

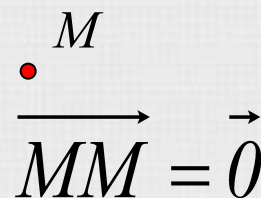
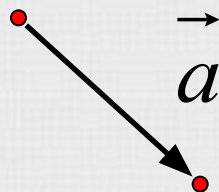
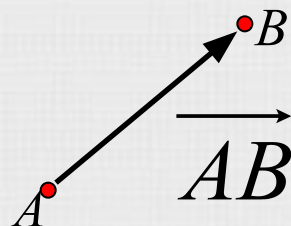
# Векторы в пространстве



# Понятие вектора в пространстве

*Вектор(направленный отрезок) –*

*отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.*



*Длина вектора  $\overrightarrow{AB}$  – длина отрезка AB.*

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \quad |\vec{0}| = 0$$



# Коллинеарные векторы

*Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.*

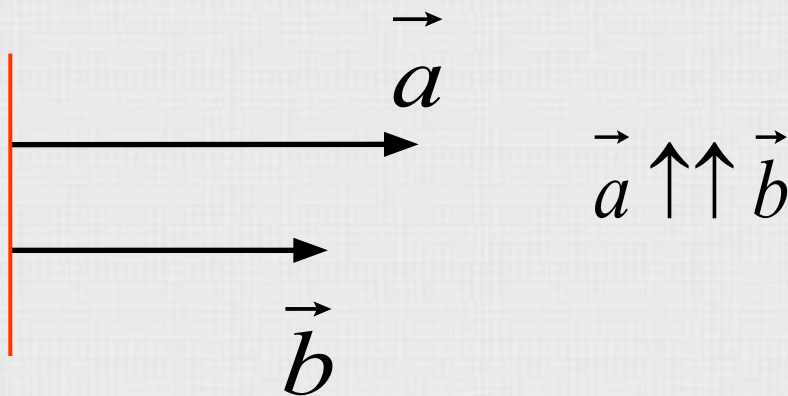
*Среди коллинеарных различают:*

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы



# Сонаправленные векторы

*Сонаправленные векторы - векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.*



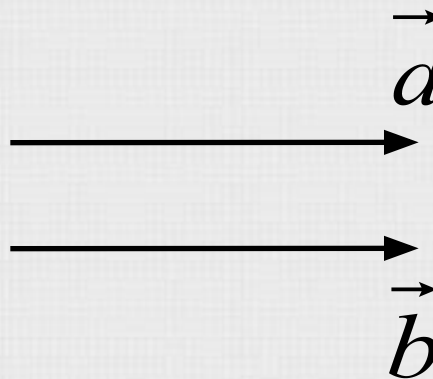
*Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.*

- Равные векторы



# Равные векторы

*Равные векторы - сонаправленные векторы, длины которых равны.*

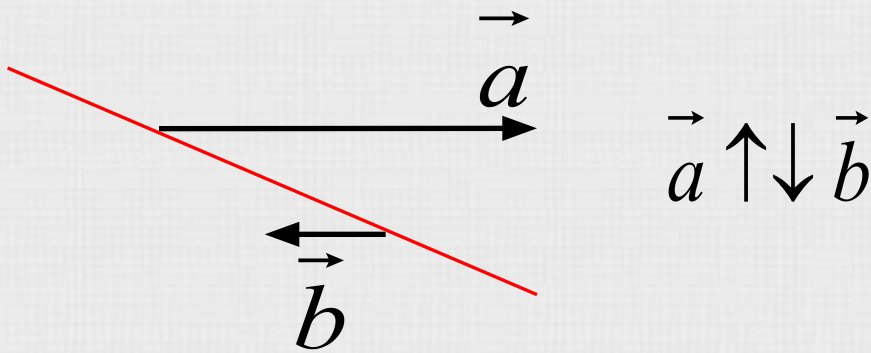

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

*От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.*



# Противоположно направленные векторы

*Противоположно направленные векторы – векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.*

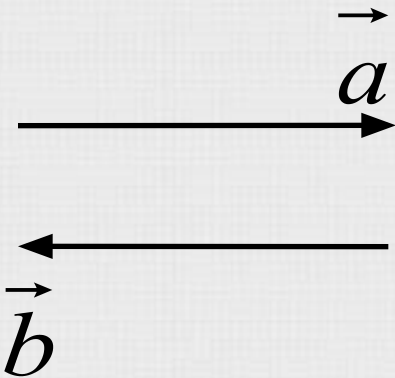


- Противоположные векторы



# Противоположные векторы

*Противоположные векторы – противоположно направленные векторы, длины которых равны.*


$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

*Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.*



# Признак коллинеарности

*Если существует такое число  $k$  при котором выполняется равенство  $\vec{a} = k\vec{b}$  и при том вектор  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны.*

Доказательств

0





# Доказательство признака коллинеарности

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство.

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

вектор  $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ , если  $k \geq 0$  (следует из определения

вектор  $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ , если  $k < 0$  произведения вектора на число)

Значит вектор  $\vec{b}$  и  $k\vec{a}$  коллинеарны,  
т.к. сонаправленные и противоположно  
направленные векторы лежат на одной  
или параллельных прямых.

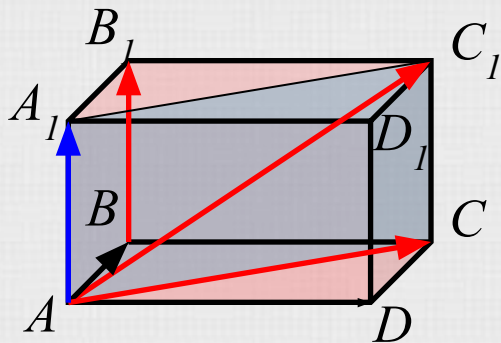
ч.т.д.



