид закона Кулона, который и вводит понятие электрического поля, создающееся зарядами во всем окружающем пространстве, а также представляет закон действия данного поля на любой заряд.

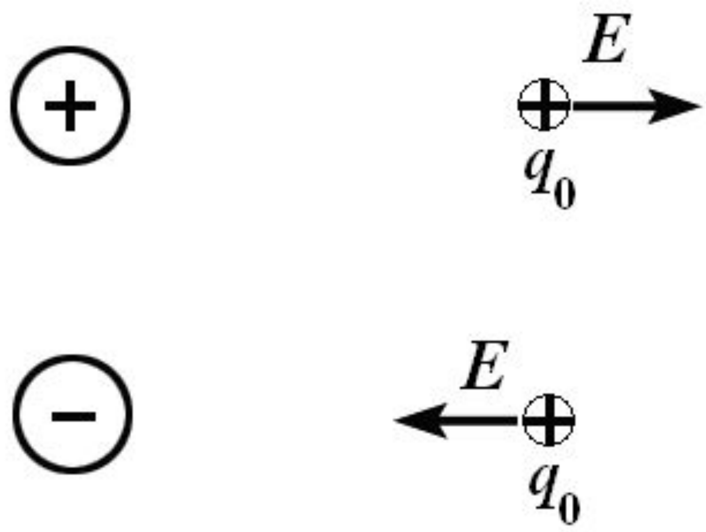
Напряженность поля точечного заряда в вакууме.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_{0+}}{r^3}\vec{r} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{0+}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

q – источник поля,

q_{0+} – пробный заряд.

Напряженность электрического поля



- ***E*** совпадает с направлением силы ***F***, действующей на пробный заряд q_{0+} .
- Поле создается положительным зарядом – вектор напряженности электрического поля ***E*** направлен от заряда.
- Поле создается отрицательным зарядом – вектор напряженности электрического поля ***E*** направлен к заряду.

Напряженность электрического поля

- СИ: $\boldsymbol{E}$ измеряется в [1 Н /Кл = 1 В/м] – это напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой 1 Н.

Принцип суперпозиции напряженности электрического поля

Опытно установлено, что взаимодействие двух зарядов не зависит от присутствия других зарядов.

В соответствии с принципом независимости действия сил: на пробный заряд, помещенный в некоторую точку, будет действовать сила ***F*** со стороны всех зарядов q_i, равная векторной сумме сил $\boldsymbol{F_i}$, действующих на него со стороны каждого из зарядов.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Принцип суперпозиции напряженности электрического поля

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= q_0\vec{E} \\ \vec{F}_i &= q_0\vec{E}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q_0\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} q_0\vec{E}_i, \qquad \vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

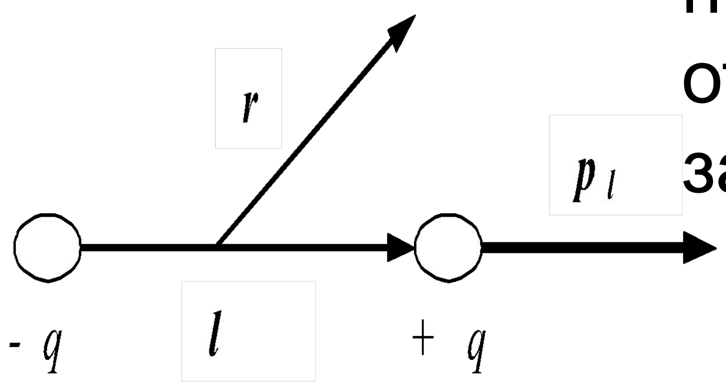
Напряженность электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в данной точке, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов в отдельности.

Первый способ определения напряженности электрического поля *E* – с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции.

Поле электрического диполя

Поле электрического диполя

- ***Электрический диполь*** **-** система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние *l* между которыми значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле.
- ***Ось диполя*** прямая, проходящая через оба заряда.

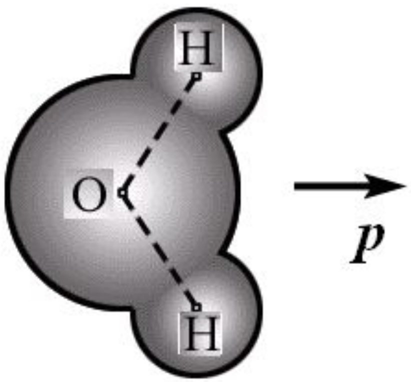


l – **плечо диполя** – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному.

Дипольный момент:

$$\vec{p}_l = q\vec{l}$$

Поле электрического диполя

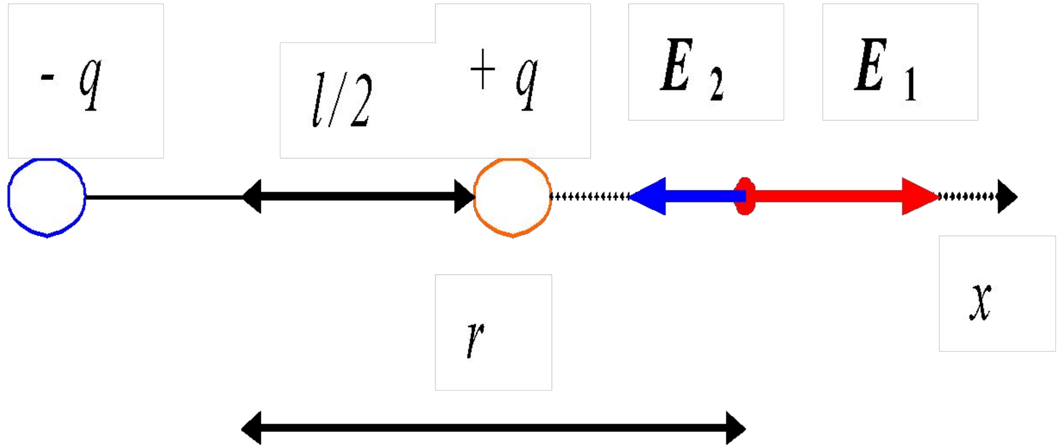


$r >> l$ $\rightarrow$ Диполь можно рассматривать как систему 2-х точечных зарядов.

Молекула воды H_2O обладает дипольным моментом $p = 6{,}3 \cdot 10^{-30}$ Кл $\cdot$ м.

Вектор дипольного момента направлен от центра иона кислорода O^{2-} к середине прямой, соединяющей центры ионов водорода H^+.

Напряженность поля в точке, расположенной на оси диполя.



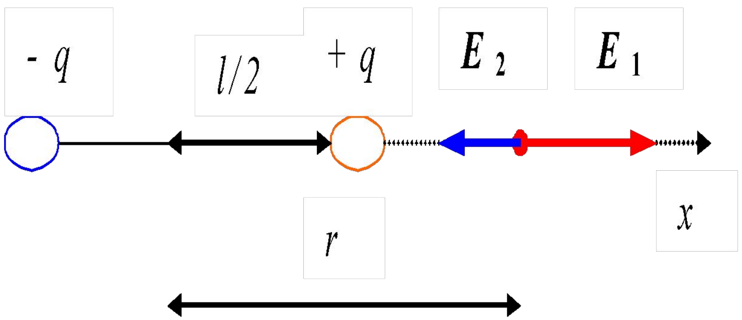
E_1 – напряженность поля положительного заряда.

E_2 – напряженность поля отрицательного заряда.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

В проекциях на ось x: $E = E_1 - E_2$

Напряженность поля в точке, расположенной на оси диполя.



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(r+\frac{l}{2})^2-(r-\frac{l}{2})^2}{(r-\frac{l}{2})^2\cdot(r+\frac{l}{2})^2} =$$

$$r >> l \Rightarrow (r-\frac{l}{2}) \approx r, \qquad (r+\frac{l}{2}) \approx r.$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl}{r^4} = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

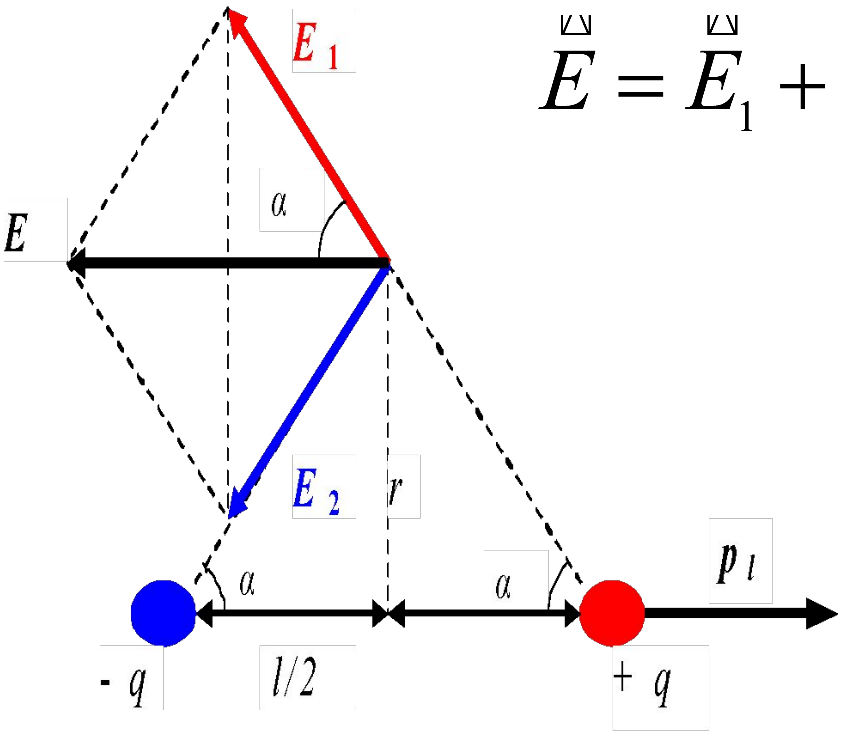
$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Напряженность поля в точке, расположенной на оси диполя.

$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Поле диполя убывает быстрее в зависимости от расстояния по сравнению с полем точечного заряда.

