Основы комбинаторики. Размещения, перестановки, сочетания.

Проказница Мартышка
Осёл,
Козёл,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет
…
Стой, братцы стой! –
Кричит Мартышка, - погодите!
Как музыке идти?
Ведь вы не так сидите…
И так, и этак пересаживались –
опять музыка на лад не идет.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть…

знать:

- определения трех важнейших понятий комбинаторики:
- размещения из n элементов по m;
- сочетания из n элементов по m;
- перестановки из n элементов;
- основные комбинаторные формулы

уметь:

- отличать задачи на «перестановки», «сочетания», «размещения» друг от друга;
- применять основные комбинаторные формулы при решении простейших комбинаторных задач.

множество

Множество характеризуется объединением некоторых однородных объектов в одно целое.

Объекты, образующие множество, называются **элементами множества.**

Множество будем записывать, располагая его элементы в фигурных скобка $\{a, b, c, \ldots , e, f\}$.

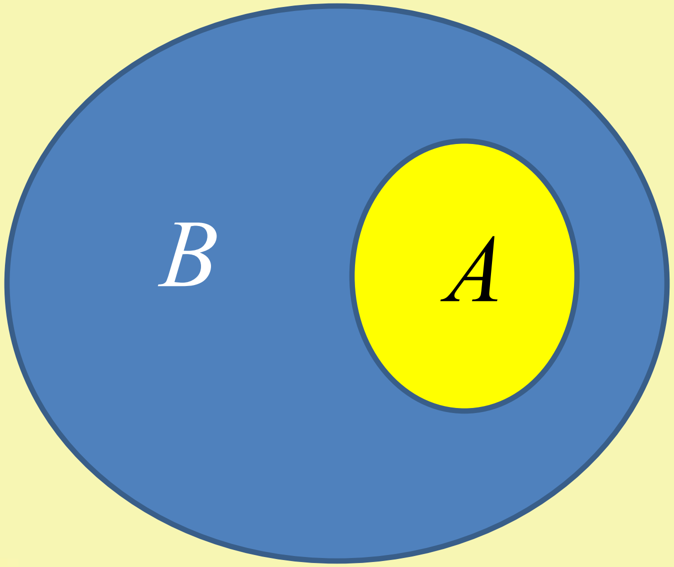
Во множестве порядок элементов роли не играет, так $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается символом ø.

$A \subset B$

множество

Если каждый элемент множества *A* является элементом множества В, то говорят, что множество *A* является подмножеством множества *B.*



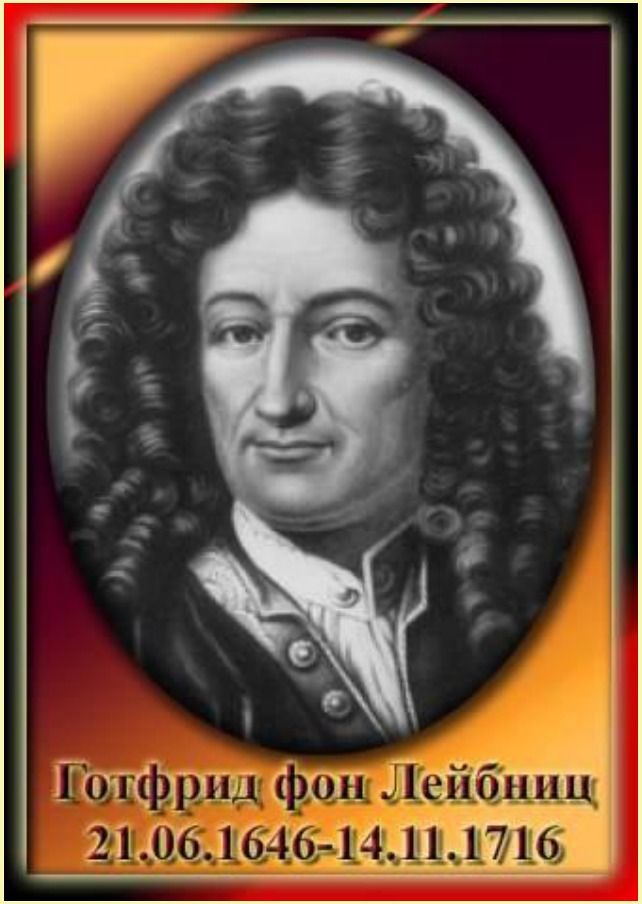
Обозначается $A \subset B$

Пример:

Множество {*a*, *b*} является подмножеством множества {*a*, *b*, *c*, … , *e*, *f*}.

Задача

Перечислите возможные варианты подмножества множества {*3*, *4*, *5*, 7, *9*}.



Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.

Комбинаторика является важным разделом математики, который исследует закономерности расположения, упорядочения, выбора и распределения элементов с фиксированного множества.

ПРАВИЛО СУММИРОВАНИЯ

Если два взаимоисключающие действия могут быть выполнены в соответствии k и m способами, тогда какое-то одно из этих действий можно выполнить $k + m$ способами.

Пример №1

Из города А в город В можно добраться 12 поездами, 3 самолетами, 23 автобусами. Сколькими способами можно добраться из города А в город В?

Решение

N=12+13+23=38

Пример № 2

В ящике имеется n разноцветных шариков. Произвольным образом вынимаем один шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Конечно, *n* способами.

Теперь эти n шариков распределены по двум ящикам: В первом *m* шариков, во втором *k*. Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шарик. Сколькими разными способами это можно сделать?

Решение.

Из первого ящика шарик можно вытянуть *m* различными способами, из второго *k* различными способами, всего $N = m + k$ способами.