# Определение компланарных векторов

*Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

*Пример:*

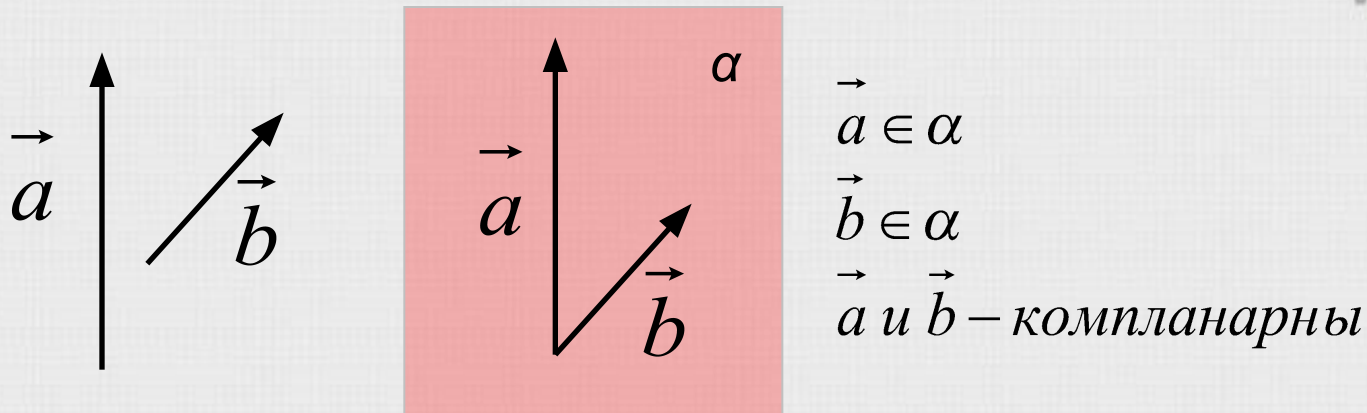


$\vec{BB_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$  – компланарны, т.к.  
 $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$ , а векторы  $\vec{AA_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$   
лежат в плоскости  $(AA_1C)$



# О компланарных векторах

*Любые два вектора всегда компланарны.*



*Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.*

$\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  –  
компланарны *если*  $\vec{a} = k\vec{b}$



# Признак компланарности

Если вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где  $x$  и  $y$  – некоторые числа, то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

Доказательство

Задачи



# Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а)  $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$ ;

б)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ ?

Справка

Решение

2) *Известно, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.*

*Компланарны ли векторы:*

а)  $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$ ;

б)  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$ ?

Справка

Решение



# Решение

а) векторы  $\vec{a}$  и  $2\vec{a}$  коллинеарны,  
векторы  $\vec{b}$  и  $3\vec{b}$  коллинеарны,  
значит векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $2\vec{a}$  и  $3\vec{b}$  компланарны

б) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{a} + \vec{b}$  компланарны,  
векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$  компланарны,  
значит векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$  компланарны



# Решение

*а) если векторы  $\vec{a}$ ,  $2\vec{b}$ ,  $3\vec{c}$  компланарны, то существуют такие  $x$  и  $y$ , что*

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

*проверяем существуют ли такие  $m$  и  $n$ , что*

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

*имеем :*

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

*$m$  и  $n$  определяются единственным образом, значит векторы компланарны*



# Решение

б) если векторы  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} + 2\vec{c}$ ,  $2\vec{b} - 3\vec{c}$  компланарны, то существуют такие  $x$  и  $y$ , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x) + \vec{b}(1-2y) + \vec{c}(-2x+3y) = 0$$

$$\begin{cases} 1-x=0 \\ 1-2y=0 \\ 3y-2x=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

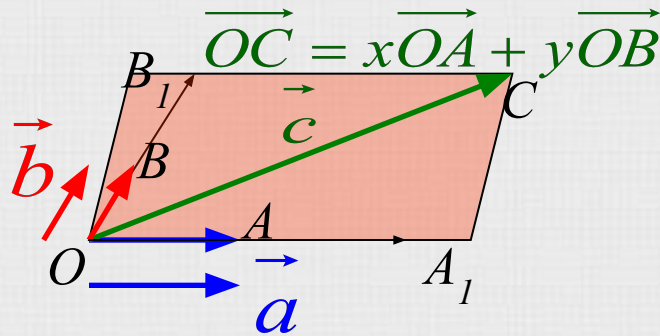
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые  $x$  и  $y$  существуют,  
значит векторы компланарны





# Доказательство признака компланарности



Дано :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$x, y$  – некоторые числа

Доказать :

$\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  – компланарны

Доказательство :

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – не коллинеарны

$O$  – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OA_1}, \vec{OB_1} \in (OAB)$$

$$\vec{OA_1} = x \cdot \vec{OA}, \vec{OB_1} = y \cdot \vec{OB} \Rightarrow$$

$$\vec{OC} = \vec{c} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$  лежат в одной плоскости

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – компланарны ч.т.д



# Свойство компланарных векторов

*Если векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде :*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

*причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*



# Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение



# Сложение векторов

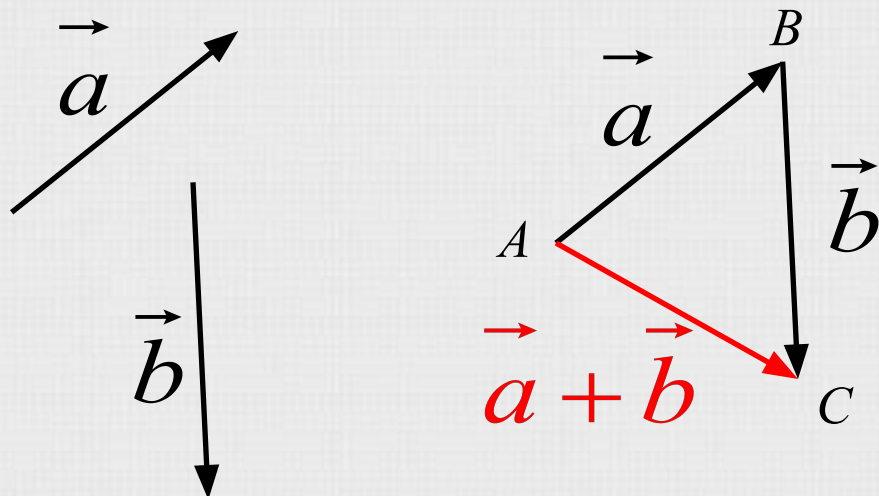
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда
- Свойства сложения



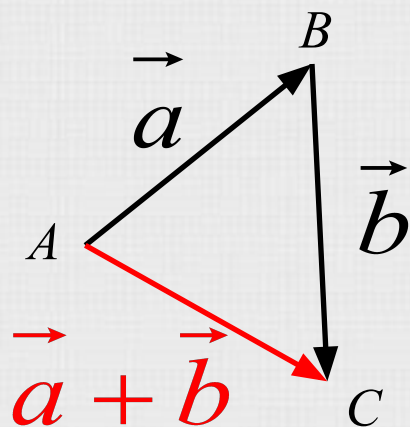
# Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$
2. от точки  $B$  отложить вектор  $\overrightarrow{BC}$ , равный  $\vec{b}$
3. вектор  $\overrightarrow{AC}$  называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$



# Правило треугольника



Для любых трех точек A, B и C справедливо равенство:

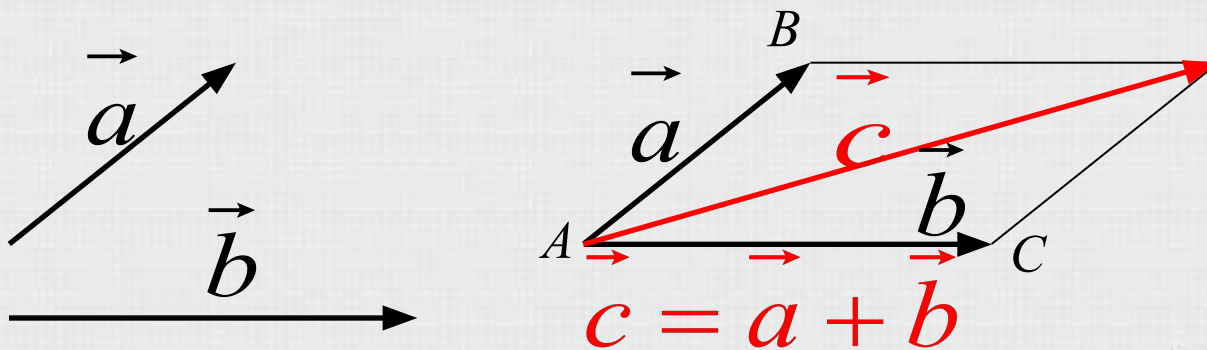
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \underline{\vec{AC}}$$



# Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$
2. от точки  $A$  отложить вектор  $\overrightarrow{AC}$ , равный  $\vec{b}$
3. построить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам
4. диагональ параллелограмма – сумма векторов



# Свойства сложения

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  справедливы  
равенства :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{переместительный закон}$$

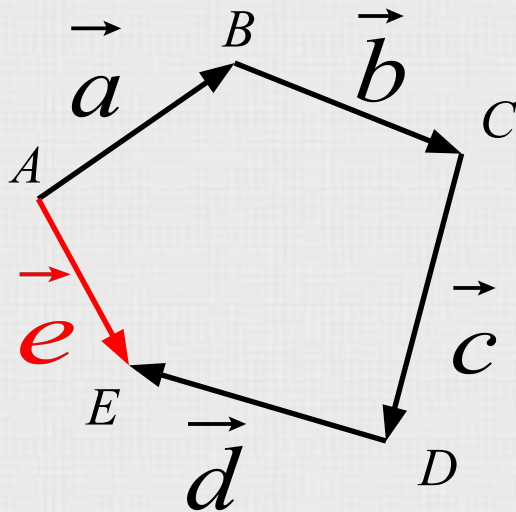
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{сочетательный закон}$$





# Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего (при последовательном откладывании).



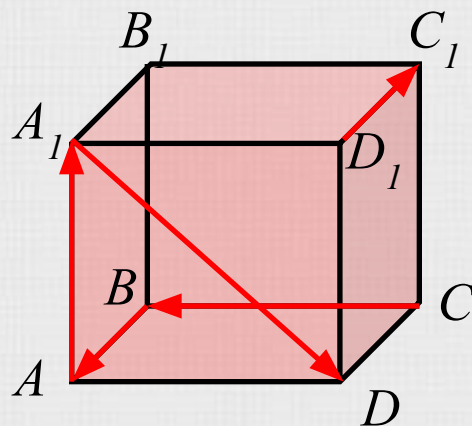
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

Пример

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \underline{\vec{AE}}$$



# Пример

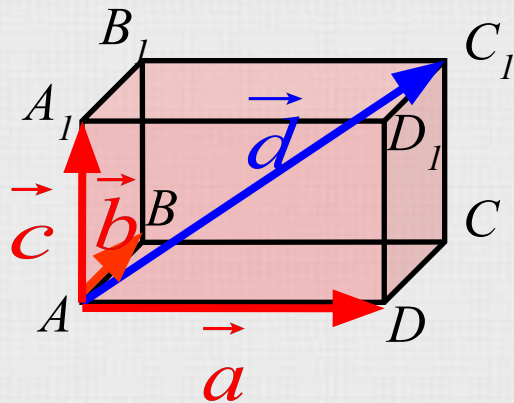


$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$



# Правило параллелепипеда

*Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.*



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

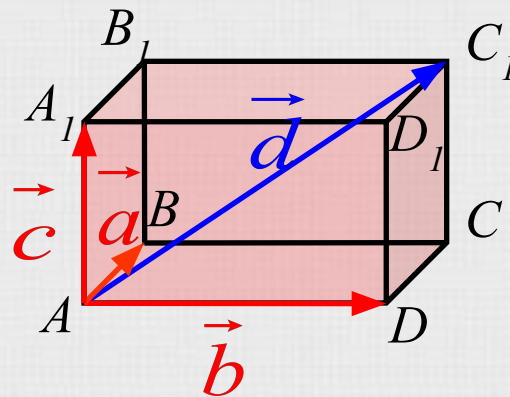
$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$



# Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  для любого параллелепипеда  
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  для прямоугольного параллелепипеда



# Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным



# Вычитание

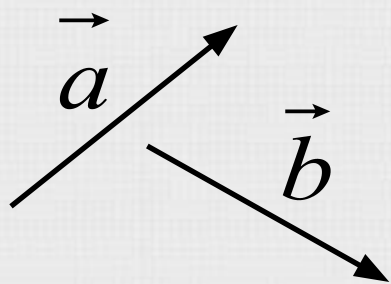
Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор, сумма которого с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ .



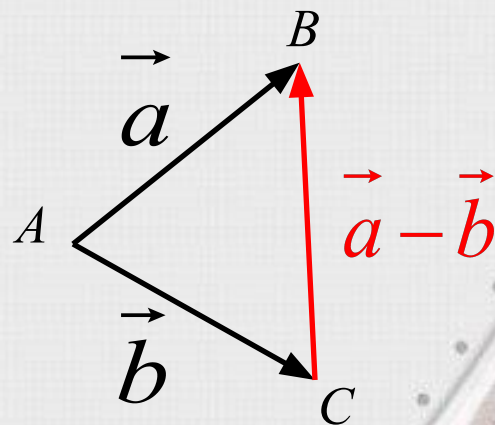
# Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$
2. от этой же точки  $A$  отложить вектор  $\overrightarrow{AC}$ , равный  $\vec{b}$
3. вектор  $\overrightarrow{CB}$  называется разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

