

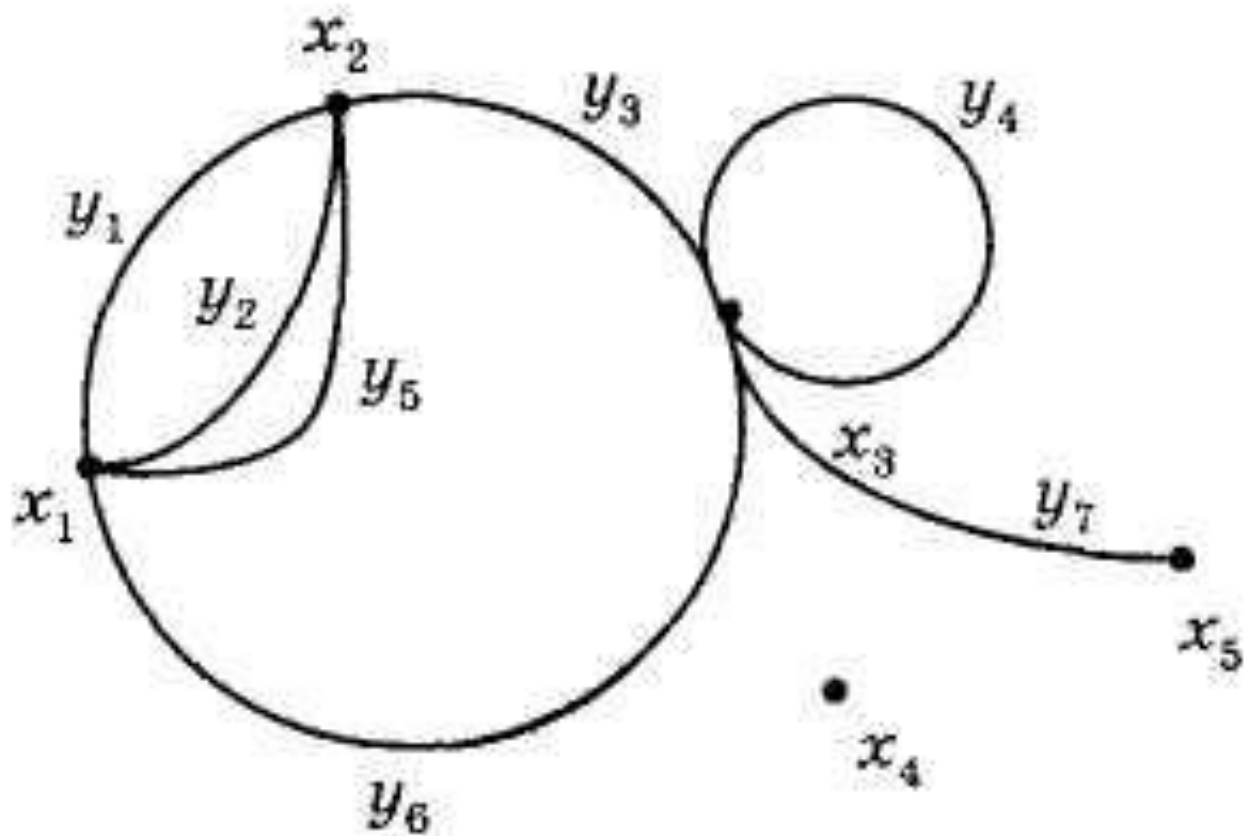
Розділ 5. Теорія графів

5.1. Історія розвитку теорії графів

- *Ейлер 1736 р. Головоломка про кенігсберські мости, у якій знайдено умову існування у зв'язному графі циклу, що містить всі ребра графа без повторень.*
- *Кірхгоф 1847 р. Вивчення електричних ланцюгів, абстрагуючись від фізичної природи пристроїв, алгоритм знаходження максимального підграфу без циклів.*
- *Келі 1857 р. Задача в органічній хімії про перелічення всіх дерев зі степенями вершин 1 і 4, що пов'язана з описом ізомерів насичених вуглеводнів $C_n H_{2n+2}$ з даним числом (n) атомів вуглецю.*

- *Гамільтон 1859 р. Задача комівояжера, який виходить і повертається до вихідного міста так, щоб відвідати решту пунктів і тільки один раз.*
- *Проблема чотирьох фарб — кожну конкретну географічну карту можна розфарбувати чотирма фарбами так, щоб будь-які дві сусідні (що мають загальну лінійну (а не точкову) ділянку границі) країни були пофарбовані у різні кольори.*
- *з 30-х років ХІХ століття, популярність графів і кількість праць з чистої теорії графів та її застосувань неухильно зростає. За допомогою графа моделюються будь-які схеми, в яких виділяються більш прості частини (вершини) і зв'язки між ними (ребра).*

5.2. Основні терміни



□ Нехай X - довільна множина точок, Y - сукупність ліній, з'єднуючих задані точки у трьохвимірному просторі

(визначення *геометричного графа* $G = (X, Y)$).

□ Точки з X називаються *вершинами*, криві з Y — *ребрами* графа. На малюнку зображено граф у просторі R^2 (або, якщо бажано, — у R^3), де

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$$

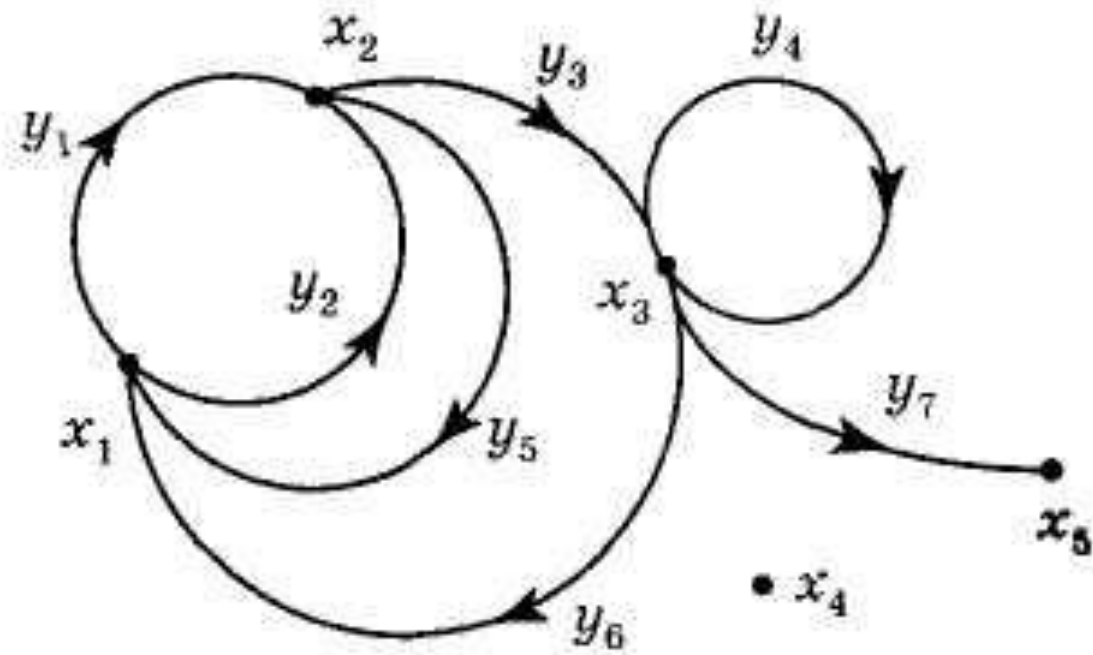
Позначення для графа: $G = (X, Y)$, $n = n_G$ — число вершин (яку ще називають *порядком графа*), $m = m_G$ — число ребер графа.