Напряженность поля диполя в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном к его середине



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 (1) \qquad \vec{E} \uparrow\downarrow \vec{p}_l (2)$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r^2 + \frac{l^2}{4})} (3)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r^2 + \frac{l^2}{4})} (4)$$

$$E = E_1 \cos\alpha + E_2 \cos\alpha = 2E_1 \cos\alpha (5)$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}, (6)$$

Напряженность поля диполя в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном к его середине

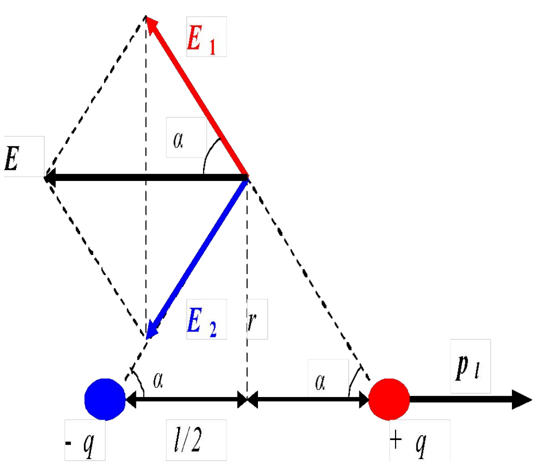
Уравнения (3),(4), (6)→(5):

$$E = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r^2+\frac{l^2}{4})}\cdot\frac{l}{2\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$r >> l \Rightarrow \frac{l^2}{4} \approx 0$$

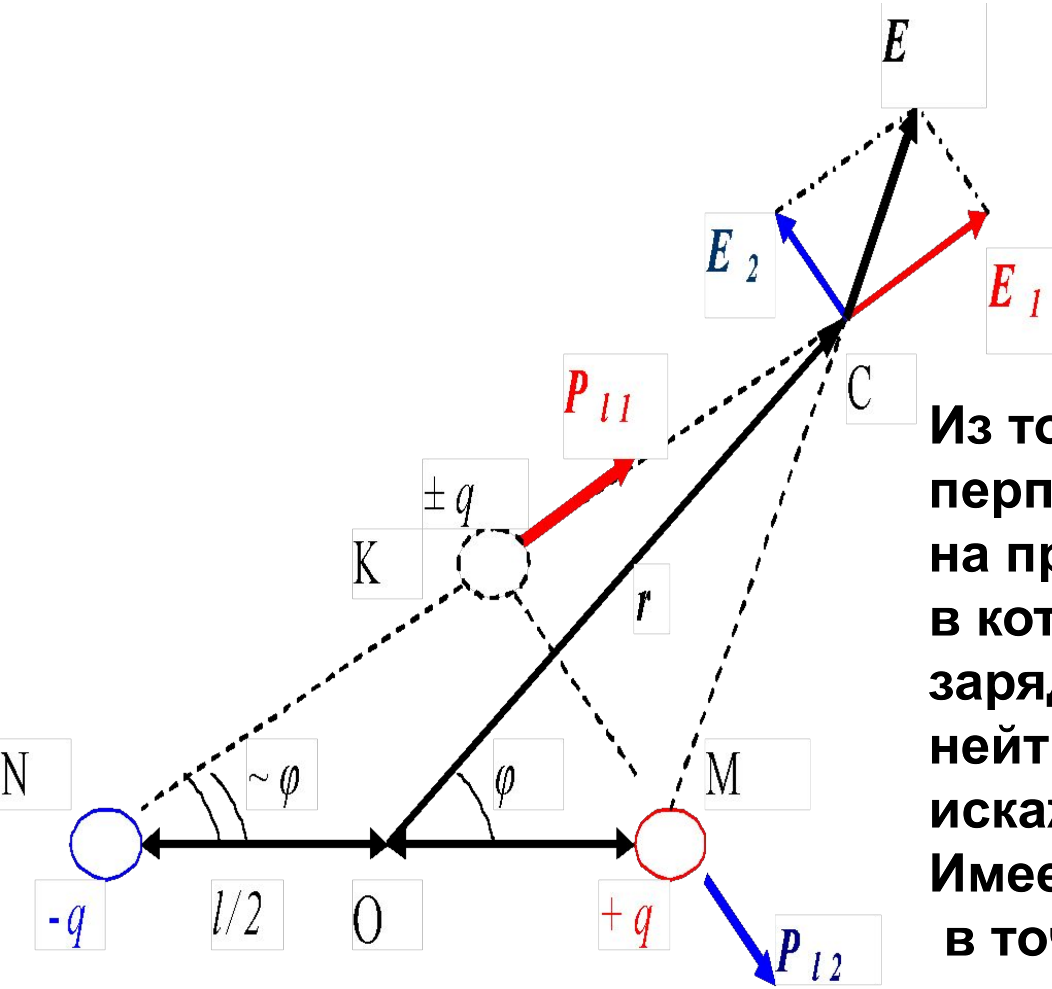
$$\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{p}_l$$

$$\vec{p}_l = q\vec{l}$$



$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

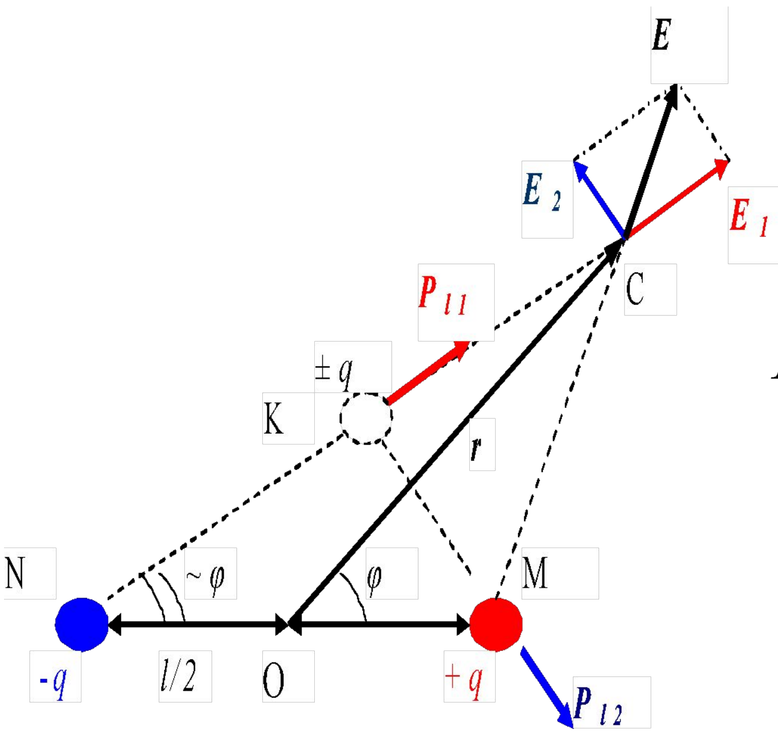
Напряженность поля диполя в произвольной точке С, лежащей на расстоянии *r* от середины диполя О.



Из точки М опускаем перпендикуляр на прямую NC, получаем точку К, в которую помещаем два точечных заряда + *q* и – *q*. Эти заряды нейтрализуют друг друга и не искажают поле диполя.

Имеем 4 заряда, расположенных в точках M, N, K, которые можно рассматривать как два диполя: NK и MK.

Напряженность поля диполя в произвольной точке С, лежащей на расстоянии *r* от середины диполя О.



$$l << r \rightarrow \text{Угол CNM} \approx \varphi \rightarrow$$

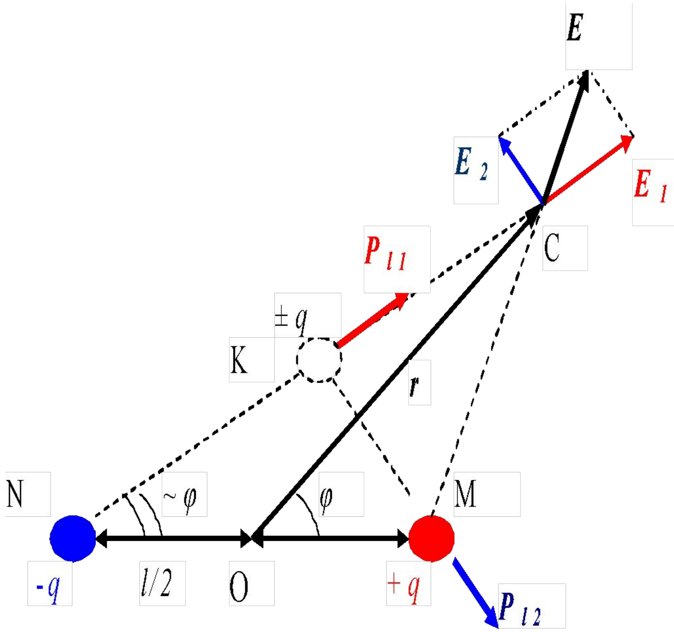
- Электрический момент диполя NK:

$$p_{l1} = q\left|NK\right| = ql\cos\varphi = p_l\cos\varphi (1)$$

- Электрический момент диполя MK:

$$p_{l2} = q\left|KM\right| = ql\sin\varphi = p_l\sin\varphi (2)$$

$$\vec{p}_{l1} \perp \vec{p}_{l2}$$



Для диполя NK точка С лежит на его оси

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\vec{p}_{l1}}{r^3} \quad (3)$$

Для диполя МК точка С лежит на перпендикуляре

$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}_{l2}}{r^3} \quad (4)$$

$$\vec{p}_{l1} \perp \vec{p}_{l2} \Rightarrow \vec{E}_1 \perp \vec{E}_2 \Rightarrow$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \sqrt{(2p_{l1})^2 + p_{l2}{}^2}$$

Уравнения (1), (2) → (5):

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{4 p_l^2 \cos^2 \varphi + p_l^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{p_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{p_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}$$

В предельных случаях:

а) если , $\varphi = 0^0$ то есть точка лежит на оси диполя, то получим

$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

б) если , $\varphi = 90^0$ то есть точка лежит на перпендикуляре к оси диполя, то получим

$$E = \frac{p_l}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

Хотя электрический заряд дискретен, число его носителей в макроскопических телах столь велико, что можно ввести понятие плотности заряда, использовав представление о непрерывном «размазанном» распределении заряда в пространстве.

- Линейная

плотность заряда:

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \left[\frac{Кл}{м} \right]$$

заряд, приходящийся на единицу длины.

- Поверхностная

плотность заряда:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \left[\frac{Кл}{м^2} \right]$$

заряд, приходящийся на единицу площади.

- Объемная

плотность заряда:

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \left[\frac{Кл}{м^3} \right]$$

заряд, приходящийся на единицу объема.

Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

Поле

$$dq = \tau \cdot dl \qquad dE = k\frac{\tau \cdot dl}{r^2} \qquad E = \int_l k\frac{\tau \cdot dl}{r^2}$$

$$dq = \sigma \cdot dS \qquad dE = k\frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \qquad E = \int_S k\frac{\sigma \cdot dS}{r^2}$$

$$dq = \rho \cdot dV \qquad dE = k\frac{\rho \cdot dV}{r^2} \qquad E = \int_V k\frac{\rho \cdot dV}{r^2}$$

Напряженность и потенциал

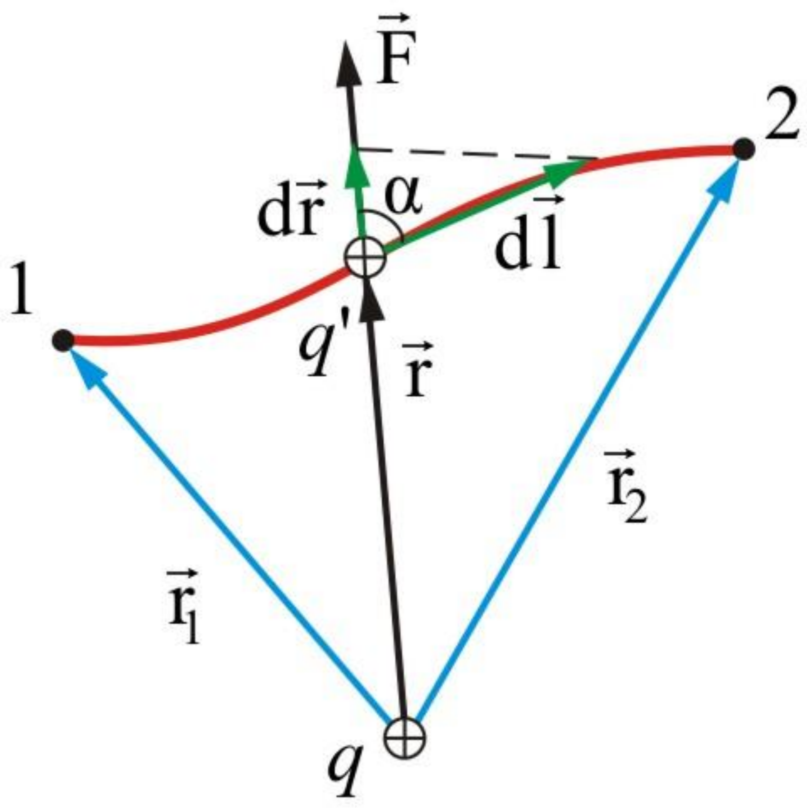
- В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через ***электростатическое поле***. Описание электростатического поля мы рассматривали с помощью ***вектора напряженности*** $\vec{E}$, равного силе, действующей в данной точке на помещенный в неё пробный единичный положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

- *Существует и другой способ описания поля – с помощью* ***потенциала****.*
- Однако для этого необходимо сначала *доказать*, что ***силы*** электростатического поля ***консервативны***, а само *поле* ***потенциально***.

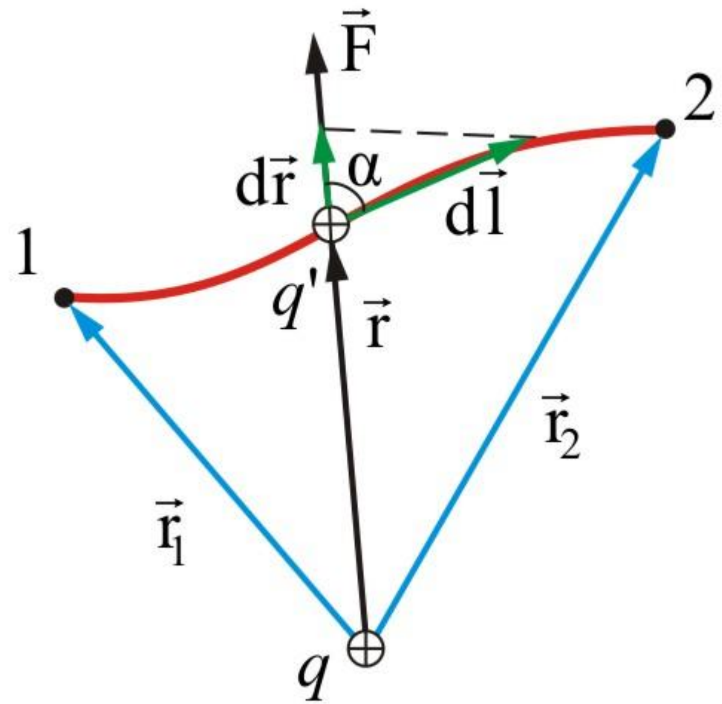
Работа сил электростатического поля.

- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q.
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила F



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

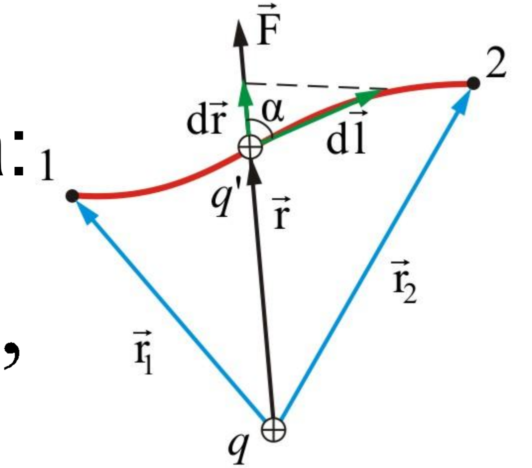
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$



- где $F(r)$ – модуль вектора силы , $\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, определяющий положение заряда q относительно q', ε_0 – электрическая постоянная.

- Для того, чтобы доказать, что *электростатическое поле потенциально*, нужно доказать, что *силы электростатического поля консервативны.*
- Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек*.

- Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом *q* по перемещению заряда *q'* из точки 1 в точку 2.
- Работа на отрезке пути d*l* равна:

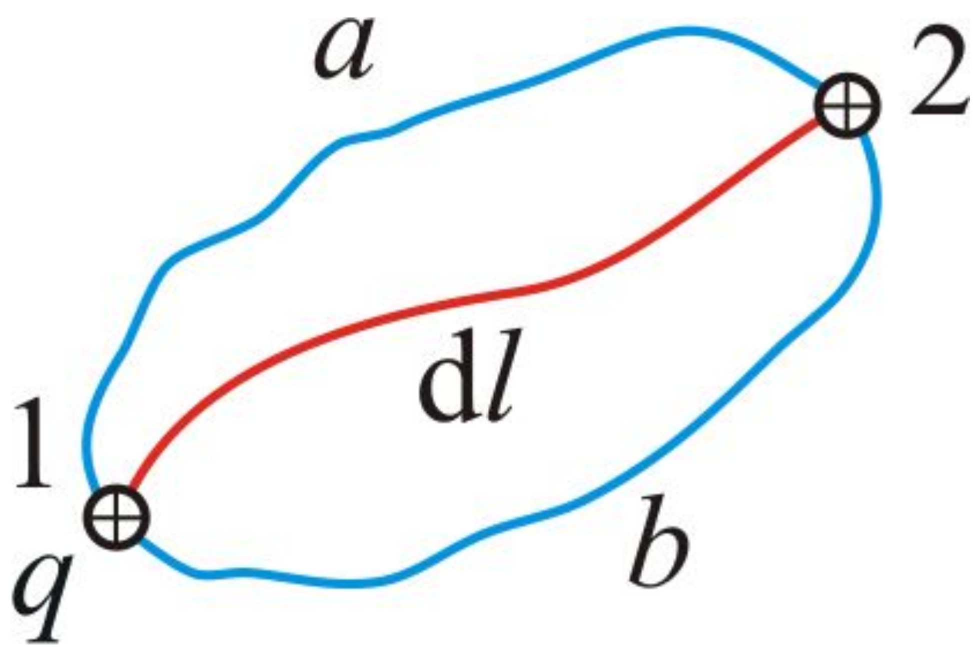


- $$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha,$$
-
- где d*r* – приращение радиус-вектора при перемещении на d*l*; $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha,$
- $$\mathrm{d}A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r.$$

- Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:
- $$A_{12}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

- ***Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения.*** *Следовательно, силы поля* ***консервативны****, а само поле –* ***потенциально.***

- Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд *q*, то элементарная работа сил поля будет равна:
- $$\mathrm{d}A = q\vec{\mathrm{E}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}.$$



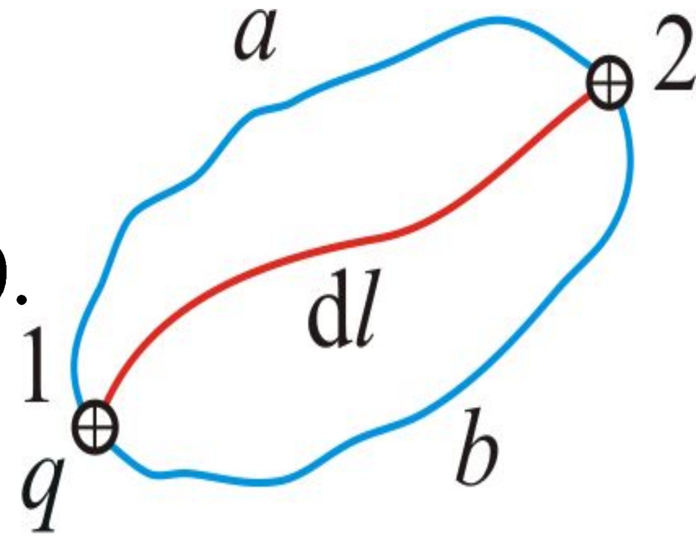
- Тогда вся работа равна: $$A = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$
-
- Такой интеграл по замкнутому контуру называется ***циркуляцией вектора*** $\vec{E}$
- Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по *произвольному замкнутому пути*:
- $$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$
- ***теорема о циркуляции*** *вектора* $\vec{E}$.

- Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части: 1*a*2 и 2*b*1. Из сказанного выше следует, что

$$\int_1^2 E\,\mathrm{d}l = -\int_2^1 E\,\mathrm{d}l.$$

- (Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q\oint \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = q\int_1^2 \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} - q\int_2^1 \vec{\mathrm{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = 0.$$



- Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.
- Рассмотрим простой пример, подтверждающий это заключение.
- *1)Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В самом деле, если это не так, и какая-то линия $\vec{E}$ – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора* : $\vec{E}$. $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$
- А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора $\vec{E}$ не равна нулю.