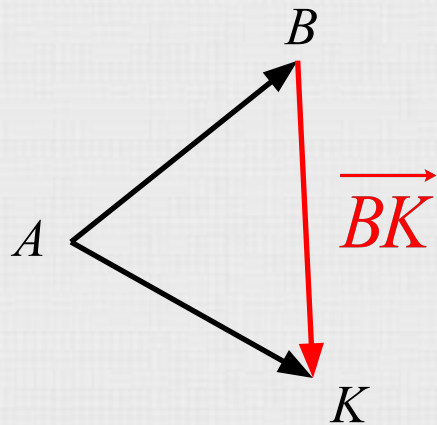


Правило трех точек



# Правило трех точек

*Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.*



$$\underline{\overrightarrow{BK}} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$

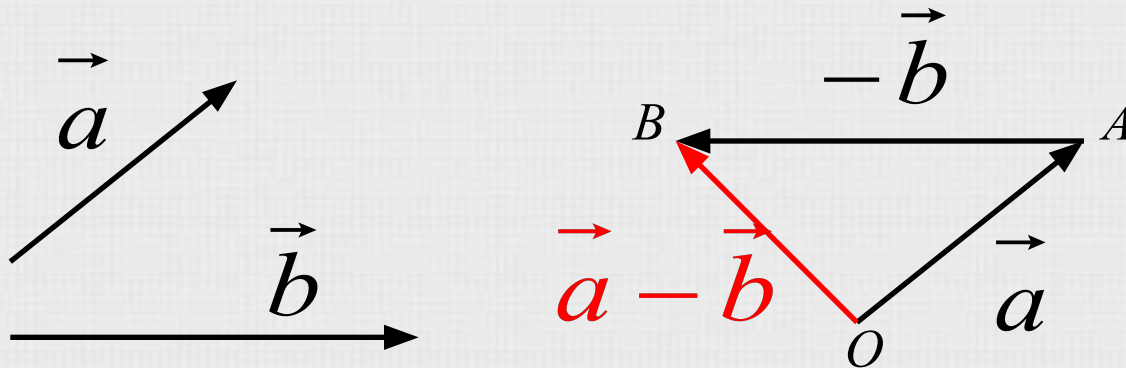




# Сложение с противоположным

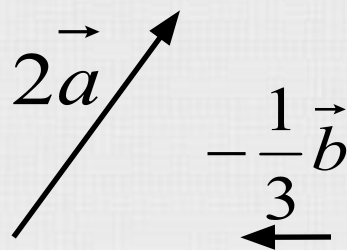
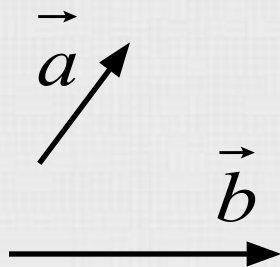
Разность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно представить как сумму вектора  $\vec{a}$  и вектора, противоположного вектору  $\vec{b}$ .

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



# Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$ , длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , при чем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k < 0$ .



# Свойства

- Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор.

$$\vec{n} \cdot 0 = \vec{0}$$



# Свойства

Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и любых чисел  $k, l$  справедливы равенства :

$$(\vec{k}l)\vec{a} = \vec{k}(\vec{l}a) \quad \text{сочетательный закон}$$

$$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}a + \vec{k}b \quad \text{1-ый распределительный закон}$$

$$(\vec{k} + \vec{l})\vec{a} = \vec{k}a + \vec{l}a \quad \text{2-ой распределительный закон}$$



# Скалярное произведение

*Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения



# Справедливые утверждения

• *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

• *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$



# Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательств

во



# Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство :

I. при  $\vec{a} = \vec{0}$  или  $\vec{b} = \vec{0}$ , равенство

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  справедливо, т.к.  $\vec{0} = \{0; 0; 0\}$

II. при  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O – произвольная точка

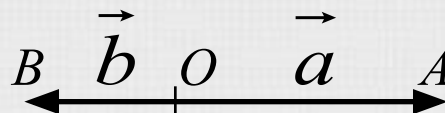
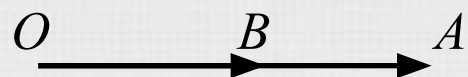
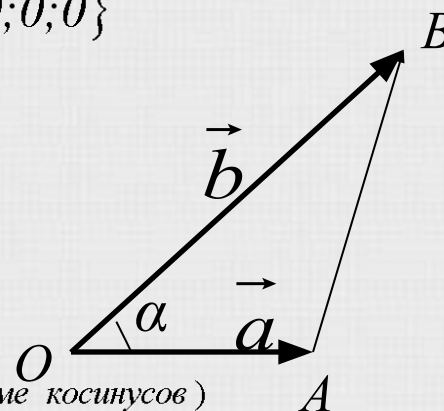
$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$

если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны, то

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$  (по теореме косинусов)

это равенство верно и в том случае когда векторы

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны



$$\begin{aligned} \cos\alpha = 1, AB^2 &= (OA - OB)^2 = & \cos\alpha = -1, AB^2 &= (OA + OB)^2 = \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB = & &= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB = \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha & &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha \end{aligned}$$





# Доказательство формулы скалярного произведения

Так как  $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , то

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$- (z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$- x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$



# Свойства скалярного произведения

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы равенства :

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0$$

$$2^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{переместительный закон})$$

$$3^0. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{распределительный закон})$$

$$4^0. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон})$$



# Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам



# Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

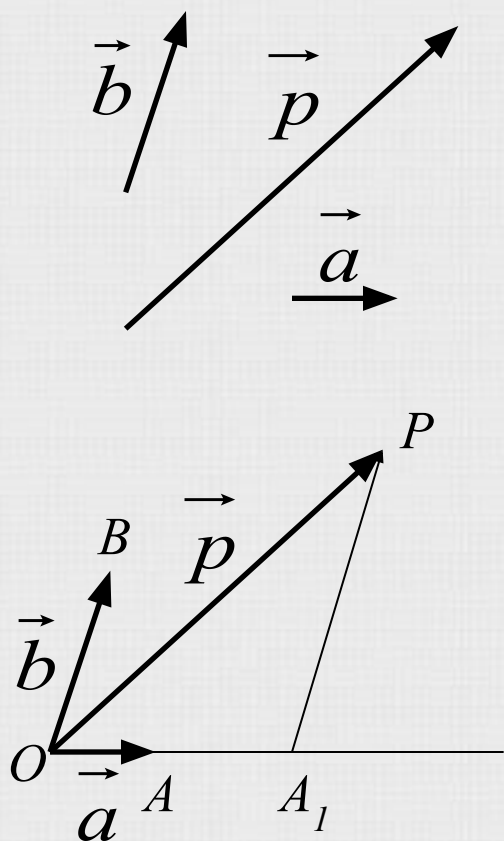
## Теорема.

*Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

## Доказательство



# Доказательство теоремы



Дано :

$\vec{a}, \vec{b}$  – неколлинеарные  
векторы

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :

1) Пусть  $\vec{p}$  коллинеарен  $\vec{b}$   
Тогда  $\vec{p} = y\vec{b}$ , где  $y$  –  
некоторое число.

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е.  $\vec{p}$  разложен по  
векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



# Доказательство теоремы

2)  $\vec{r}$  коллинеарен ни вектору  $\vec{a}$ , ни вектору  $\vec{b}$

Отметим  $O$  – произвольную точку.

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OP} = \vec{r}$$

$$PA_1 \parallel BO \quad PA_1 \cap OA = A_1$$

$$\vec{r} = \vec{OA_1} + \vec{A_1P} \text{ (по правилу треугольника)}$$

но:  $\vec{OA_1}$  и  $\vec{A_1P}$  коллинеарны  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  соответственно,

$$\text{значит } \vec{OA_1} = x\vec{a}, \quad \vec{A_1P} = y\vec{b},$$

следовательно  $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , т.е.  $\vec{r}$  разложен по  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

ч.т.д.



# Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим:  $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}$

Тогда:  $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$

$$\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b}$$

$$x - x_1 = 0, y - y_1 = 0,$$

если бы  $x - x_1 \neq 0$  то  $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}$

а значит  $\vec{a}$ , и  $\vec{b}$  коллинеарны, что противоречит условию теоремы значит  $x - x_1 = 0$ ,  $y - y_1 = 0$ , откуда  $x = x_1$  и  $y = y_1$ .



# Разложение вектора по трем некопланарным векторам

*Если вектор  $\vec{p}$  представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

*где  $x, y, z$  – некоторые числа, то говорят, что вектор  $\vec{p}$  разложен по векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .*

*Числа  $x, y, z$  называются коэффициентами разложения.*

## Теорема

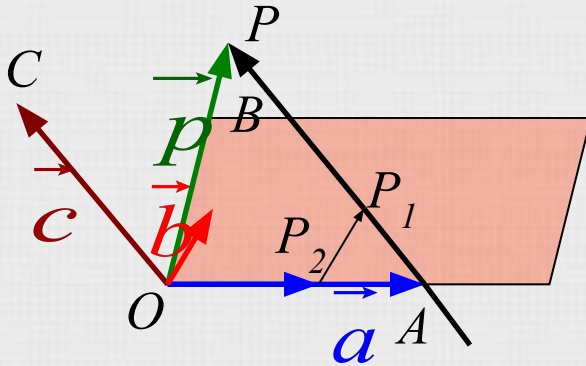
*Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.*

Доказательство





# Доказательство теоремы



Дано:  
 $\vec{a}$   $\vec{b}$   $\vec{c}$  –  
 некопланрные  
 векторы  
 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

$O$  – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OC} = \vec{c} \quad \vec{OP} = \vec{p}$$

$$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2P_1 + \vec{P}_1P$$

$\vec{OP}_2$ , и  $\vec{OA}$ ,  $\vec{P}_2P_1$  и  $\vec{OB}$ ,  $\vec{P}_1P$ ,  $\vec{OC}$  – коллинеарны

$$\vec{OP}_2 = x \cdot \vec{OA}, \quad \vec{P}_2P_1 = y \cdot \vec{OB}, \quad \vec{P}_1P = z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ ч.т.д.}$$



# Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим:  $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$

Тогда:  $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$   
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b} + (z - z_1) \vec{c}$$

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0, \quad z - z_1 = 0$$

если бы  $z - z_1 \neq 0$  то  $\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1} \vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1} \vec{b}$

а значит  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , и  $\vec{c}$  компланарны, что противоречит условию теоремы

значит  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ ,  $z = z_1$



# Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка

Вектор, проведенный в точку отрезка

Вектор, соединяющий середины двух отрезков

Вектор, проведенный в центроид треугольника

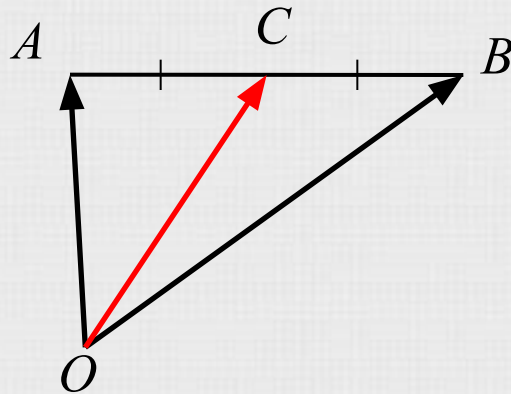
Вектор, проведенный в точку пересечения  
диагоналей параллелограмма

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда



# Вектор, проведенный в середину отрезка,

*равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.*

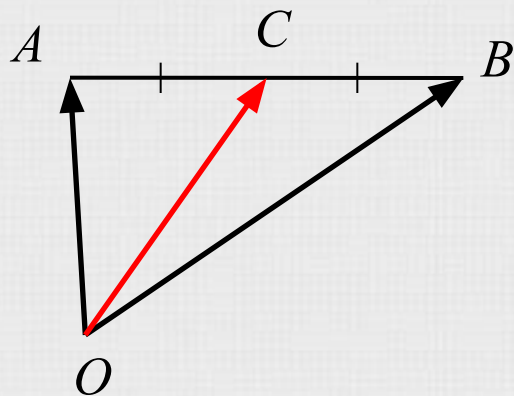


$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$$

Доказательство



# Доказательство



Дано :

$AB$  – отрезок

$AC = CB$

Доказать :

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \\ \vec{OC} &= \vec{OB} + \vec{BC} \end{aligned} \right| +$$

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AC} + \vec{BC})$$

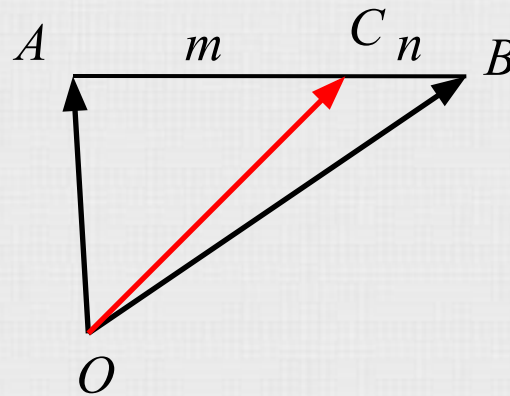
$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad | \div 2$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \quad | \text{ч.т.д.}$$