- **Суміжні вершини** (x_2, x_3) — це вершини, з'єднані ребром, **суміжні ребра** (y_2, y_3) — це ребра, що мають спільну вершину.
- Вершина x_2 і ребро y_3 **інциденті одне одному**, якщо точка x_2 є кінець (або початок) кривої y_3 .
- **Петля** (y_4) — замкнене ребро.
- **Паралельні (кратні) ребра** (y_1, y_2, y_5) — це ребра, що інциденті одній парі вершин (x_2, x_1) .
- **Ізольована вершина** (x_4) неінцидентна жодному ребру.
- **Степінь** $\deg x_i = \delta(x_i)$ **вершини** x_i — число інцидентних їй ребер ($\delta(x_1) = 4$, $\delta(x_5) = 1$, $\delta(x_4) = 0$), причому петля враховується як два ребра ($\delta(x_3)=5$).

Граф $G = (X, Y)$ називається:

- *порожнім*, якщо множина його ребер порожня;
- *простим*, якщо він не містить петель і паралельних ребер;
- *повним* G_0 , якщо він простий і кожна пара вершин суміжна;
- *мультиграфом*, якщо він містить паралельні ребра;
- *псевдографом*, якщо він містить петлі та кратні ребра;
- *регулярним* або *однорідним* (степені r), якщо степені всіх його вершин однакові (дорівнюють $r = \deg x_i, \forall x_i \in X$).

□ Якщо на кожному ребрі обрати певний напрямок, то такий граф називається *орієнтованим*, а його ребра з напрямками — *дугами*. Для орієнтованого графа зберігаються всі поняття та характеристики, що відносяться до відповідного неорієнтованого.



- В орграфі, крім степеня вершини $\delta(x)$, вводиться **додатний степінь** $\delta^+(x)$ — число дуг, що починаються у вершині x , і **від'ємний степінь** $\delta^-(x)$ — число дуг, що закінчуються у вершині x .

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома дугами, що мають зворотні напрямки і інцидентні тим самим вершинам. Таку відповідність називають канонічною.

Визначення абстрактного графа

□ *Графом* G називається трійка $G=(X,Y,f)$, де X, Y — довільні множини, $f:Y\rightarrow X\times X$ — відображення множини Y у декартовий добуток множини X на себе. Елементи множини X називаються вершинами, множини Y — дугами, відображення f — інцидентором.

Часто графи позначаються у вигляді перших двох множин трійки: $G=(X,Y)$, інцидентор f мається на увазі неявно.

5.3. Способи задання графа

- *список ребер*
- *матриця інциденцій*
- *матриця суміжності*
- *список суміжності*

Список ребер

$$G=(X,Y),$$

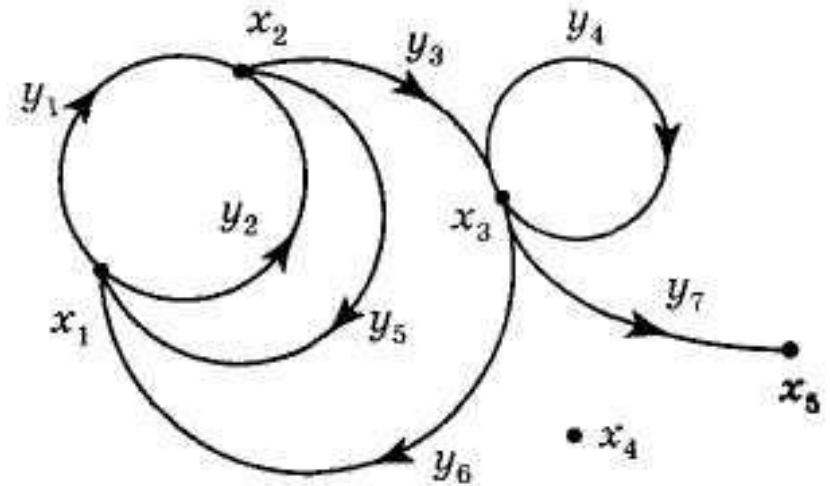
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}.$$

Інший варіант:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\};$$

$$G = \{(x_1, x_2), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \\ (x_3, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_3, x_5)\}$$



Матриця інциденцій

Оскільки вершини і дуги орграфа $G=(X,Y,f)$ без петель занумеровані: $X=\{x_1,\dots,x_n\}$, $Y=\{y_1,\dots,y_m\}$, дію інцидентора f можна охарактеризувати $(n \times m)$ — матрицею інциденцій $B=\{b_{ij}\}$, де за визначенням:

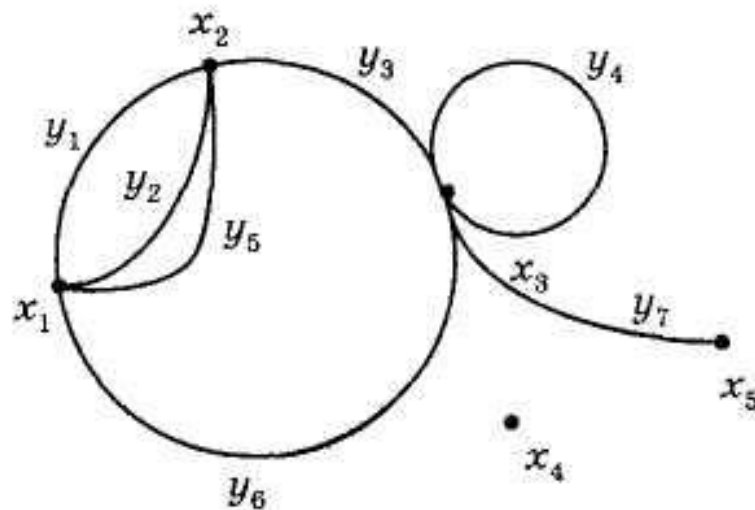
$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{якщо дуга } y_j \text{ виходить з вершини } x_i; \\ -1, & \text{якщо дуга } y_j \text{ заходить у вершину } x_i; \\ 0, & \text{якщо дуга } y_j \text{ не інцидентна вершині } x_i. \end{cases}$$

Для неорграфа G без петель матриця інциденцій $R = \{r_{ij}\}$ визначається так: $r_{ij} = 1$, якщо ребро y_j інцидентне вершині x_i , і $r_{ij} = 0$ — у протилежному випадку.

Матриця інциденцій, приклад

$$B =$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	1	1	0	0	-1	-1	0
x_2	-1	-1	1	0	1	0	0
x_3	0	0	-1	2	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	-1



Матриця суміжності

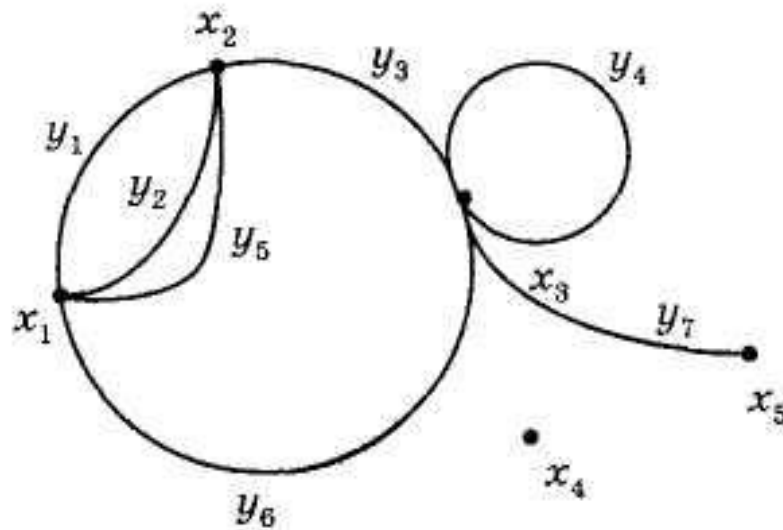
- Квадратна матриця A розміру $n = |X|$, елемент якої $a_{i,j}$ дорівнює числу дуг, що йдуть від вершини x_i до вершини x_j називається **матрицею суміжності** *орграфа* $G=(X,Y)$.