Работа и потенциальная энергия

- Мы сделали важное заключение, что ***электростатическое поле потенциально.***
- Следовательно, можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – ***потенциальную энергию***.

- Исходя из принципа суперпозиции сил ,

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$$

- можно показать, что общая работа *A* будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k .$$

- *Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма*.

- ***Работу***

через убыль потенциальной энергии – разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Это выражение для работы можно переписать в виде:

- $$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

- Сопоставляя формулу (3.2.2) и (3.2.3), получаем ***выражение для потенциальной энергии*** заряда *q'* в поле заряда *q*:

- $$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$$

Потенциал. Разность потенциалов

- Разные пробные заряды $q', q'', \ldots$ будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями W', W'' и так далее. Однако отношение $W / q'_{\text{пр.}}$ будет для всех зарядов одним и тем же.
- *Поэтому можно вести* ***скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой поля – потенциал**:*
- $$\varphi = \frac{W}{q'}.$$

$$\varphi = \frac{W}{q'}.$$

- *Из этого выражения следует, что* ***потенциал***

- Подставив в выражение для потенциала значение потенциальной энергии, получим выражение для ***потенциала точечного заряда***:
- $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$
- Потенциал, как и потенциальная энергия, определяют с точностью до постоянной интегрирования.

- физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что ***потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю***.
- Когда говорят «потенциал такой-то точки» – имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность*.

- Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\varphi$$

- *т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность*
- (*или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля*).
- При этом $\varphi > 0$, если $q > 0$.

- Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k q'}{r_k}.$$

- Тогда и для потенциала $\varphi = \sum_k \varphi_k$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{r_k}$$

- *т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*
- *А вот напряженности складываются при наложении полей – векторно.*

- Выразим работу сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:
- $$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$
- Таким образом, работа над зарядом *q* равна произведению заряда на убыль потенциала:
- $$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$
- где *U – напряжение*.

$$A = qU$$

- Формулу $A_{\infty} = q\varphi$ можно использовать для установления единиц потенциала:

  за единицу φ принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.

- В СИ единица потенциала $1\,\text{В} = 1\,\text{Дж}/1\,\text{Кл}$

Электрон - вольт (эВ) – *это* ,
совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона ***при***

1 В, то есть:

$$1\ эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл \cdot В = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Дж.$$

Производными единицами эВ являются МэВ, ГэВ и ТэВ:

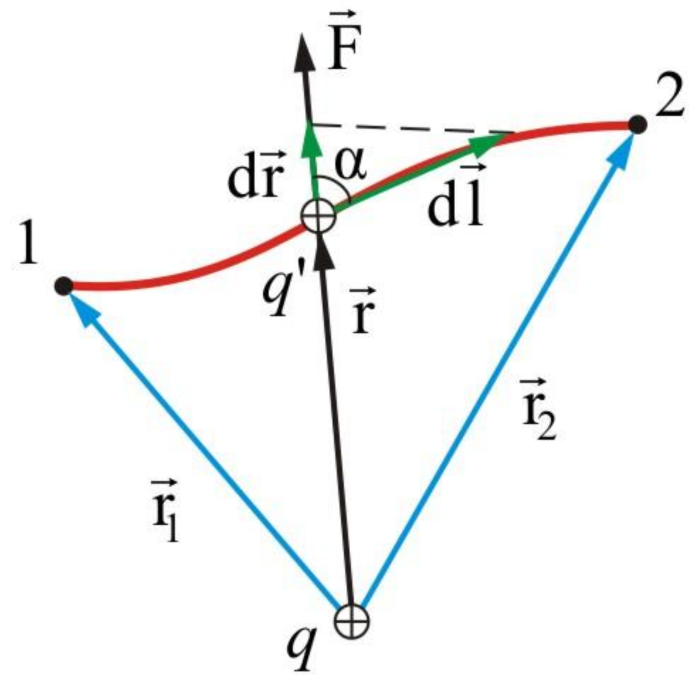
$$1\ МэВ = 10^{6}\ эВ = 1{,}60 \cdot 10^{-13}\ Дж,$$

$$1\ ГэВ = 10^{9}\ эВ = 1{,}60 \cdot 10^{-10}\ Дж,$$

$$1\ ТэВ = 10^{12}\ эВ = 1{,}60 \cdot 10^{-7}\ Дж.$$

Связь между напряженностью и потенциалом

- Изобразим перемещение заряда *q*` по произвольному пути *l* в электростатическом поле .



- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке $d\vec{l}$ можно найти так:
- $$\mathrm{d}A = F_l \mathrm{d}l = E_l q \mathrm{d}l,$$

$$\mathrm{d}A = F_l \mathrm{d}l = E_l q \mathrm{d}l,$$

- С другой стороны, эта работа, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии d*l*:
-
$$\mathrm{d}A = -q\mathrm{d}\varphi; \quad \textit{тогда}$$
-
$$E_l q \mathrm{d}l = -q\mathrm{d}\varphi$$

- отсюда $$E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}.$$

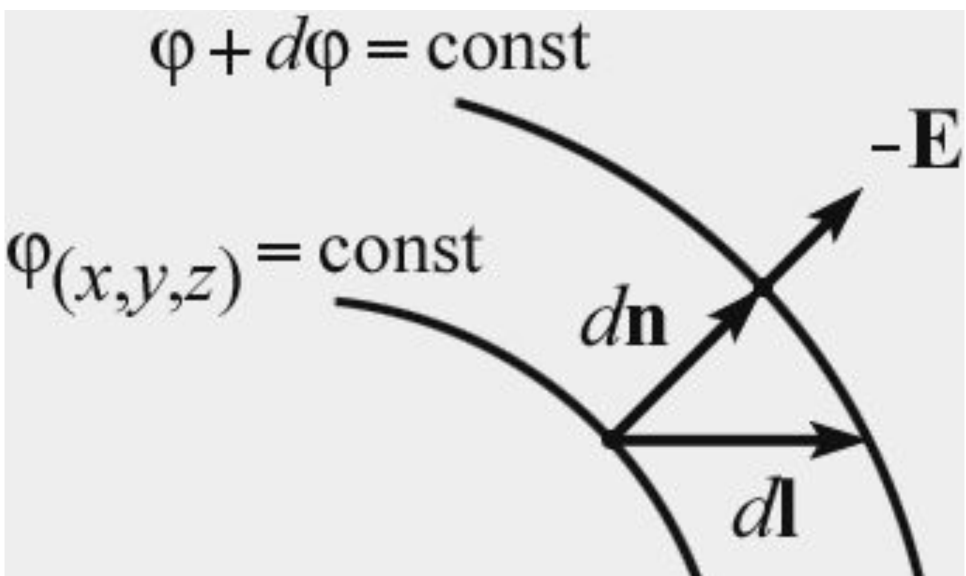
- Для ориентации d*l* (направление перемещения) в пространстве, надо знать проекции на оси координат:
-
- $$\mathrm{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$
- Определение градиента: ***сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции***
- $$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$
- $\operatorname{grad}\varphi$ ***– вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.***

- Коротко связь между $\vec{E}$ и φ записывается так:
- $$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad (3.4.4)$$
- или так:
- $$\vec{E} = -\nabla\varphi \qquad (3.4.5)$$
- где ∇ (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона
- Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

Вектор напряженности электрического поля E направлен против направления наискорейшего роста потенциала:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{n}$$

n – единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности ϕ = const



Безвихревой характер электростатического поля

- Из условия $\vec{E} = -\nabla\varphi$ следует одно важное соотношение, а именно, ***величина, векторного произведения*** $[\nabla, \vec{E}]$ ***для стационарных электрических полей всегда равна нулю***. Действительно, по определению, имеем
- $$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0,$$
- поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

- *Величина* $[\nabla, \vec{E}]$ *называется* ***ротором*** *или* ***вихрем***

- Мы получаем ***важнейшее уравнение электростатики***:

- (3.5.1)

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

электростатическое поле – безвихревое.

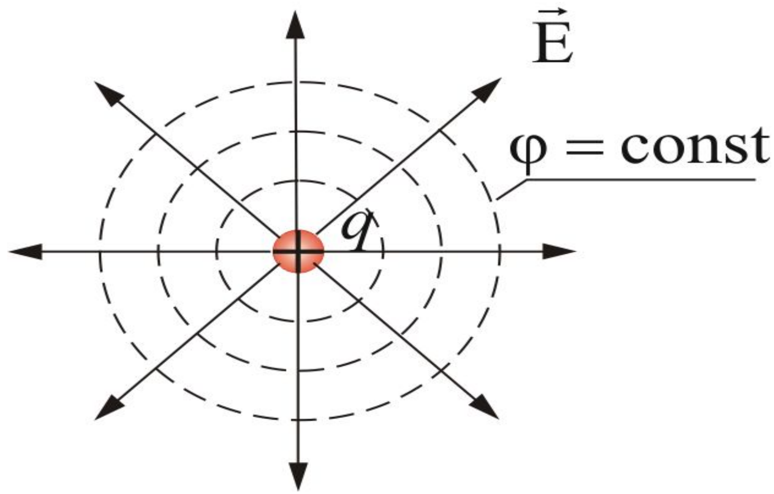
- Согласно теореме Стокса, присутствует следующая связь между контурным и поверхностным интегралами:
- $$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_S \mathrm{rot}\vec{E} d\vec{S} = 0$$
- где контур L ограничивающий поверхность S ориентация которой определяется направлением вектора положительной нормали $\vec{n}$: $d\vec{S} = \vec{n} dS$
- Поэтому ***работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.***