# Вектор, проведенный в точку отрезка

*Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $m : n$ .*

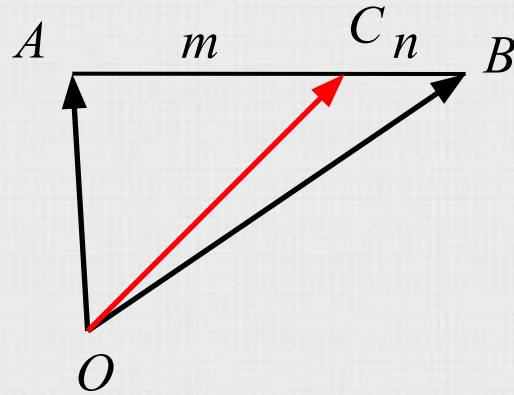


$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

Доказательство



# Доказательство



Дано :

$AB$  – отрезок

$$AC = m$$

$$CB = n$$

Доказать :

Доказательство :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

$$\vec{AC} = \frac{m}{m+n} \vec{AB} = \frac{m}{m+n} (\vec{OB} - \vec{OA})$$

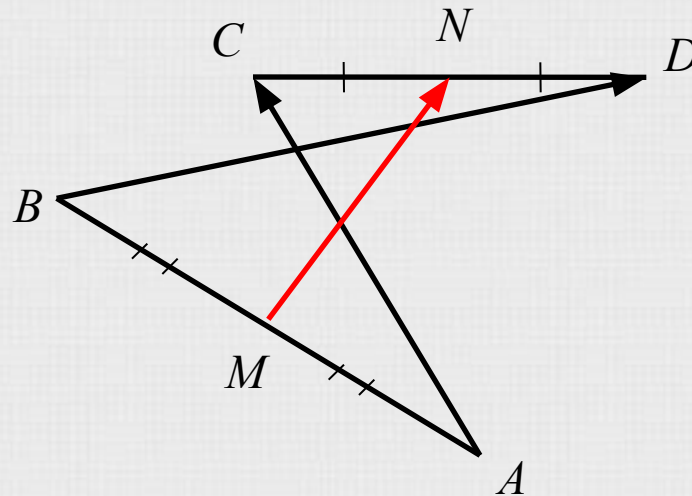
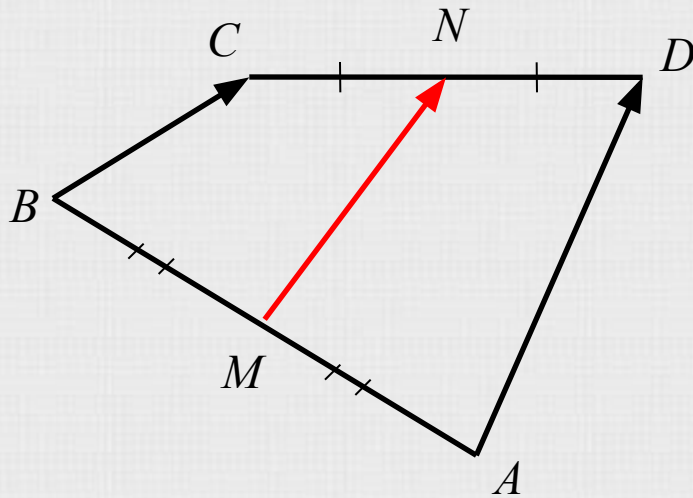
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB} - \frac{m}{m+n} \vec{OA} =$$

$$= \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB} \text{ ч.т.д.}$$



# Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

*равен полусумме векторов, соединяющих их концы.*



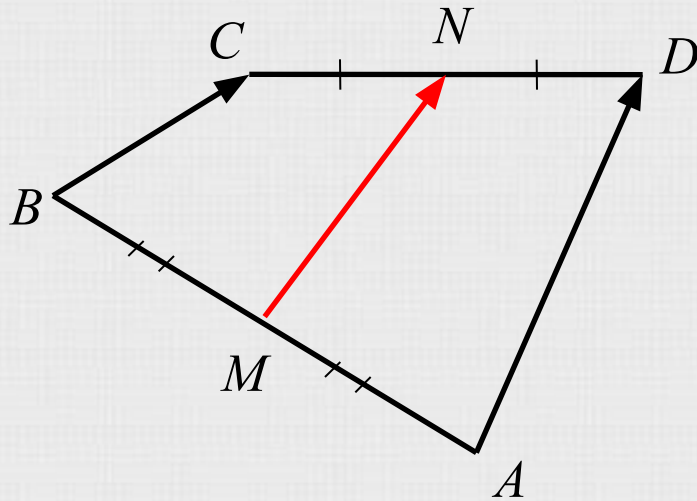
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство





# Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{aligned} \right\} +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

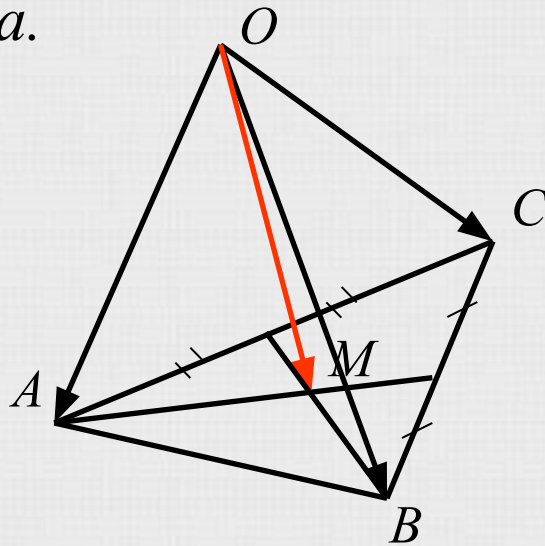
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$



# Вектор, проведенный в центроид треугольника,

*равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.*

**Центроид** – точка пересечения медиан треугольника.

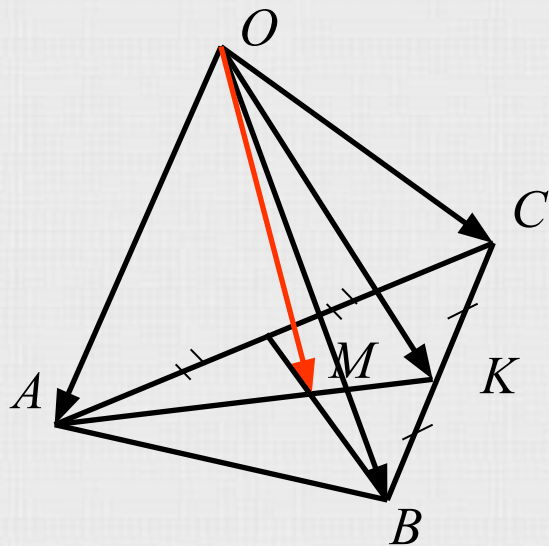


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

[Доказательство](#)