Для неорієнтованого графа елемент $a_{i,j}$ матриці суміжності A_0 визначається як число ребер, з'єднуючих вершини x_i і x_j (очевидно, A_0 завжди симетрична відносно головної діагоналі: $A_0 = A_0^T$). Ненульове значення елемента $a_{i,j}$ характеризує суміжність вершин x_i і x_j у графі, звідси і назва — матриця суміжності.

Матриця суміжності, приклад

$A_0 =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	3	0	0	0
x_2	3	0	1	0	0
x_3	1	0	1	0	1
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0



Список суміжності

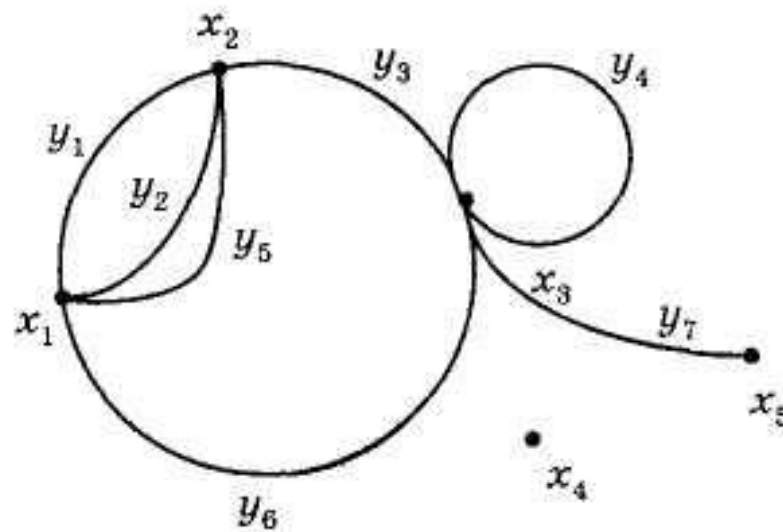
- Орієнтований граф G (без кратних дуг, але, можливо, з петлями) можна подати у вигляді багатозначного відображення множини X у X , яке зручно записувати у вигляді *списку суміжності*.

Цей спосіб подання можна використовувати і для неорієнтованих простих графів, якщо кожне ребро умовно замінити двома протилежно спрямованими дугами.

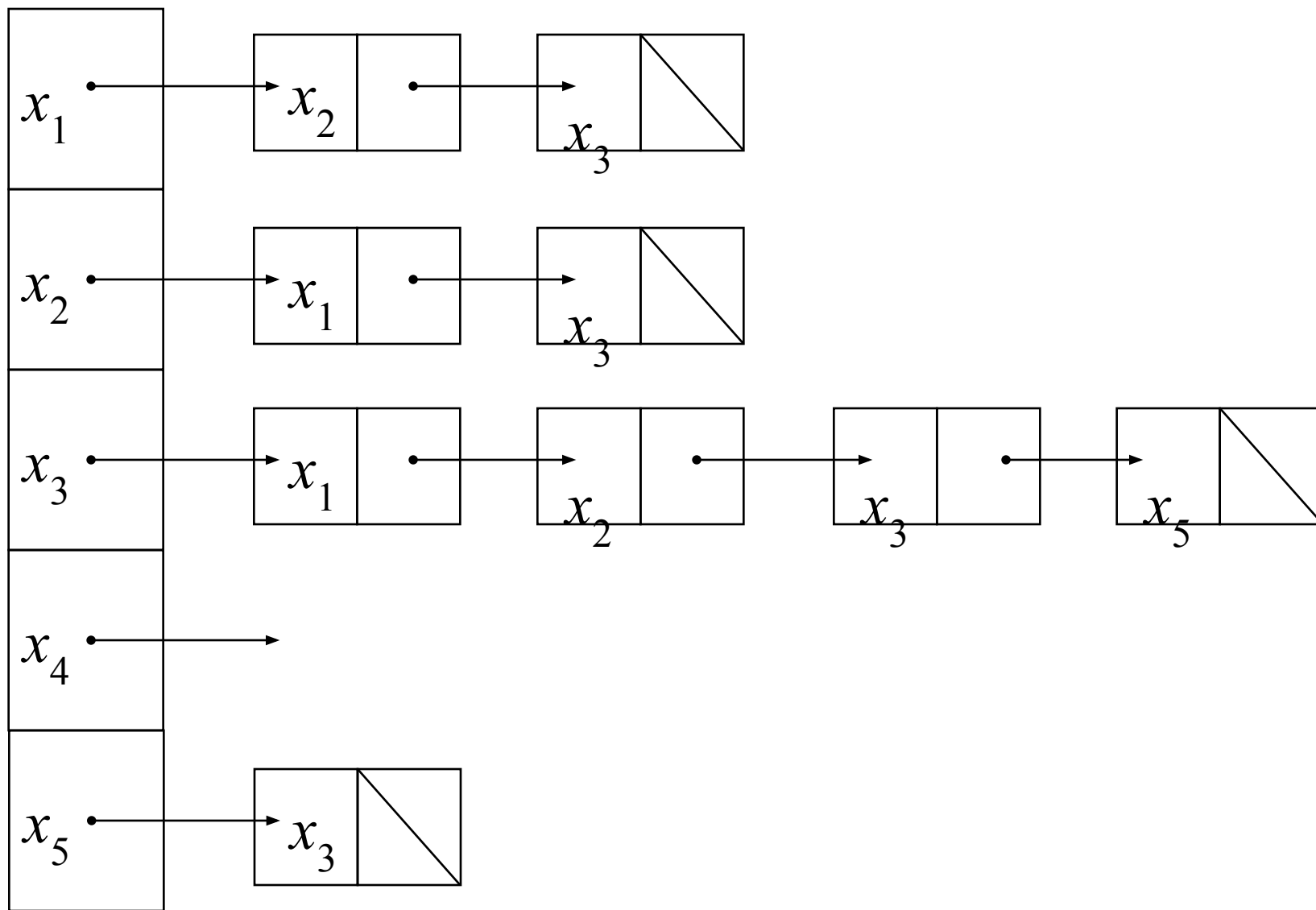
Список суміжності, приклад

$V =$

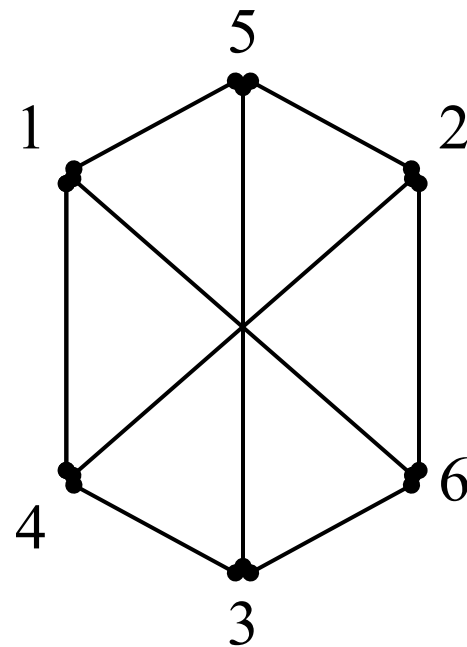
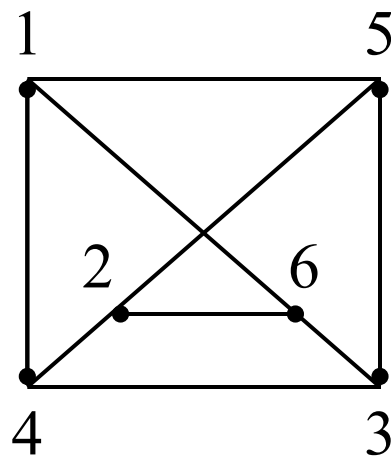
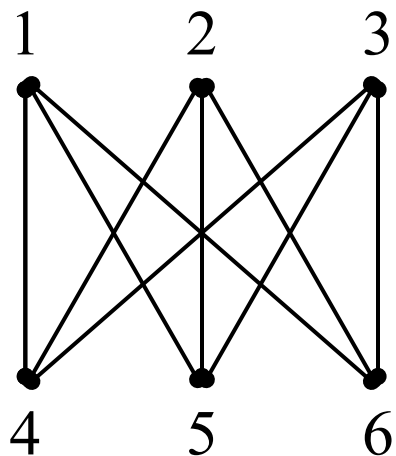
	Суміжні вершини
x_1	x_2, x_3
x_2	x_1, x_3
x_3	x_1, x_2, x_3, x_5
x_4	
x_5	x_3



