Физические основы механики

Семестр 1

Лекция №7

1. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Связь между кинетической энергией вращающегося твердого тела и работой.
2. Физический маятник и его основные характеристики.
3. Полная система уравнений, описывающая произвольное движение свободного тела.
4. Условия равновесия абсолютно твердого тела. Статически неопределённые системы.
5. Скатывание тел по наклонной плоскости.
6. Элементы динамики жидкости.

Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная, поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех *n* материальных точек, на которое это тело можно мысленно разбить:

$$\boxed{E_{кин.} = K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}}$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси *z* с угловой скоростью ω, то линейная скорость *i*-й точки $\upsilon_i = \omega R_i$. Следовательно,

$$E_{кин.вращ.} = K_{\text{вращ.}} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

$$\boxed{E_{кин.вращ.} = K_{\text{вращ.}} = \frac{I\omega^2}{2}}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

Можно увидеть, что ***момент инерции тела I – является мерой инертности*** при вращательном движении. Так же как масса ***m*** – ***мера инерции при поступательном движении.***

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде ***суммы*** ***двух движений*** – ***поступательного*** ***со скоростью*** υ_c ***и*** ***вращательного*** ***с угловой*** ω ***скоростью*** вокруг мгновенной оси, проходящей **через центр инерции**. ***Полная кинетическая энергия этого тела:***

$$\boxed{E_{кин.полн.} = K_{\text{полн.}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}}$$

Здесь I_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции, а υ_c - скорость центра масс.

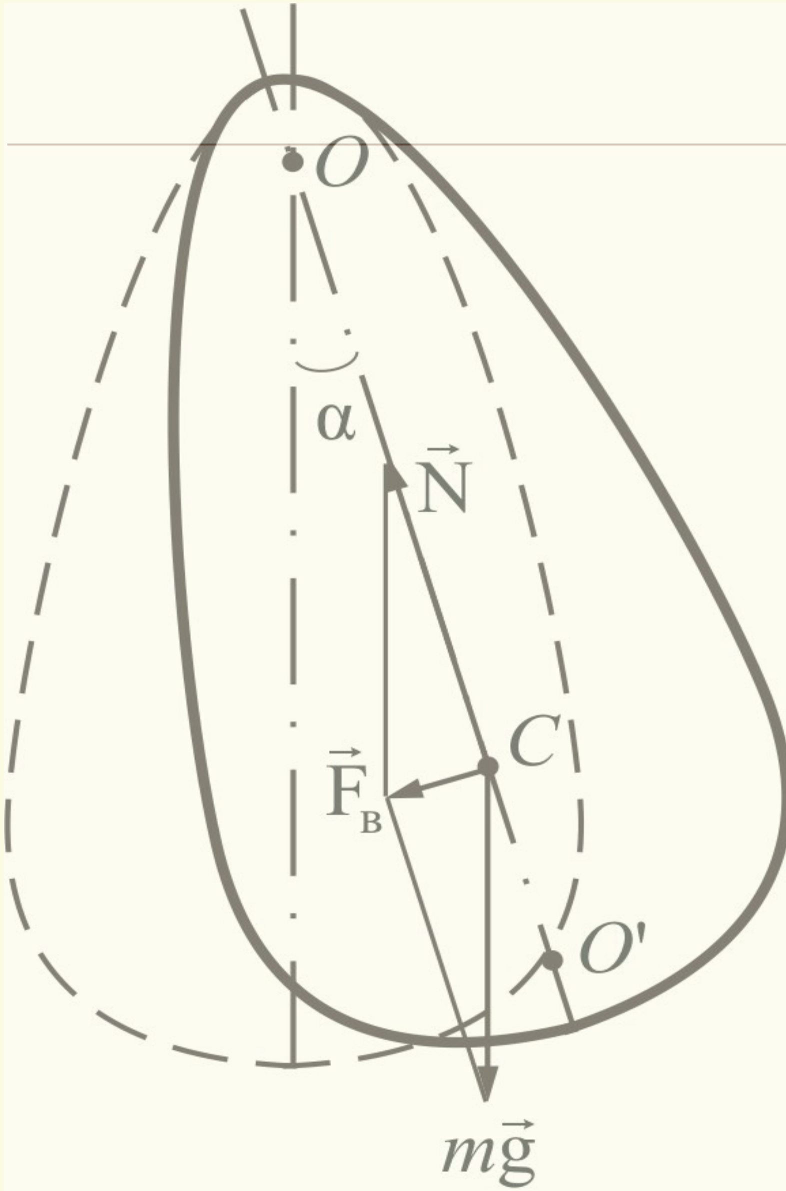
Изменение dK кинетической энергии вращающегося тела обусловлено работой dA внутренних и внешних сил. В модели абсолютно твердого тела работа внутренних сил равна нулю, поэтому изменение кинетической энергии вращающегося тела обусловлено только работой внешних сил, создающих вращающий момент:

$$dA = \sum_i (\vec{F}_i \, d\vec{r}_i) = \sum_i (\vec{F}_i \vec{V}_i) dt = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp} \cos\alpha_i \omega dt = \sum_i M_{iz} d\varphi = M_z^{внешн} d\varphi$$

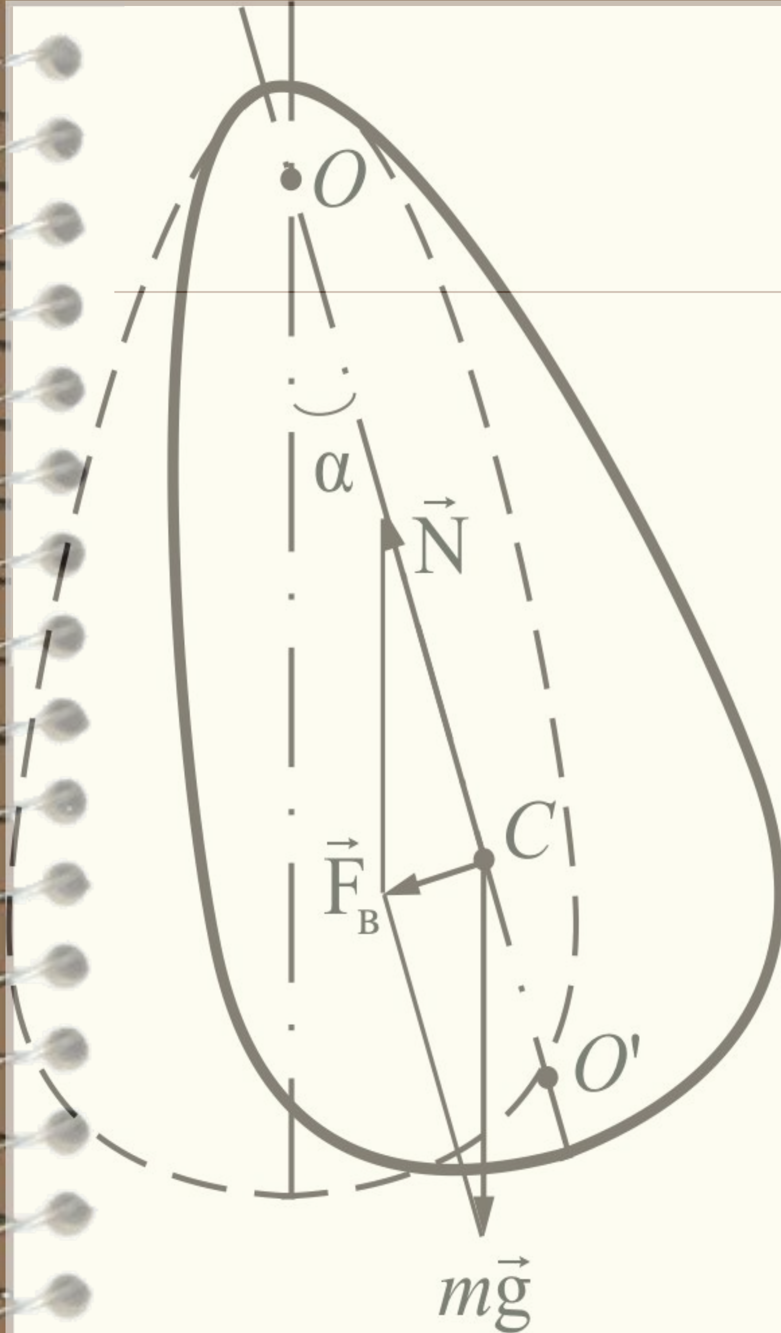
Полная работа будет:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z^{внеш} d\varphi = M_z^{внешн} \varphi$$

Физический маятник



Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса О, не совпадающую с центром масс С.