# Доказательство



Дано :

$\triangle ABC$

$M$  – центр тяжести

Доказать :

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

Доказательство :

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OK} =$$

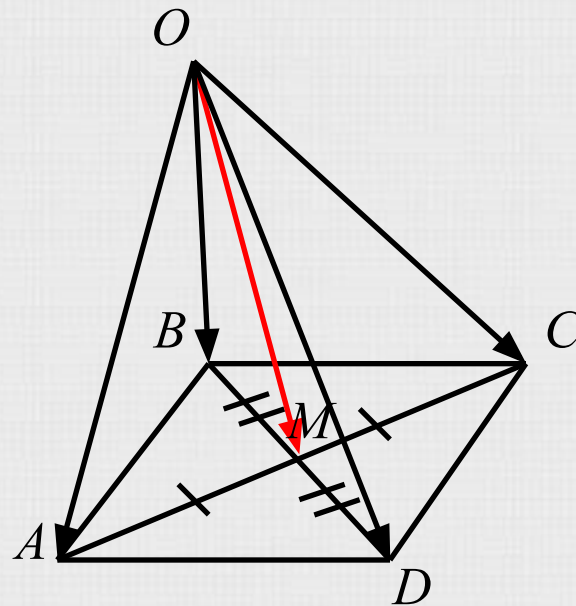
$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \text{ ч.т.д.}$$



# Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

*равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.*

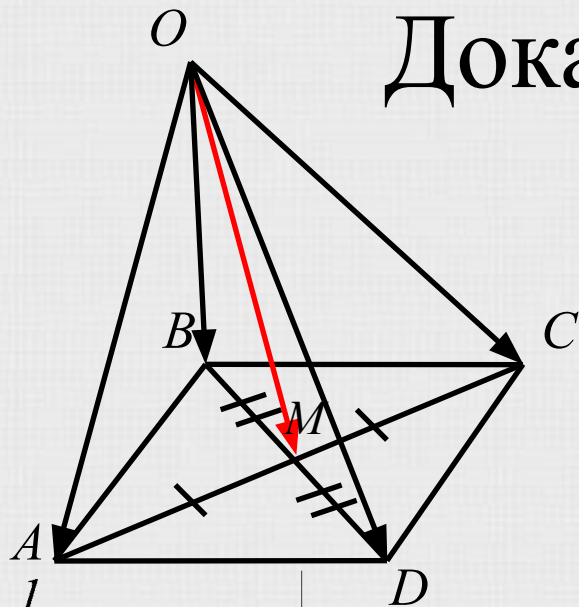


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство



# Доказательство



Дано :

$ABCD$  – пар – м

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned} \quad +$$

$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

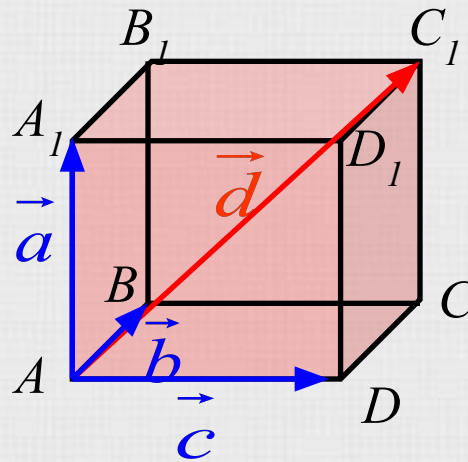
$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \div . \dot{o} . \ddot{a} .$$



# Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда,

*равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах, исходящих из одной вершины.*

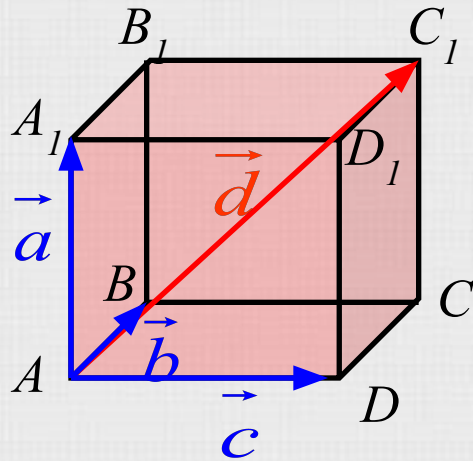


$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство



# Доказательство



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – пар – м

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

Доказательство :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} = \\ &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ ч.т.д.}\end{aligned}$$

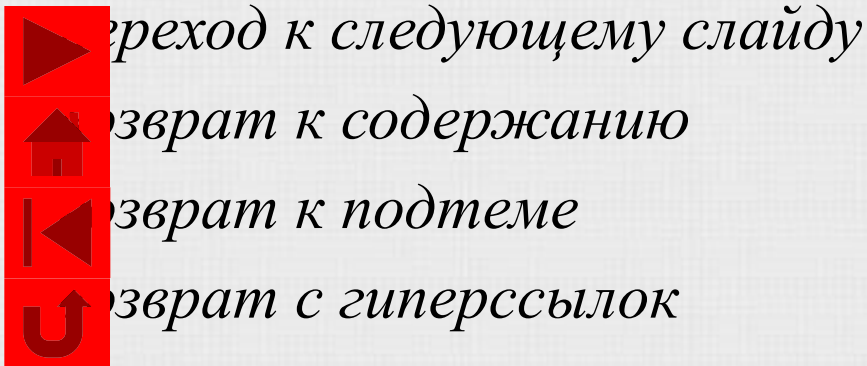
Доказать :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



# Помощь в управлении презентацией

- *управление презентацией осуществляется с помощью левой клавиши мыши*
- *переход от одного слайда к другому и на гиперссылки по одиночному щелчку*
- *завершение презентации при нажатии кнопки выход*





# Проверь себя

- Устные вопросы
- Задача 1 **Задача 1.** Задача на доказательство
- Задача 2. Разложение векторов
- Задача 3. Сложение и вычитание векторов
- Задача 4. Скалярное произведение



# Устные вопросы

*Справедливо ли утверждение:*

*а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны?*

*б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены?*

*в) любые два равных вектора коллинеарны?*

*г) любые два сонаправленных вектора равны?*

*д) если  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ,  $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ , то  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$ ?*