Список суміжності, приклад



5.4. Операції над графами



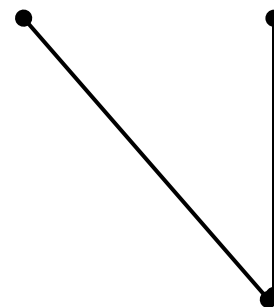
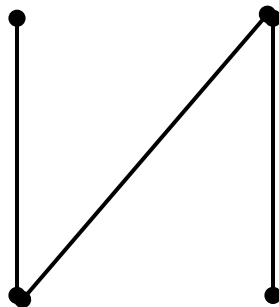
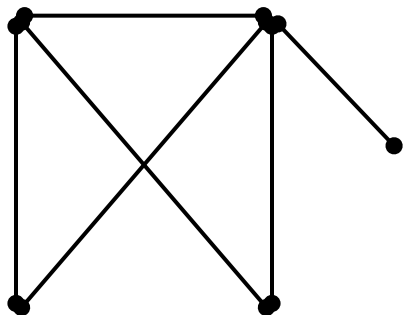
□ Два графа G і G' називаються *ізоморфними* ($G \sim G'$), якщо існують взаємно однозначні відображення вершин і ребер $\phi: X \rightarrow X'$, $\psi: Y \rightarrow Y'$ відповідно, що зберігають відношення інциденції: $f'\psi = (\phi \times \phi)f$. Інакше кажучи, ребро (дуга) y інцидентне (заходить, виходить) вершині x графа G тоді і тільки тоді, коли в графі G' відповідне ребро (дуга) $y' = \psi(y)$ інцидентне (заходить, виходить) вершині $x' = \phi(x)$.

Матриці суміжності дозволяють сформулювати простий алгебраїчний критерій ізоморфізму, який спирається на те, що вигляд матриць та списку ребер залежить від нумерації вершин і ребер графа.

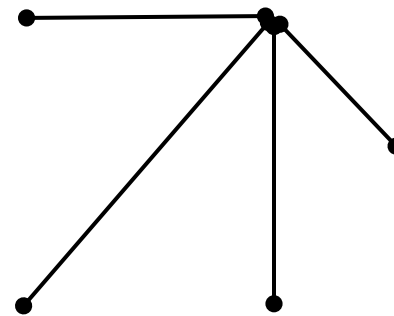
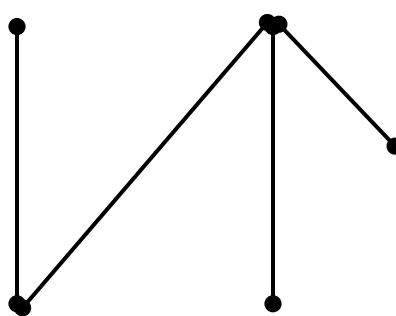
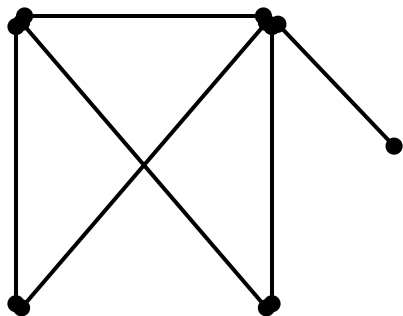
Теорема

Графи $G = (X, Y)$, $G' = (X', Y)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакове число вершин, і матриця суміжності $A(G')$ одержується з матриці $A(G)$ послідовними переставленнями рядків з одночасним переставленням однойменних стовпців.

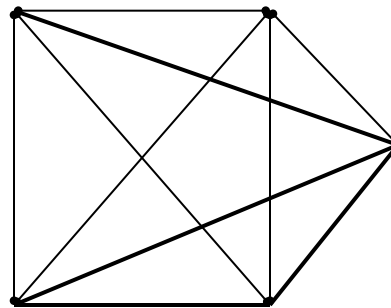
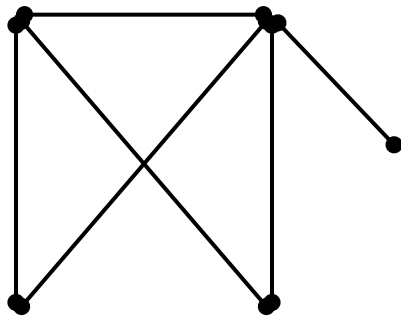
□ *Підграф* — будь-яка частина графа, що сама є графом.



□ *Остовний підграф* — множини вершин співпадають, множина ребер менше.

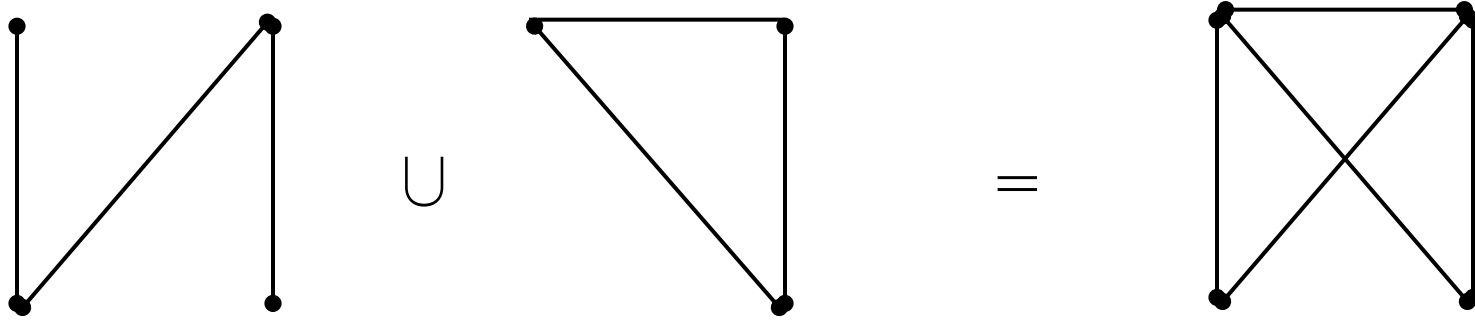


□ **Додатковим (доповненням)** до графа $G=(X,Y)$ називається граф $\tilde{G}=(X,\tilde{Y})$ з тією ж множиною вершин, що доповнює G до повного графа і $Y \cap \tilde{Y} = \emptyset$: $G_0 = G + \tilde{G} = (X, Y \cup \tilde{Y})$. Інакше кажучи, у доповнювальному графі \tilde{G} вершини (x_i, x_j) суміжні (з'єднані ребром $\tilde{y}_k \in \tilde{Y}$), якщо вони несуміжні у вихідному графі G .