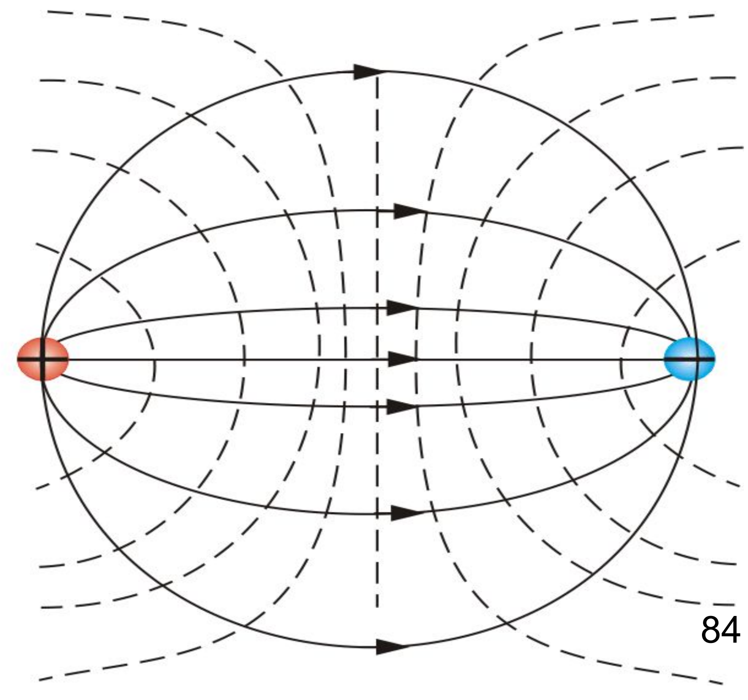
3.6. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

- Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением $\vec{E}$.
- *Отсюда следует, что* ***напряженность равна разности потенциалов U на единицу длины силовой линии***.
- Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить φ между двумя точками, измеряя *U* между ними, причем тем точнее, чем ближе точки.
- ***В однородном электрическом поле*** силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить $\vec{E}$ наиболее просто:
- (3.6.1)

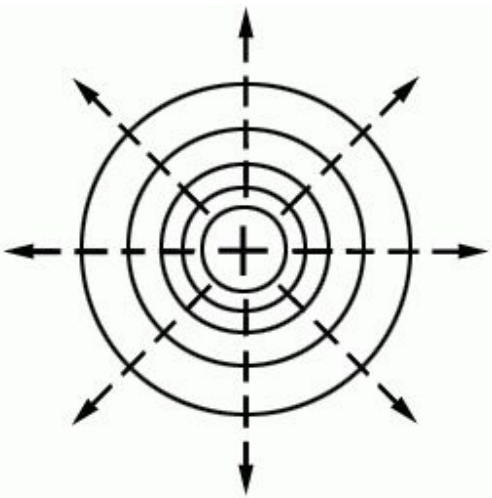
$$E = \frac{U}{l}$$

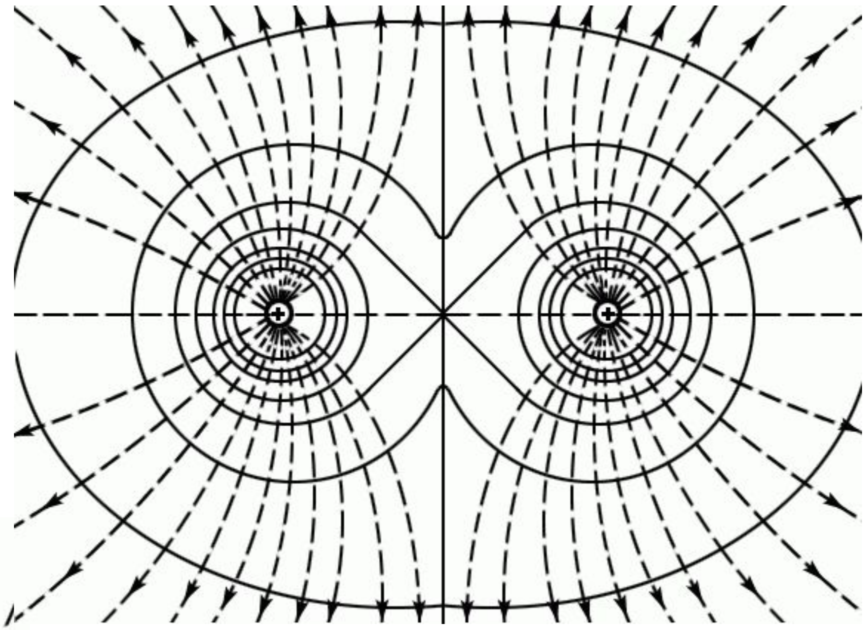
- Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной поверхностью**.
- Уравнение этой поверхности
- $$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (3.6.2)$$

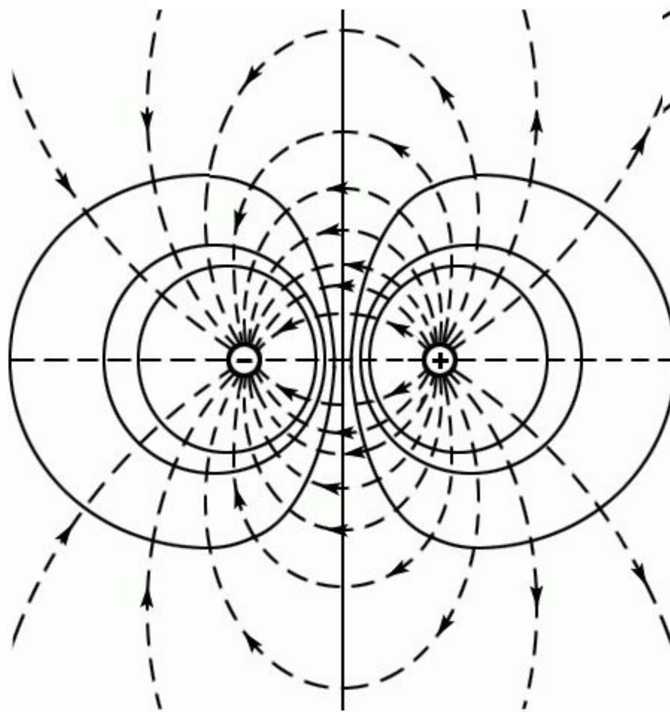




Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны







- Формула $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.

- Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям $\vec{E}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

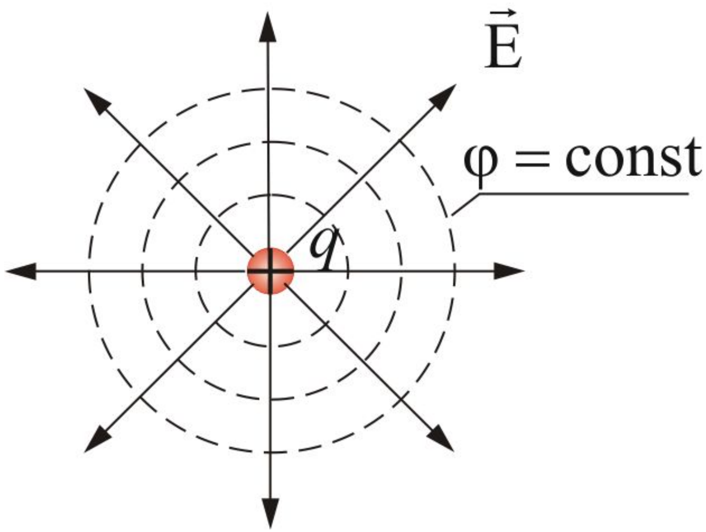
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

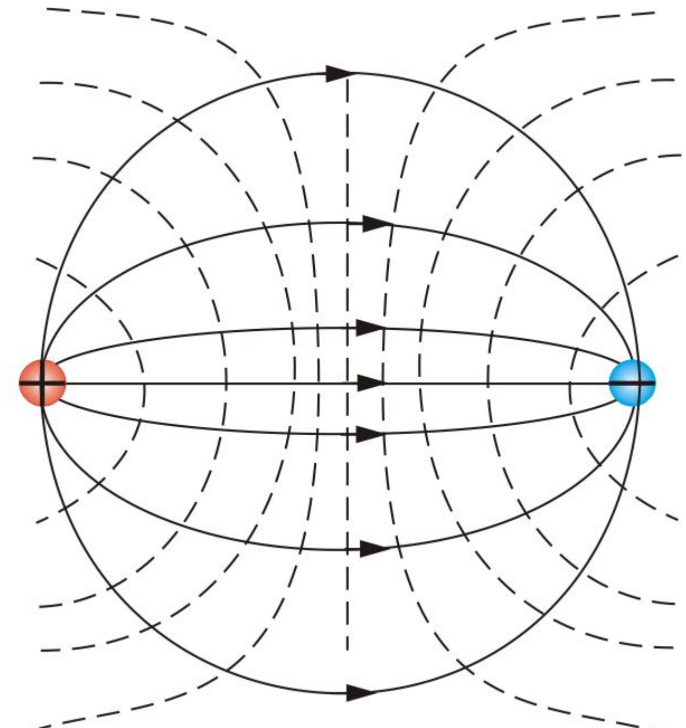
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

- Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути.
- Для обхода по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ получим: $$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$
- т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

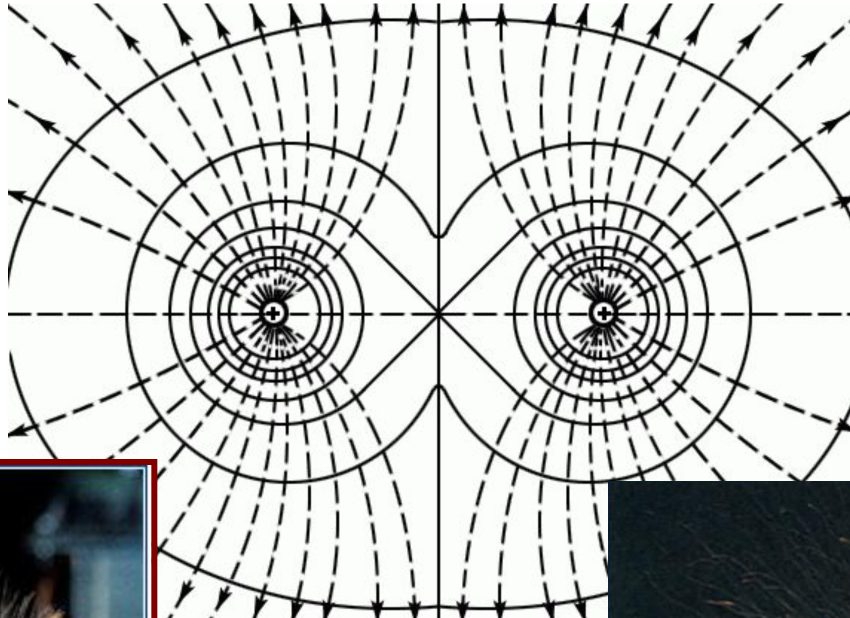
Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