*е) существуют векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  такие, что  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  не коллинеарны,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  не коллинеарны, а  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны?*

Ответ

ы



# Ответы

*а) ДА*

*б) НЕТ (могут быть и противоположно направленными)*

*в) ДА*

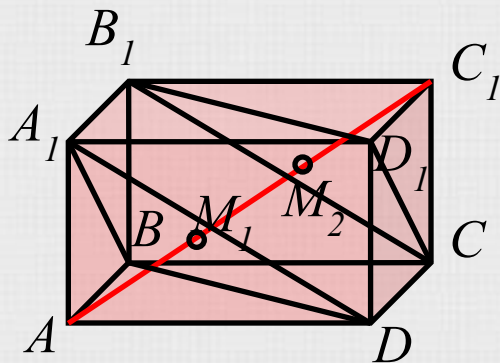
*г) НЕТ (могут иметь разную длину)*

*д) ДА*

*е) ДА*



# Задача 1. Задача на доказателство



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – пар – д  
 $M_1, M_2$  – точки пересечения  
медиан  $\triangle A_1 B D$  и  $\triangle D_1 C B_1$   
соответственно

Доказать :

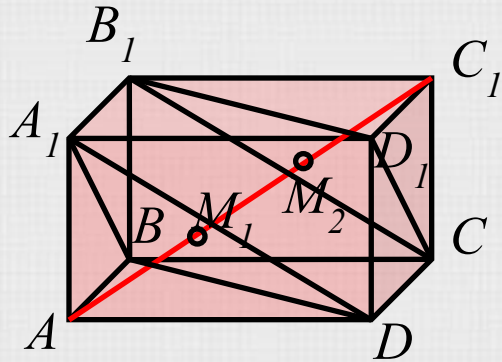
$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Решени

e



# Решение



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – пар – д  
 $M_1, M_2$  – точки пересечения  
медиан  $\triangle A_1 B D$  и  $\triangle D_1 C B_1$

соответственно

Доказать :

$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Доказательство :

Рассм. тетраэдр  $AA_1 B D$

$M_1$  – центр оид  $\triangle A_1 M_1 B$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ по правилу пар – да}$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$M \in AC_1, AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

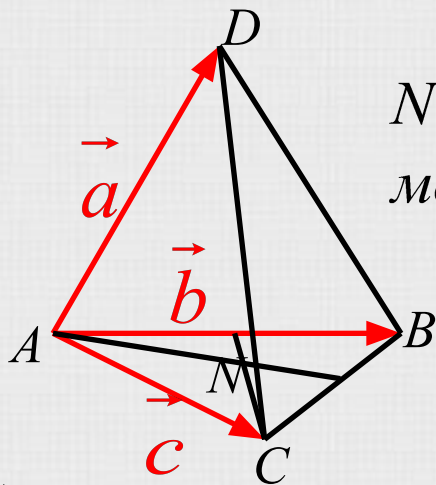
$$\text{аналогично } M_2 \in AC_1, C_1 M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

следовательно  $AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$  ч.т.д.



# Задача 2. Разложение векторов

Разложите вектор по  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :



$N$  – точка пересечения  
медиан  $\triangle ABC$

- a)  $\overrightarrow{DB}$
- б)  $\overrightarrow{CB}$
- в)  $\overrightarrow{DC}$
- г)  $\overrightarrow{DN}$

Решение



# Решение

$$a) \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$б) \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$в) \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$г) \overrightarrow{DN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \right) =$$
$$= -\vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c}$$



# Задача 3. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

а)  $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK}$

б)  $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

в)  $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST}$

г)  $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}$

д)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$

е)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

Решение





# Решение

$$a) \quad \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CK}$$

$$б) \quad \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA}$$

$$в) \quad \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TD}$$

$$г) \quad \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KL}$$

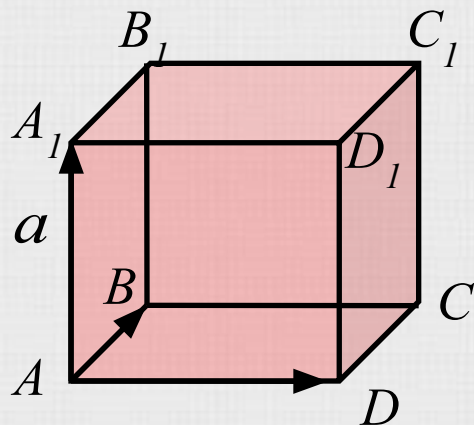
$$\begin{aligned} д) \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} &= \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} = \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} &= \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} = \\ &= \overrightarrow{AK} \end{aligned}$$



# Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1$  – куб

$$|\overrightarrow{AB}| = a$$

а)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$

б)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$

в)  $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г)  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

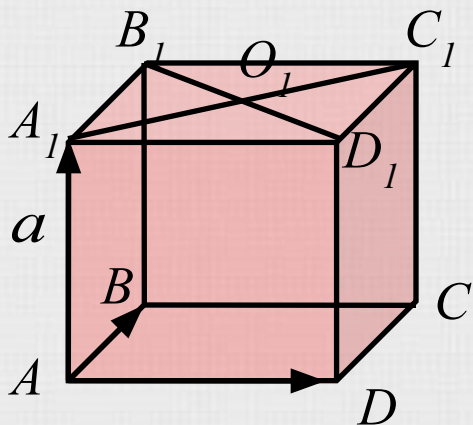
Решени

e



# Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1$  – куб

$$|\overrightarrow{AB}| = a$$

$$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$$

д)  $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

е)  $\overrightarrow{DO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$

ж)  $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

Решени

е



# Решение

$$а) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = a^2$$

б)  $AC$  – диагональ квадрата

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{A_1C_1} = -\overrightarrow{C_1A_1} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} &= \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{A_1C_1}) = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -(a\sqrt{2})^2 = -2a^2 \end{aligned}$$

в)  $D_1B$  – диагональ куба

$$D_1B = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}a \text{ (т. Пифагора из } \triangle DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^3 \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \sqrt{3}$$

г)  $BA_1, BC_1$  – диагонали квадратов

$\triangle A_1BC_1$  – равносторонний,  $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$



# Решение

д)  $A_1O_1$  – половина диагонали квадрата

$A_1C_1$  – диагональ квадрата

$$\angle O_1A_1C_1 = 0^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

е)  $D_1O_1, B_1O_1$  – половины диагонали квадрата

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$



# Решение

ж) I способ – решение по определению:

$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$C_1B$  – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1} \cdot (-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису:

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \\ & - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2) = -\left(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2\right) = -\frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