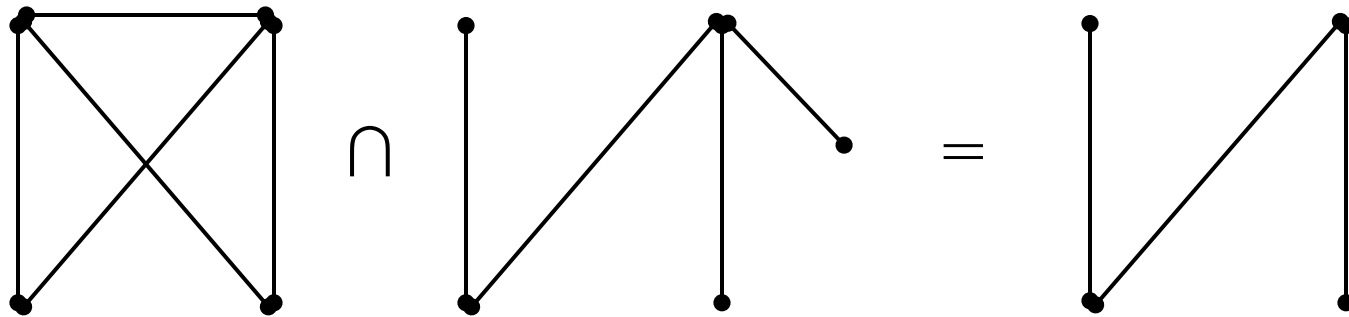


Операції з двома графами

□ *Сума* $G+G_1=(X;Y\cup Y_1)$



□ *Перетин* $G\cap G_1=(X;Y\cap Y_1)$



При множенні $GG_1=(X;Y_0)$ з вершини x_i до вершини x_j йде стільки дуг, скільки існує шляхів довжини 2 у графі $G + G_1$ з вершини x_i до вершини x_j таких, що перша дуга належить Y , друга — Y_1 .

Теорема. Для суми та добутку орграфів (з однаковими множинами вершин) матриці суміжності відповідно додаються і перемножуються, та навпаки:

$$A(G + G_1) = A(G) + A(G_1);$$

$$A(GG_1) = A(G) \cdot A(G_1).$$

Наслідок. Якщо A — матриця суміжності орграфа G , то елемент матриці A^n (натурального степеня n) дорівнює числу різних орієнтованих маршрутів довжини n , що йдуть з вершини x_i до x_j у графі G .

5.5. Маршрути та зв'язність

- **Маршрут** (з'єднуючий вершини x_a, x_b) — скінченна послідовність ребер та інцидентних їм вершин, що складають неперервну криву з кінцями x_a, x_b . Число ребер у маршруті називається його **довжиною** (включаючи внесок повторюваних ребер).
- Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової та кінцевої, називаються **внутрішніми** або **проміжними**.
- **Маршрут замкнений**, якщо кінці його співпадають ($x_a = x_b$).

- Маршрут називається *ланцюгом* (*шляхом* — в орграфі), якщо всі його ребра (дуги) різні, і *простим ланцюгом* (*простим шляхом*), якщо всі його вершини (крім кінців) різні.
- *Цикл* (*контур* — в орграфі) — це замкнений ланцюг (шлях).
- *Простий цикл* (*простий контур*), якщо ланцюг (шлях) простий.

Будь-який орієнтований маршрут є маршрутом (неорієнтованим), шлях є ланцюгом, контур — циклом, зворотне може не виконуватися.

- *Граф* називається *зв'язним*, якщо будь-яка пара його вершин з'єднується ланцюгом.
- *Орграф* називається *сильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари різних вершин v , w існує шлях з v до w і шлях із w до v .
- *Компонента (зв'язності)* — максимальний зв'язний підграф у графі.
- Граф називається *n -зв'язним*, якщо між будь-якими його двома вершинами знайдеться n ланцюгів, що попарно не мають спільних некінцевих вершин.

- **Точка зчленування графа** — вершина, видалення якої разом з інцидентними їй ребрами призводить до збільшення числа компонент графа.
- **Мостом** називають ребро (дугу) графа, видалення якого призводить до збільшення числа компонент графа.
- **Відстань** $d(x_a, x_b)$ між вершинами x_a, x_b графа G — довжина найкоротшого ланцюга між x_a, x_b . Якщо від вершини x_a до вершини x_b не веде жодний ланцюг, то $d(x_a, x_b) = \infty$.
- **Діаметром** $d(G)$ графа G називається максимальна відстань $d(x_a, x_b) \neq \infty$ у графі G .

□ **Ексцентриситет** $e(x)$ вершини $x \in X$ у зв'язному графі G є відстань від x до найбільш віддаленої від неї вершини, а **радіус** $r(G)$ графа G — найменший з ексцентриситетів вершин:

$$e(x) = \max_{\forall v \in X} d(x, v) \qquad r(x) = \min_{\forall x \in X} e(x)$$

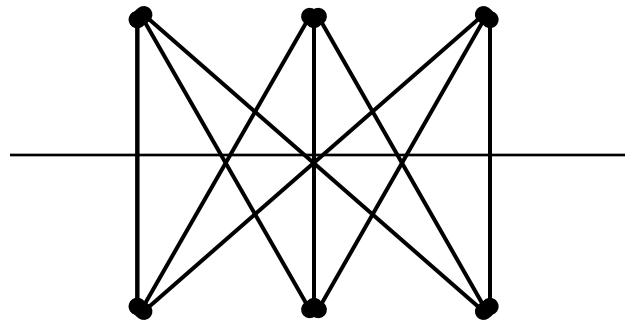
Найбільший ексцентриситет дорівнює діаметру:

$$d(G) = \max_{\forall x \in X} e(x) = \max_x \max_v d(x, v)$$

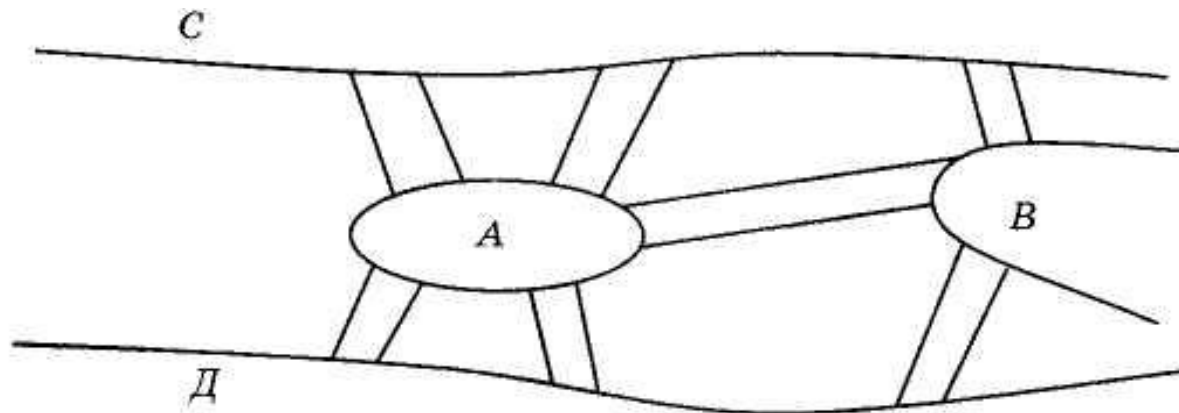
□ Вершина v називається **центральною вершиною графа** G , якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобто $e(v) = r(G)$.

- *Центром графа G* називається множина всіх його центральних вершин; центр може складатися з єдиної вершини, а може — з двох і більше вершин.
- *Дводольний граф* – це граф, множину вершин якого можна розбити на дві підмножини таким чином, що кожне ребро графа з'єднує вершини з різних підмножин (позначають такі графи $K_{3,3}$).