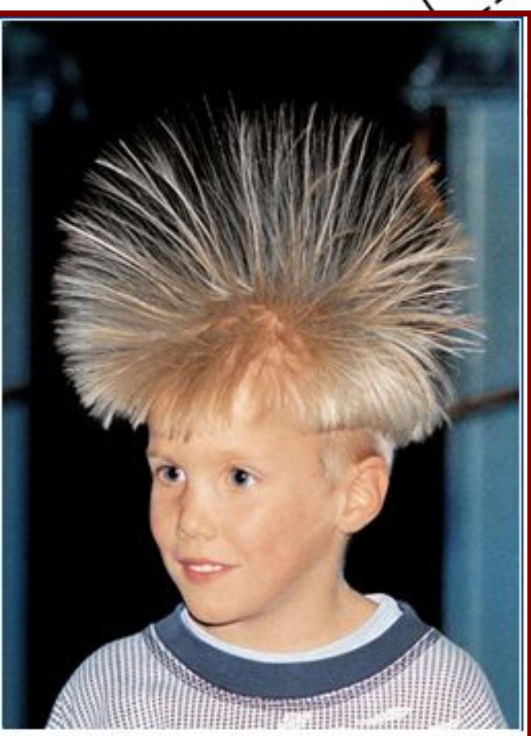
- *Из обращения в нуль циркуляции вектора следует, что линии электростатического поля* ***не могут быть замкнутыми****: они* *начинаются на положительных зарядах (****истоки****) и на отрицательных зарядах заканчиваются (****стоки****) или уходят в бесконечность*





Там, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало, напряженность поля наибольшая. Наибольшее электрическое поле в воздухе при атмосферном давлении достигает около 10^6 В/м.

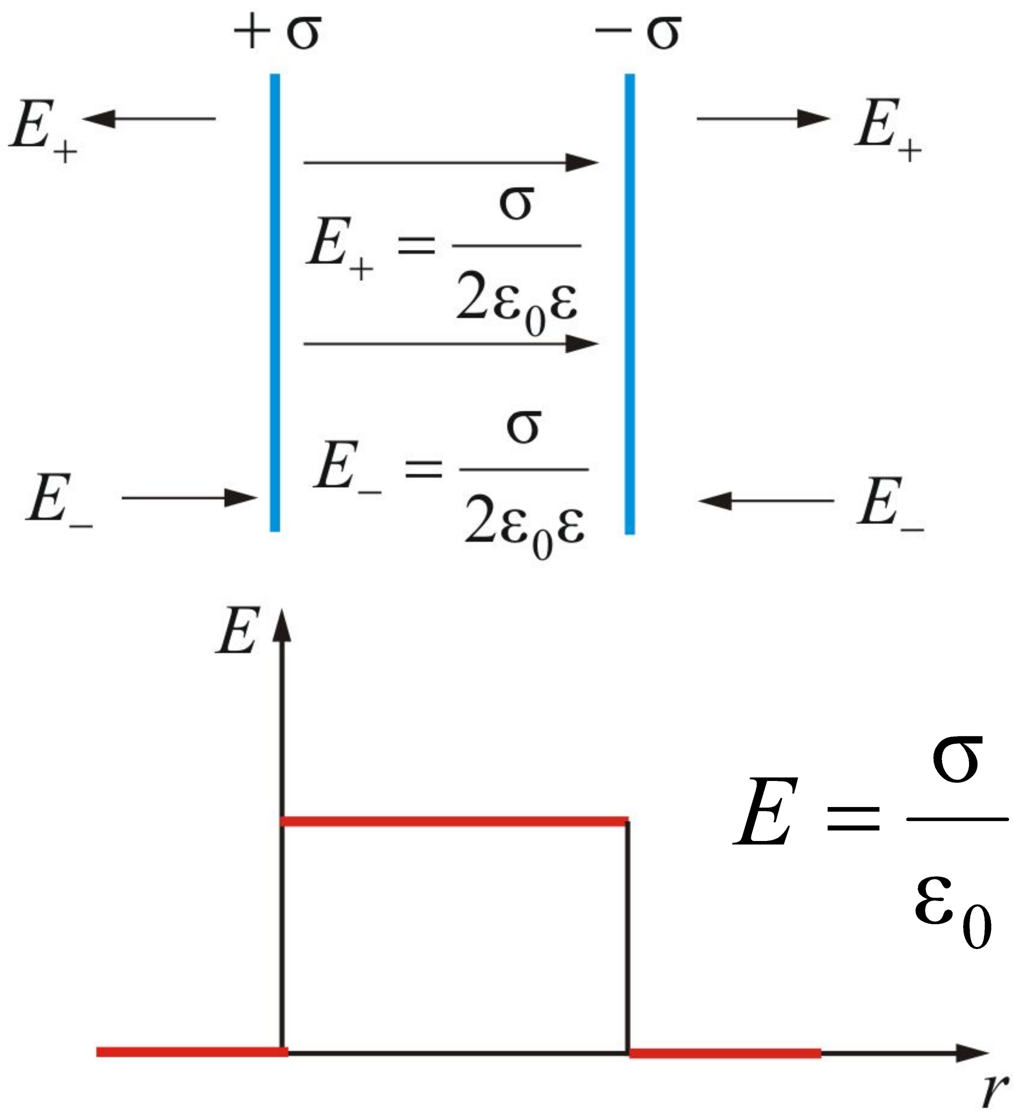




3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

- Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами

3.7.1. Разность потенциалов между двумя бесконечными заряженными плоскостями



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Мы показали, что напряженность связана с потенциалом
- $$E = -\frac{d\varphi}{dl},$$ отсюда $$d\varphi = -E\,dl$$
-

- где $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями
- σ = *q*/*S* – поверхностная плотность заряда.

- Чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение $\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}l$

$$\int_1^2 \mathrm{d}\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x;$$

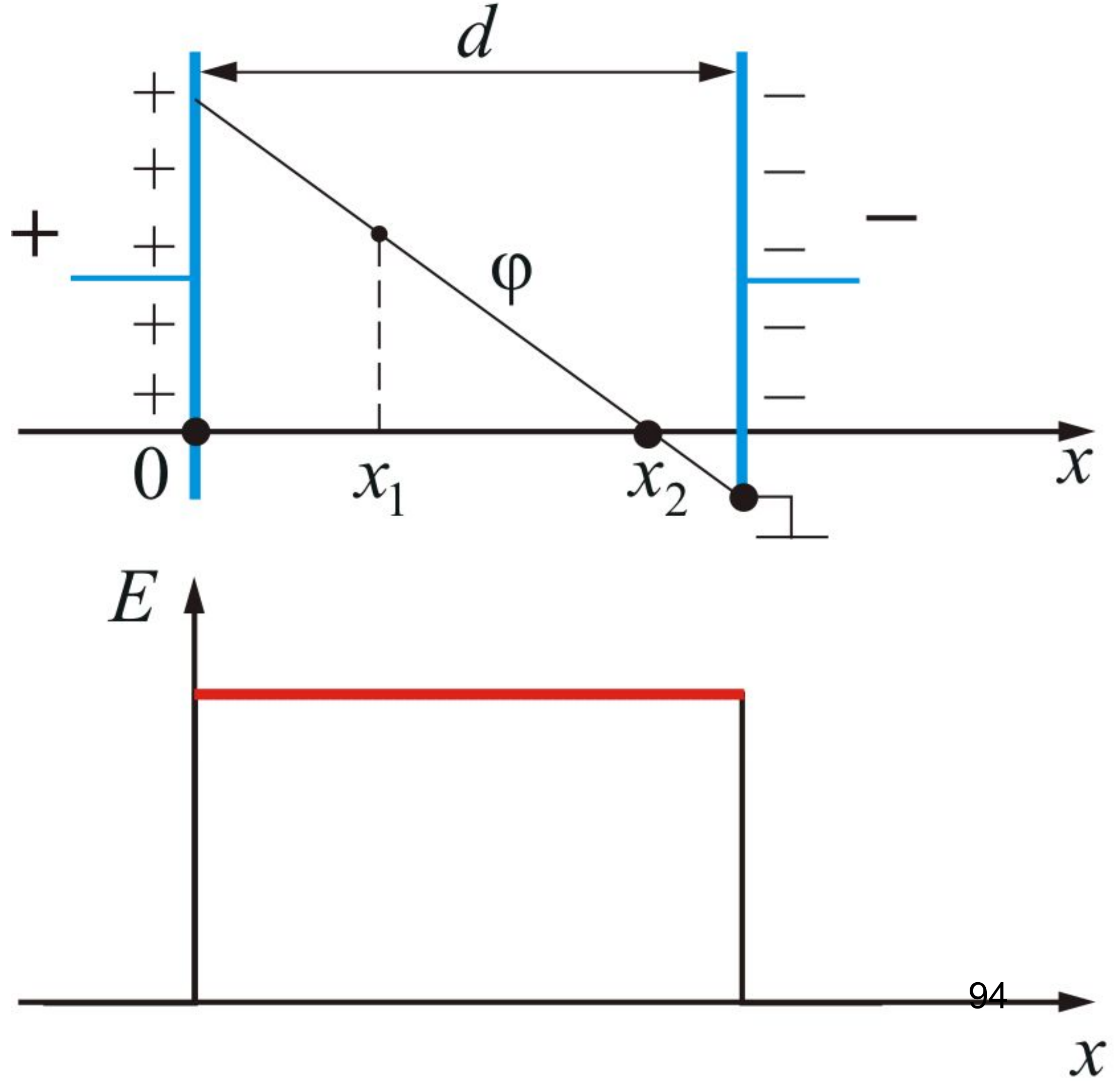
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$