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть две выполняемые одно за другим действия могут быть осуществлены в соответствии k и m способами Тогда обе они могут быть выполнены $k \cdot m$ способами.

Пример № 3

В турнире принимают участие 8 хоккейных команд. Сколько существует способов распределить первое, второе и третье места?

Решение

N=8·7·6=336

Пример № 4

Сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

Решение. Поскольку число двузначное, то число десятков (m) может принимать одно из девяти значений: 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Число единиц (k) может принимать те же значения и может, кроме того быть равным нулю. Отсюда следует, что m = 9, а k= 10. Всего получим двузначных чисел

N = $m \cdot k$ = 9·10 =90.

Пример № 5

В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

Решение. По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студентов или студенток. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет

$N = 182 + 30 = 212$.

ТИПЫ СОЕДИНЕНИЙ

Множества элементов называются ***соединениями***.

Различают три типа соединений:

- перестановки из n элементов;
- размещения из n элементов по m;
- сочетания из n элементов по m ($m < n$).

ПЕРЕСТАНОВКИ

<u>Определение</u>: Перестановкой из *n* элементов называется любое упорядоченное множество из *n* элементов.

Иными словами, это такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой – на втором, какой- на третьем, …, какой – на n-м месте.

Перестановки – это такие соединения по *n* элементам из данных элементов, которые отличаются одно от другого порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n.

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

ФАКТОРИАЛ

<u>Определение</u>:

Пусть n - натуральное число. Через $n!$ (читается "эн факториал") обозначается число, равное произведению всех натуральных чисел 1 от до n:

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.}$$

В случае, если $n = 0$, по определению полагается: $0! = 1$.

Пример № 6

Найдем значения следующих выражений:

1!

2!

3!

7!

Пример № 7

Чему равно

а) P_5 ;

б) P_3.

Пример № 8

Упростите

а) 7! · 8

б) 12! · 13 ·14

в) $к$! · ($к$ + 1)

Пример № 9

Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение.

$n = 8$

$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

РАЗМЕЩЕНИЯ

<u>Определение.</u> Размещением из *n элементов по m* называется любое упорядоченное множество из *m* элементов, состоящее из элементов *n элементного множества.*

Число размещений из *m* элементов по *n* обозначают:

$$A_m^n$$

вычисляют по формуле:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Пример № 9

Учащиеся 11-го класса изучают 9 учебных предметов. В расписании учебных занятий на один день можно поставить 4 различных предмета. Сколько существует различных способов составления расписания на один день?

Решение.

Имеем 9-элементное множество, элементы которого учебные предметы. При составлении расписания мы будем выбирать 4-элементное подмножество (уроков) и устанавливать в нем порядок. Число таких способов равно числу размещений из девяти по четыре (***m=9, n=4)*** то есть A_9^4:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024$$

Пример № 10

Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать старосту и помощника старосты?

Решение.

Имеем 24-элементное множество, элементы которого ученики класса. При выборах старосты и помощника старосты мы будем выбирать 2-элементное подмножество (ученика) и устанавливать в нем порядок. Число таких способов равно числу размещений из девяти по четыре(***m=24, n=2***), то есть A_{24}^{2}:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$A_{24}^2 = \frac{24!}{(24-2)!} = \frac{24!}{22!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 24 \cdot 23 = 552$$

СОЧЕТАНИЯ

<u>Определение.</u> Сочетанием без повторений из *n* элементов по *m* -называется любое *m* элементное подмножество *n* -элементного множества

Число сочетаний из n элементов по m обозначают C_m^n

и вычисляют по формуле: $$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Пример № 11

Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать два дежурных ?

Решение.

$\boldsymbol{n}$ =24, $\boldsymbol{m}$=2

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

$$C_{24}^2 = \frac{24!}{2!\cdot(24-2)!} = \frac{24!}{2!\cdot 22!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22!}{2\cdot 1\cdot 22!} = 12\cdot 23 = 276$$

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Д А

НЕТ

Все ли элементы входят в соединение?

Д А

НЕТ

ПЕРЕСТАНОВКИ

$$P_n = n!$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

СОЧЕТАНИЯ

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Определить к какому типу относится соединений относится задача.

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (да)

Все ли элементы входят в соединение? (да)

Вывод: перестановка

2. В 9«Б» классе 12 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (нет)

Все ли элементы входят в соединение? (на этот вопрос ответ не нужен)

Вывод: сочетания

3.Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (да)

Все ли элементы входят в соединение? (нет)

Вывод: размещение

Проказница Мартышка
Осёл,
Козёл,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет
…
Стой, братцы стой! –
Кричит Мартышка, - погодите!
Как музыке идти?
Ведь вы не так сидите…
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть…

Сколько различных вариантов расположения музыкантов возможно?

Решение.

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

(да)

Все ли элементы входят в соединение?

(да)

Вывод: перестановка

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

$\boldsymbol{n = 4}$

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Кто автор высказывания?

«Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле»?

$\frac{1}{7}$

перестановки
12
1
720
120
размещение
$\frac{1}{7}$
21
6720
сочетание
56
132
9
5040
А
М
В
Н
Л
Й
С
Ч
Е
И
О
Ы
Р
К
Е

Результаты решения задач

1	2	3	4	5	6	7
А	Л	Е	К	С	Е	Й

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Н	И	К	О	Л	А	Е	В	И	Ч

18	19	20	21	22	23
К	Р	Ы	Л	О	В

«Адмирал корабельной науки»

Алексей Николаевич Крылов

(1863-1945)

выдающийся русский и советский математик, механик, инженер и кораблестроитель

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Выучить конспект и формулы.
С. 321 № 1062
С. 325 №1074,1075
С. 329 №1081