Теорема Кеніга: *граф є дводольним тоді і тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.*



5.6. Ейлерові графи



Головоломка про кенігсберські мости.

Чи можна здійснити прогулянку по місту, пройшовши по кожному мосту точно один раз, і повернутися до вихідної точки?

- *Ейлеровим шляхом* у графі називають шлях, який містить кожне ребро графу рівно один раз.
- Замкнений ейлерів шлях називають *ейлеровим циклом*.
- Зв'язний граф, що допускає побудову ейлерового циклу (шляху), називають *ейлеровим (напівейлеровим) графом*.

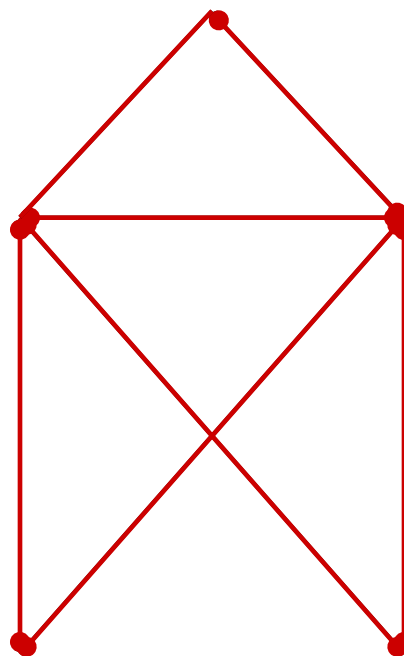
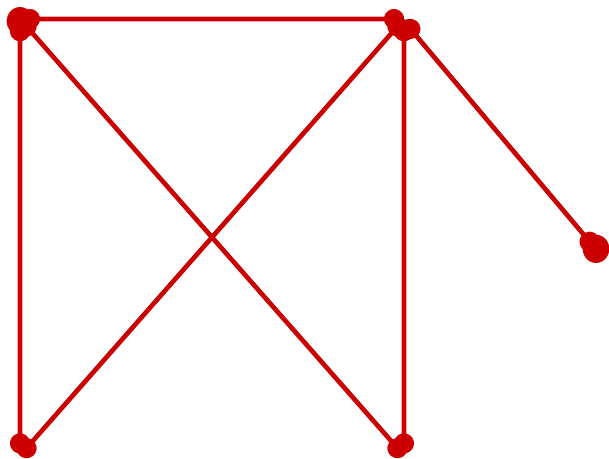
Теорема Ейлера (1736 р.) *Граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин — парні. Граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин, крім початку і кінця шляху, — парні.*

Побудова ейлерового циклу (шляху).

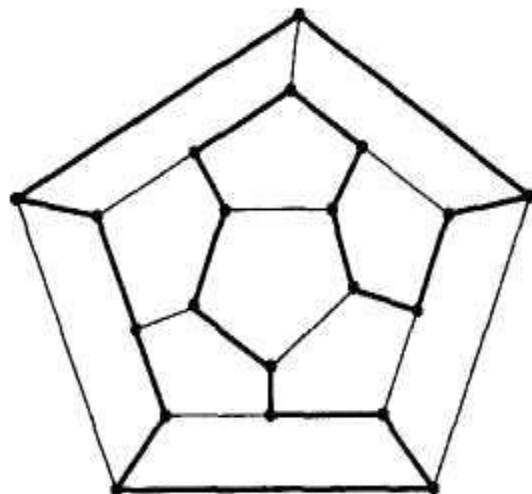
Алгоритм Флері

1. Ейлерів цикл можна починати з будь-якої вершини (ейлерів шлях треба починати з однієї з непарних вершин).
2. Під час побудови ейлерового циклу (шляху) з графу видаляють (або мітять) ребра, що входять до циклу.
3. На кожному кроці можна вибирати довільне ребро, яке за можливості не є мостом (з урахуванням видалених ребер на попередніх кроках); міст можна обирати лише тоді, коли всі ребра, інцидентні даній вершині, є мостами.

Приклад.



5.7. Гамільтонові графи



Головоломка “кругосвітня подорож”, запропонована у 1859р. ірландським математиком Уільямом Гамільтоном.

Чи можна обіхати найцікавіші міста, побувавши у кожному тільки один раз?

- *Гамільтоновим шляхом* у графі називають шлях, який містить кожену вершину графу рівно один раз.
- Замкнений гамільтонів шлях називають *гамільтоновим циклом*.
- Зв'язний граф, що допускає побудову *гамільтонового* циклу (шляху), називають *гамільтоновим (напівгамільтоновим) графом*.

До розпізнавання гамільтоновості графів зводиться також *задача комівояжера*: використовуючи задану систему транспортних сполучень (доріг і т.п.) між пунктами (містами, фірмами і т.п.) у конкретній зоні обслуговування, відвідати всі пункти у такій послідовності, щоб пройдений маршрут був найкоротшим із всіх можливих.

Задача про гамільтонів цикл не має на сьогодні ані повного теоретичного розв'язку, ані задовільного алгоритму відшукування циклу для $n \geq 3$.

Граф не є гамільтоновим, якщо:

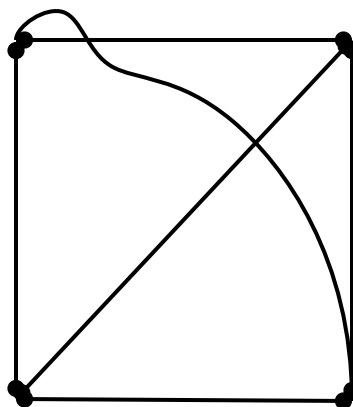
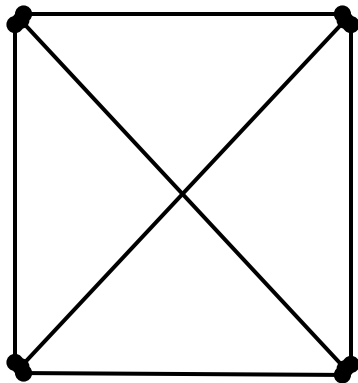
- містить точку зчленування або міст;
- містить дві вершини третього степеня, які сполучені трьома шляхами довжиною не менше 2, що не мають спільних вершин окрім початку і кінця.

Граф є гамільтоновим, якщо:

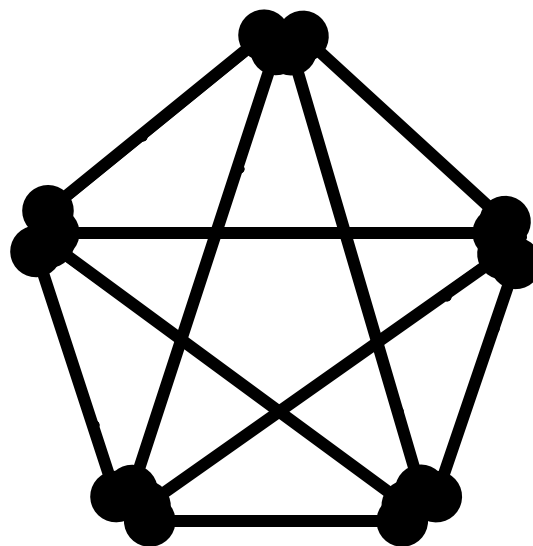
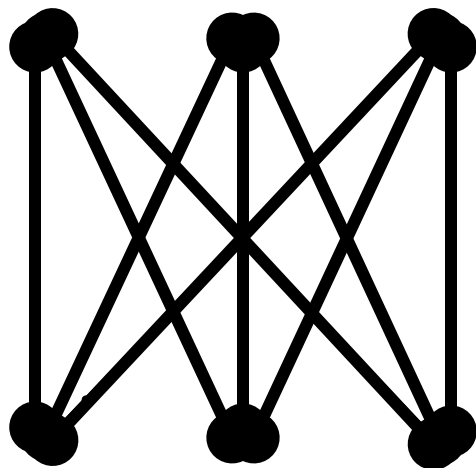
- степінь будь-якої вершини $\deg v \geq n/2$ (Дірак)
- для будь-якої пари несуміжних вершин $\forall v, u \in X$ виконується $\deg v + \deg u \geq n$ (Оре)

5.8. Планарність графів

- Граф, що має плоску реалізацію, називається *планарним*.