При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \qquad (3.7.3)$$

- На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

3.7.2. Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

- С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases}$$

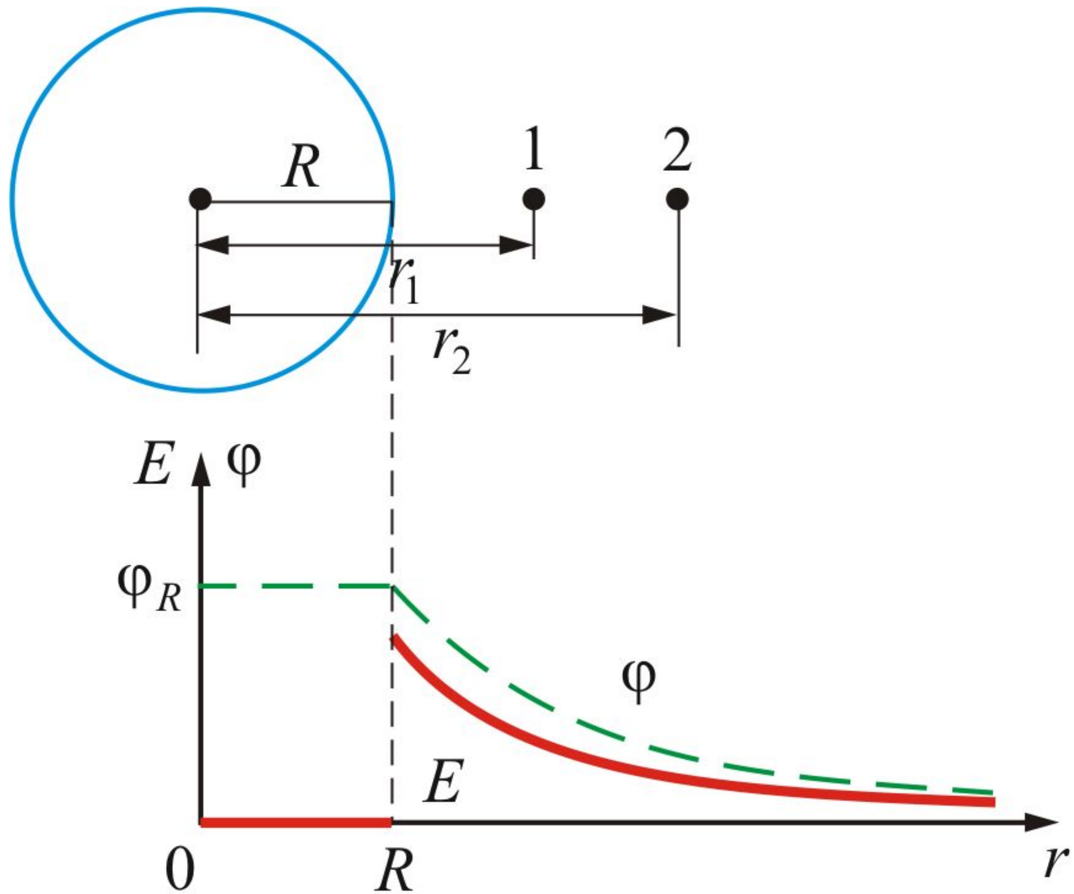
- Тогда,т.к. $$\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}r; \qquad \int_1^2 \mathrm{d}\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

- отсюда следует, что разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

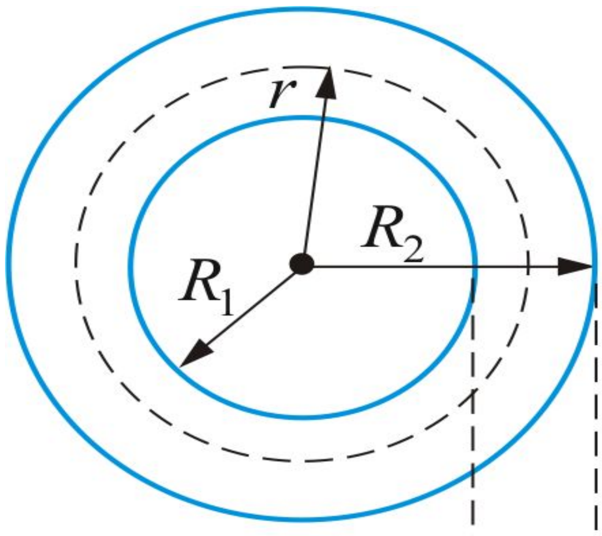
$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = \mathrm{const} - \text{внутри и на поверхност} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} \ - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхн} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{r}{R} \ - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$



3.7.3. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора



$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне больш} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, ког} \end{cases}$$

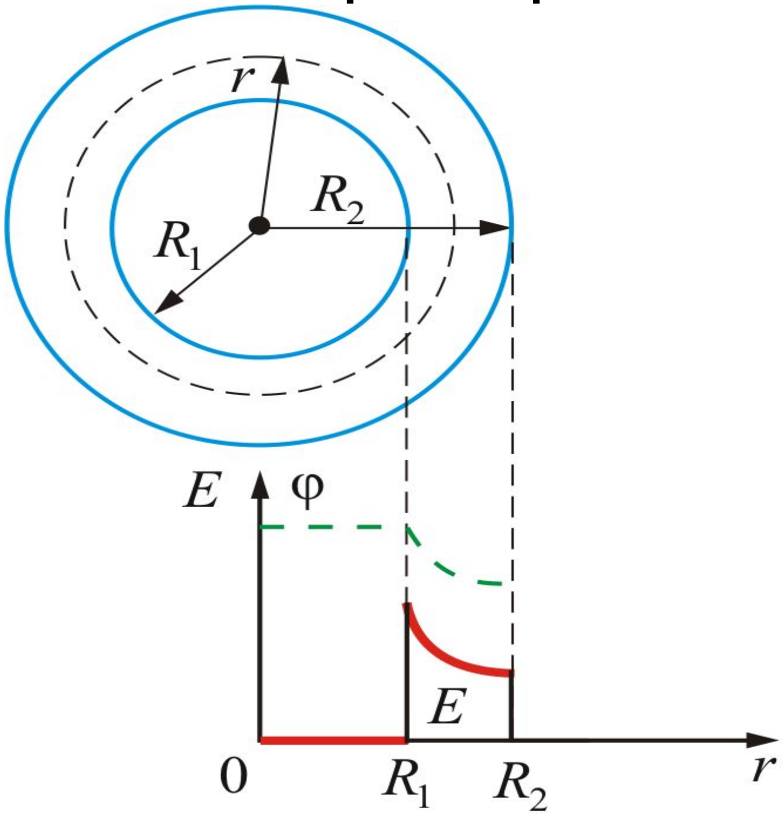
- Т.к. $\mathrm{d}\varphi = -E\,\mathrm{d}r$, то

- $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

-

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цили} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R \\ 0 \;-\; \text{вне цилиндров.} \end{cases}$$

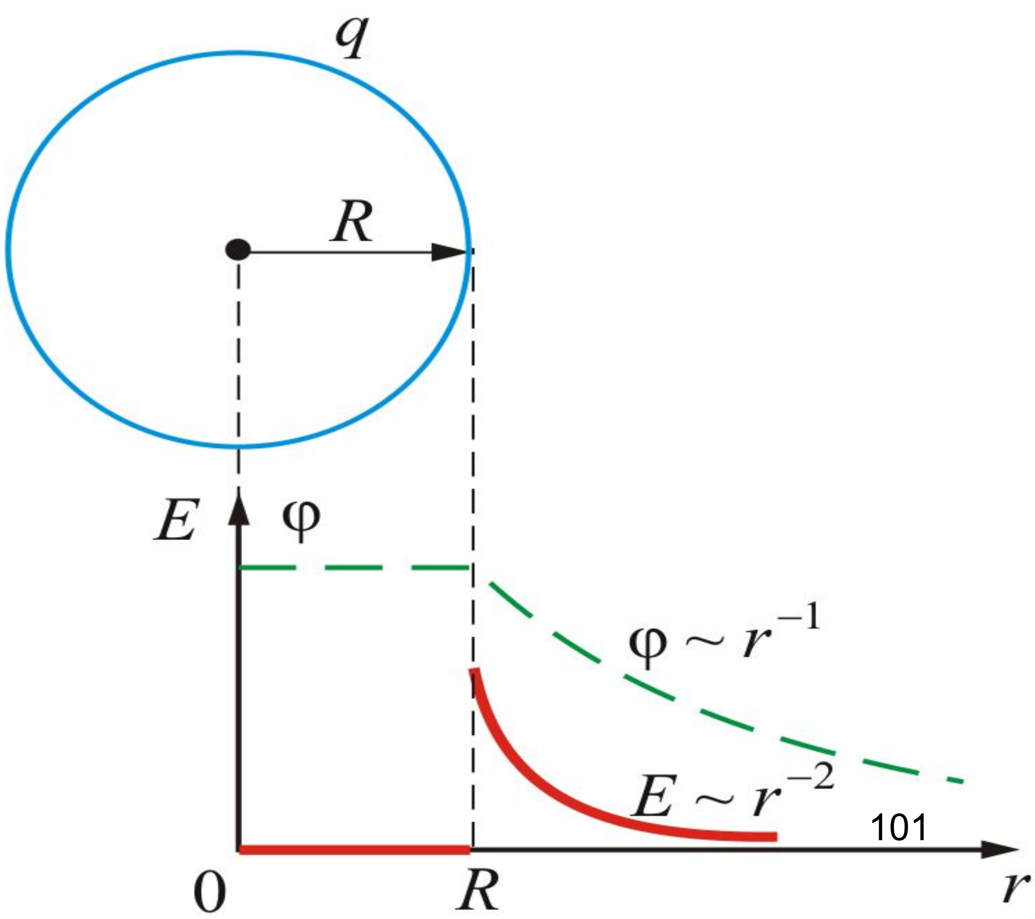
- Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем , $E = 0$, $\varphi = \text{const}$;
- между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,
- вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю.