- Два графи називаються *гомеоморфними*, якщо після вилучення з них вершин другого степеня з подальшим об'єднанням інцидентних цим вершинам ребер вони стають ізоморфними.



Теорема Понтрягіна — Куратовського

Граф G є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам G_1 , G_2

5.9. Розфарбування графів

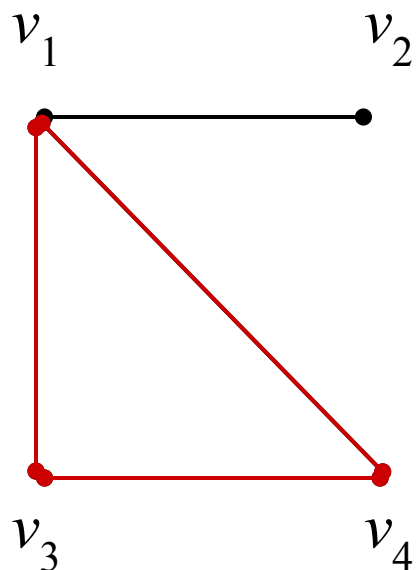
Під час розв'язання багатьох проблем доцільно розглядати графи з фарбованими вершинами – мічені графи, для яких кожній вершині v зіставляється деякий колір c_v , причому суміжні вершини фарбуються у різні кольори.

- Мінімальна кількість кольорів, достатня для фарбування вершин графу, називається **хроматичним числом** $\chi(G)$. Граф з хроматичним числом називають **k -колірним**.

Повний граф з n вершинами є n -колірним.

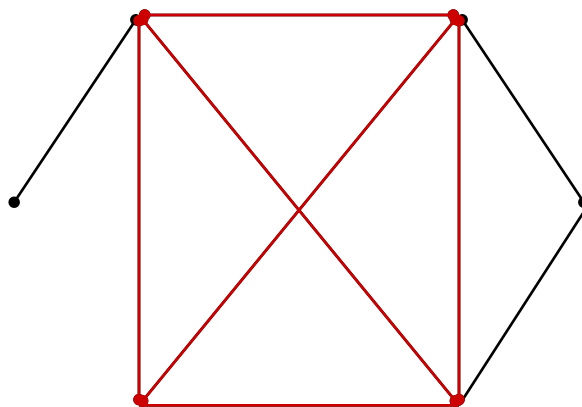
Порожній граф, незалежно від кількості вершин, – одноколірним.

Приклад. Оцінити хроматичне число графа.



Цей граф містить підграф, що є повним графом з трьома вершинами, отже $\chi(G) \geq 3$; з другого боку кольорів не може бути більше кількості вершин, отже $\chi(G) \leq 4$.

Приклад. Оцінити хроматичне число графа.



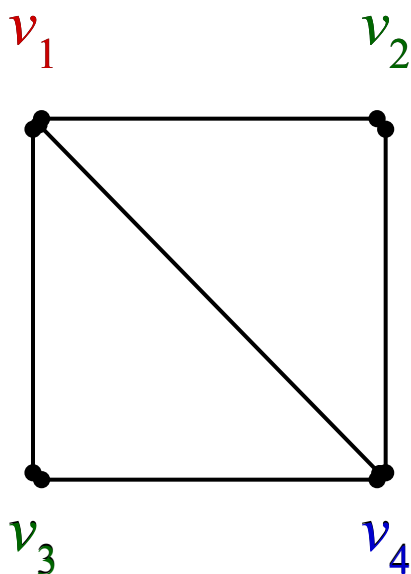
Цей граф містить підграф, що є повним графом з чотирма вершинами, отже $\chi(G) \geq 4$; з другого боку кольорів не може бути більше кількості вершин, отже $\chi(G) \leq 6$.

Фарбування вершин графа

Алгоритм Уелша-Пауелла

- 1) Вершини графу впорядковуються за спаданням степенів. $i=1$.
- 2) Вершина, що перша у списку, фарбується у колір c_i .
- 3) У той же колір c_i фарбуються в порядку за списком усі вершини, несуміжні з вершинами, вже пофарбованими на цьому кроці.
- 4) Пофарбовані вершини викреслюють із списку. $i=i+1$.
- 5) Повторюємо пункти 2-4, поки у списку є непофарбовані вершини.

Приклад. Розфарбувати вершини графа.



v_1, v_4, v_2, v_3

1. Розташуємо вершини за спаданням степенів: v_1, v_4, v_2, v_3 .

2. Зіставимо вершині v_1 колір c_1 ; вершин, несуміжних v_1 , у списку більше немає, тому змінюємо колір і викреслимо вершину v_1 зі списку.

3. Вершину v_4 (першу, що залишилась у списку) фарбуємо у колір c_2 ; вершин, несуміжних v_4 , у списку більше немає, тому змінюємо колір і викреслимо вершину v_4 зі списку.

4. Вершину v_2 фарбуємо у колір c_3 ; у цей же колір пофарбуємо вершину v_3 , несуміжну з v_2 .

5. Непофарбованих вершин більше немає.

Однією з перших задач, пов'язаних із фарбуванням графів, є фарбування географічної карти так, щоб сусідні країни були пофарбовані різними кольорами.

У зв'язку з пошуком мінімальної кількості кольорів, потрібних для фарбування карти, в середині ХІХ століття була сформульована так звана “проблема чотирьох кольорів”, доведена 1976р. К.Аппелем і В. Хейкенем за допомогою комп'ютера.

Теорема чотирьох фарб

Для фарбування вершин (граней) планарного графу достатньо чотирьох кольорів.

- **Гранню (коміркою)** плоского графа називається така непорожня замкнена підобласть площини, що будь-які дві точки області можна з'єднати простою кривою, що лежить всередині області, не перетинаючись з ребрами графа.
 - **Границею грані** вважається множина ребер і вершин графа, що належать грані.
 - Будь-який скінченний плоский граф має в точності одну **необмежену** грань, яка називається **зовнішньою** гранню. Решта граней (**обмежених**) називаються **внутрішніми**.
 - **Цикломатичне число** $\nu = m - n + 1$ — число комірок зв'язного плоского графа (замість одиниці можна ставити кількість компонент зв'язності).
- У цих термінах задача фарбування географічної карти — це задача фарбування граней плоского графа.

Задачу фарбування граней графу можна звести до задачі фарбування вершин, якщо перейти від заданого графа до двоїстого йому.