3.7.4. Разность потенциалов заряженной сферы (пустотелой)

- Напряженность поля сферы определяется формулой

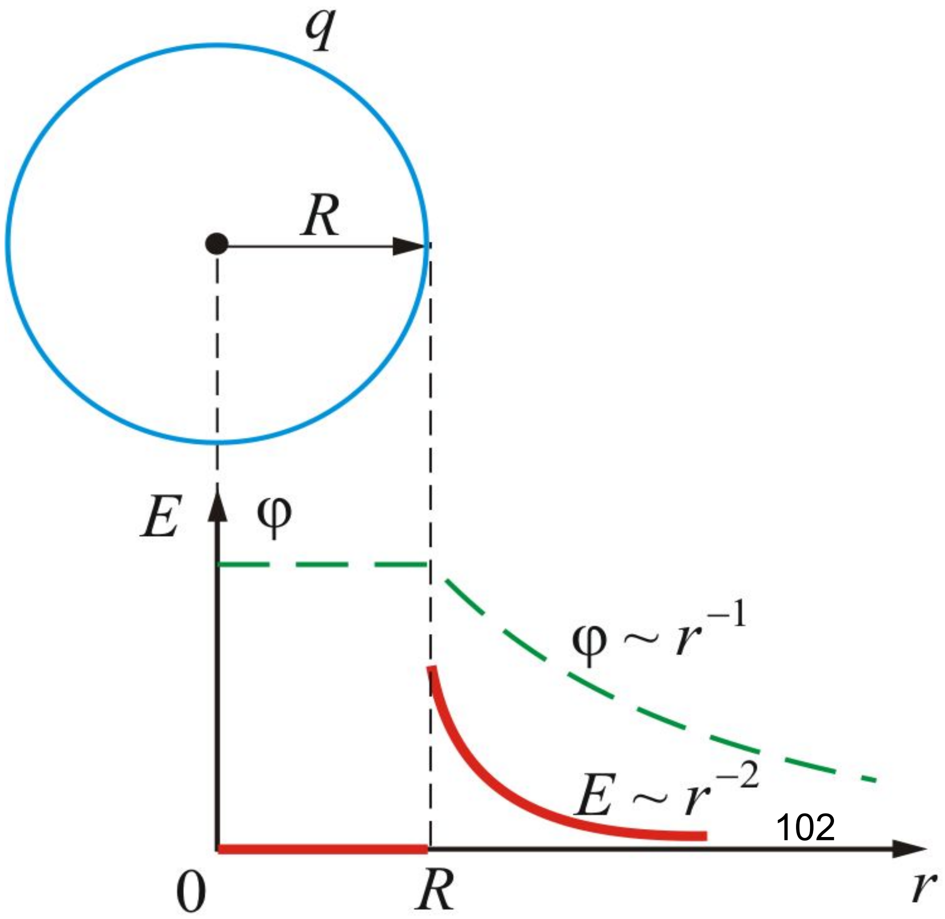
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



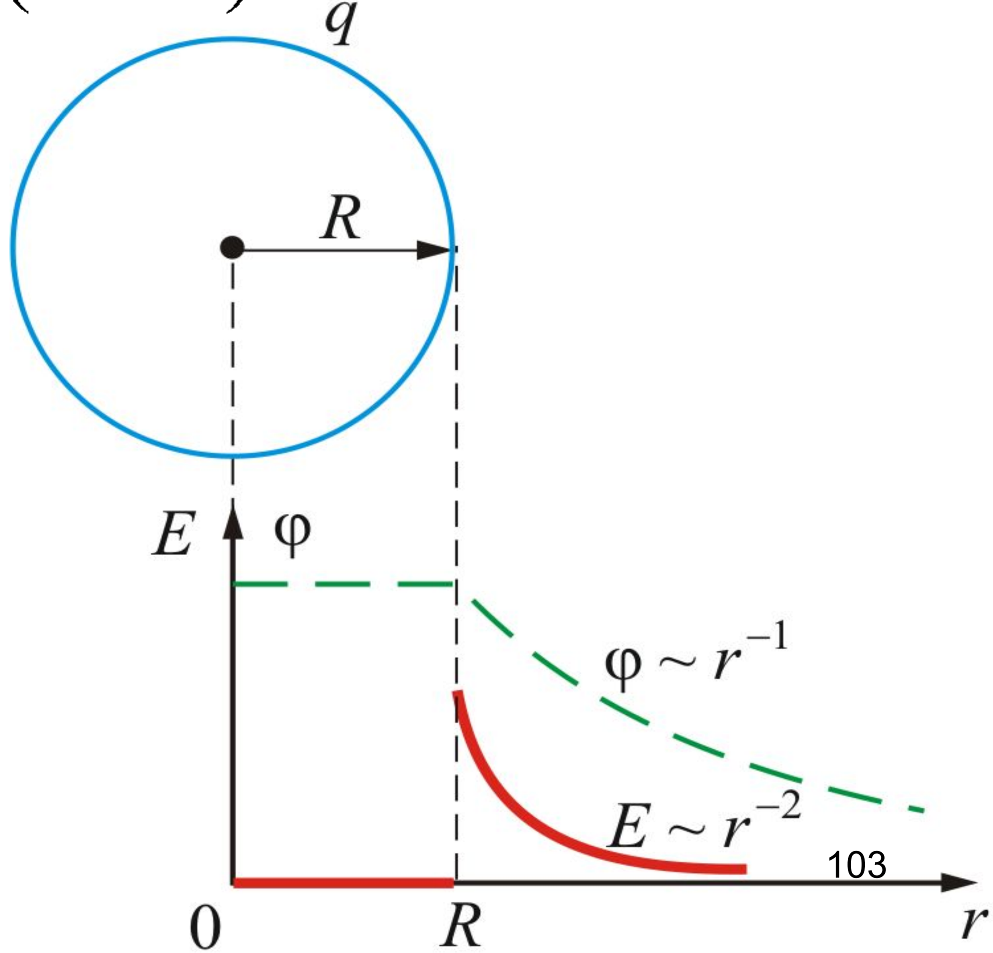
• А т.к. $d\varphi = -E dr$, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

т.е. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$



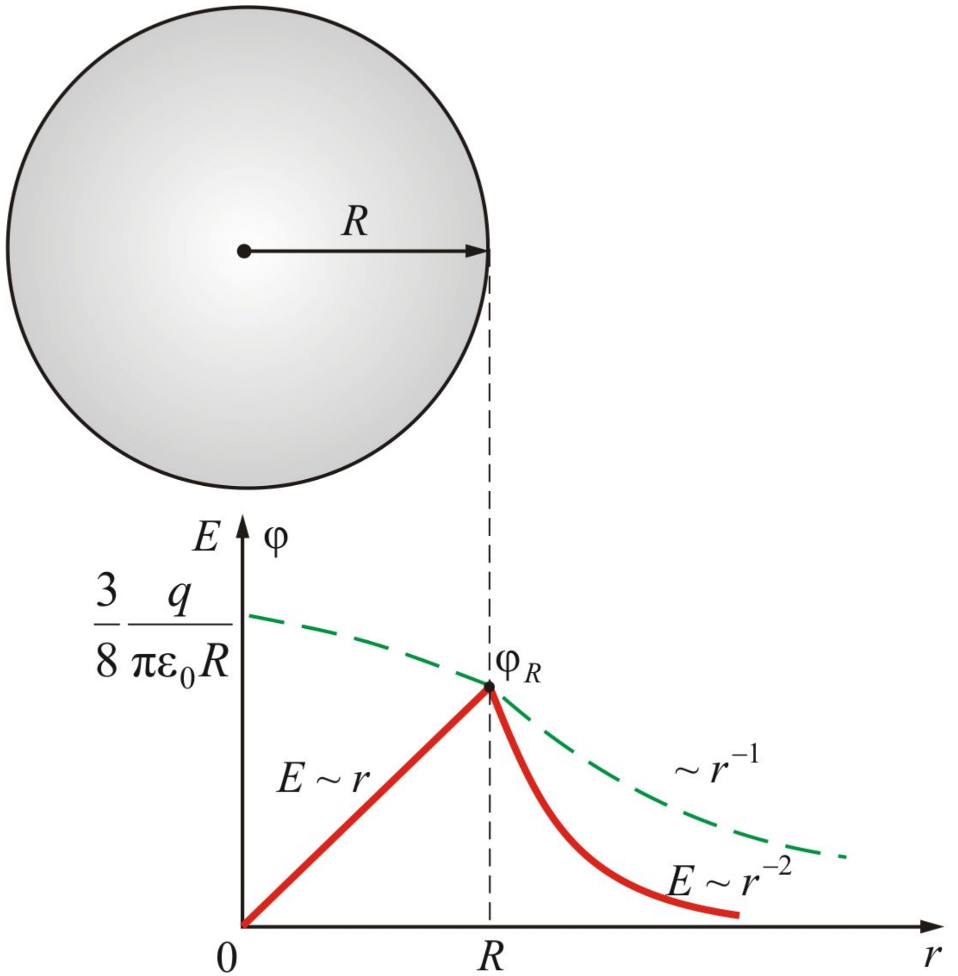
$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхн.} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$



3.7.5. Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

- Имеем диэлектрический шар заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$



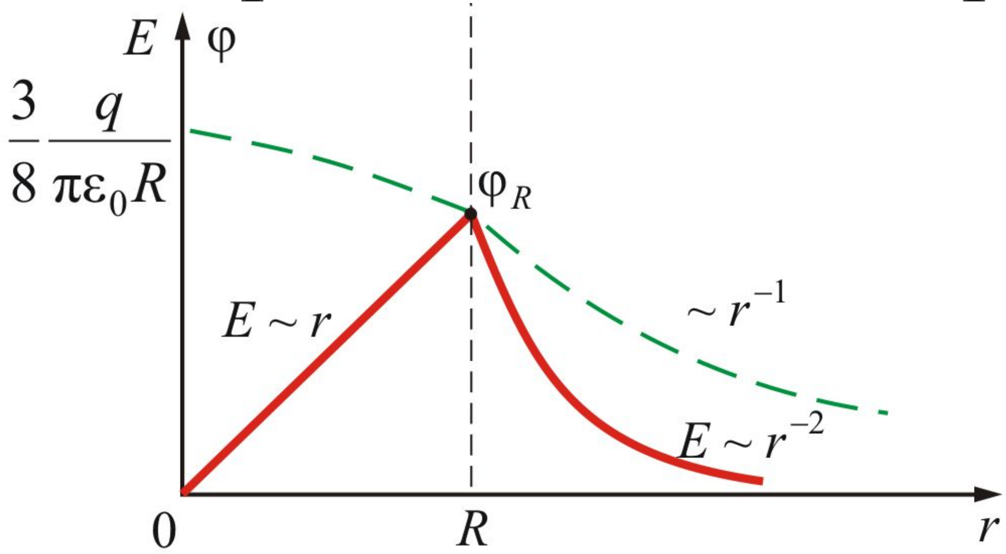
- Напряженность поля шара, вычисленная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара}(r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара}(r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара }(r > R). \end{cases}$$

- Отсюда найдем разность потенциалов шара:
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_1^2 r\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$
- или
- $$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}.$$

• Потенциал шара:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r = 0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара} (r \ge R \end{cases}$$



- Из полученных соотношений можно сделать следующие ***выводы:***

- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.*

- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*

- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*