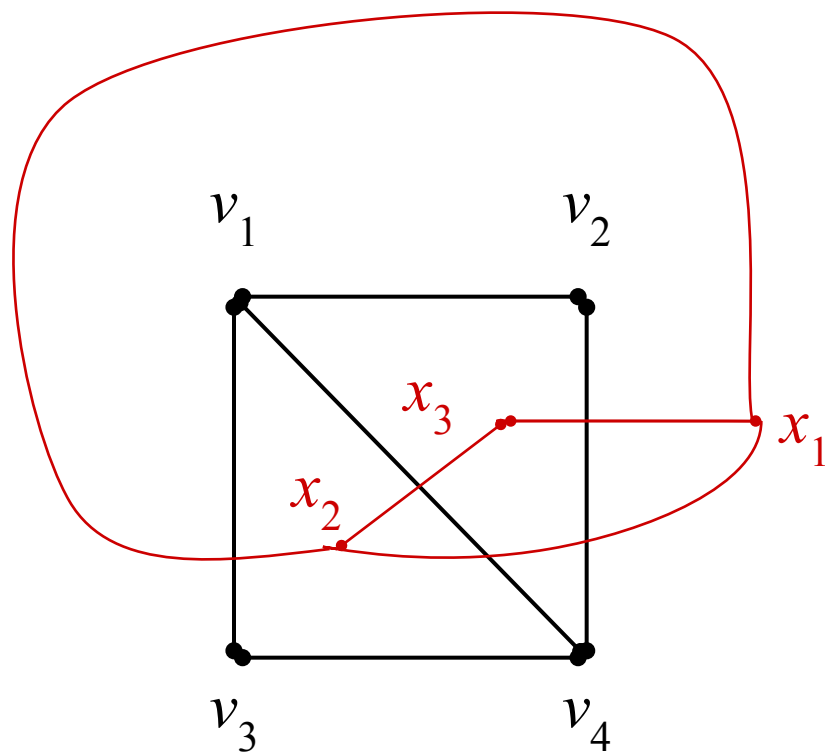
□ Нехай G – плоский граф з кількістю вершин, ребер і граней n_X , n_Y , n_r відповідно. Плоский граф G^* з кількістю вершин, ребер і граней n_X^* , n_Y^* , n_r^* відповідно називають *двоїстим (дуальним)* до графу G , якщо:

1. $n_Y^* = n_Y$, $n_X^* = n_r$

2. Кожна грань r графу G містить рівно одну вершину x^* графу G^* (вершина x^* графу G^* відповідає грані r графу G);

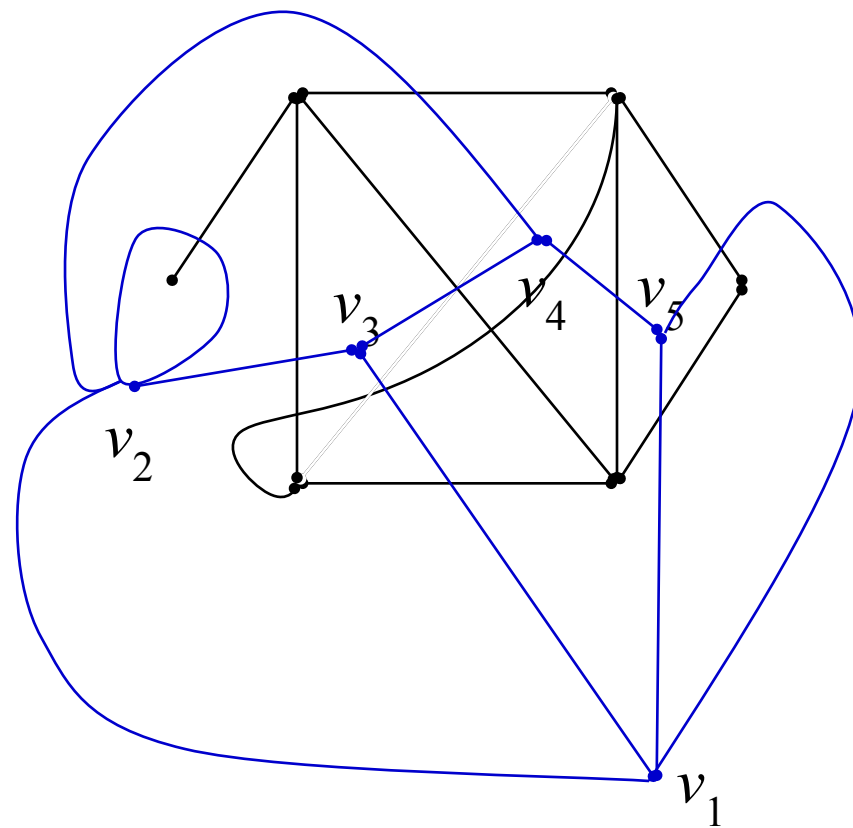
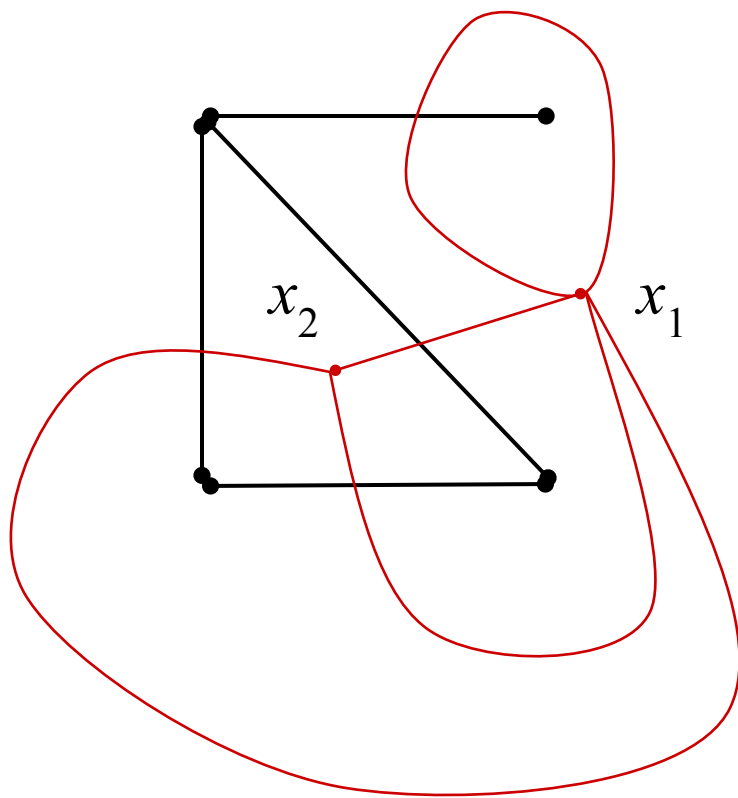
3. Кожне ребро y графу G перетинається рівно з одним ребром y^* графу G^* (ребро y графу G відповідає ребру y^* графу G^*).

Приклад. Розфарбувати грані графа.



Цей граф містить підграф, що є повним графом з трьома вершинами, отже $\gamma(G) \geq 3$; з другого боку кольорів не може бути більше кількості вершин, отже $\gamma(G) = 3$.

Приклад. Побудувати двоїстий граф.



Прикладні задачі, що зв'язані з розфарбуваннями:

1. *Задача завантаження (розміщення) n продуктів (предметів) по ящикам (сховищам).* Модельний граф G має n вершин, що відповідають продуктам, а наявність ребра (x_i, x_j) означає, що продукт x_i несумісний з x_j . Якщо місткості Q_i ящиків великі ($Q_i \geq n$), то задача розміщення у найменше число ящиків еквівалентна задачі оптимального розфарбування вершин графа G . При обмеженні місткості Q_i до звичайних умов розфарбування додадуться обмеження на кількість вершин одного кольору.

2. В задачах *теорії розкладів* (інакше, *календарного планування*) операціям зіставляються часові інтервали. Віднесемо їм вершини x_i модельного графа G , в якому є ребро (x_i, x_j) тоді і тільки тоді, коли операції x_i, x_j несумісні у часі. При однаковій довжині та довільній черговості операцій оптимальний розклад (сумарний час, що мінімізує виконання всіх робіт) еквівалентний оптимальному розфарбуванню модельного графа G . Хроматичне число дорівнює оптимальному часу виконання всіх робіт: $\gamma(G) = T_{min}$. Крім того, різні кольори можуть відповідати, наприклад, різним ділянкам (приміщенням), і якщо на i -й ділянці не можна виконати більше Q_i операцій одночасно, то в модельному розфарбуванні з'являється додаткове обмеження на кількість вершин i -го кольору.