Вращающий момент маятника:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{g}]$$

$$M = -mgr\sin\alpha$$

r – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника *O-C*. Обозначим:

***I_0* – момент инерции** маятника относительно точки подвеса *O*.

Применим *уравнение моментов* относительно неподвижной оси для описания движения физического маятника: $\boxed{I_0 \cdot \varepsilon = M}$

$\varepsilon = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$ – угловое ускорение, тогда ***уравнение динамики вращательного движения***

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgr\sin\alpha$$

для малых углов: $\sin\alpha = \alpha$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$$

где $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{mgr}{I_0}}$

Решение уравнения:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Период: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{mgr}}}$

Полная система уравнений движения твёрдого тела

Рассмотрим общий случай движения свободного абсолютно твердого тела без каких-либо связей под действием некоторой системы **внешних сил** $\vec{F}_1^{\,внешн}$, $\vec{F}_2^{\,внешн}, \ldots, \vec{F}_n^{\,внешн}$. Эту систему внешних сил можно всегда привести к центру масс тела О и заменить **результирующей силой:**

$$\vec{F}^{\,внешн} = \vec{F}_1^{\,внешн} + \vec{F}_2^{\,внешн} + \ldots + \vec{F}_n^{\,внешн},$$

приложенной в точке О, и **суммарным моментом внешних сил** относительно этой же точки О :

$$\vec{M}_0^{\,внешн} = \vec{M}_{01}^{\,внешн} + \vec{M}_{02}^{\,внешн} + \ldots + \vec{M}_{0n}^{\,внешн}.$$

В результате <u>полная система уравнений, описывающая произвольное движение абсолютно твердого тела</u>, принимает вид:

В результате полная система уравнений, описывающая произвольное движение абсолютно твердого тела, принимает вид:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\vec{\upsilon}_0}{dt} = \vec{F}^{внешн} \\ \dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{внешн} \end{cases}$$

где m-масса тела, $\vec{\upsilon}_0$ - скорость движения центра масс тела и $\vec{L}_0$ - момент импульса тела относительно его центра масс. Здесь необходимо отметить, что уравнение моментов относительно движущегося центра масс по своей форме совпадает с уравнением моментов относительно неподвижной точки.

Условия равновесия абсолютно твердого тела включают в себя два кинематических условия:

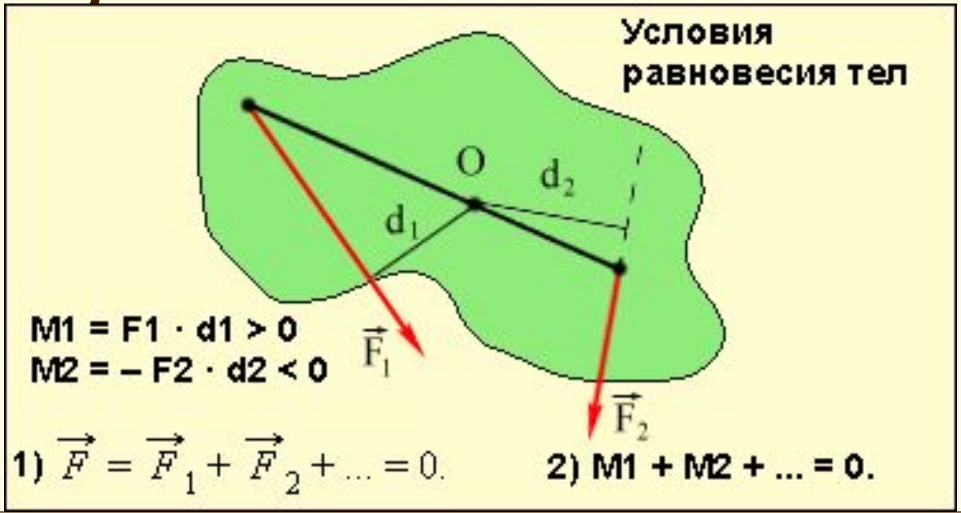
$$\begin{cases} \vec{\upsilon}_0 = 0 \\ \vec{L}_0 = 0 \end{cases}$$

и два динамических условия:

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{внешн.}} = 0 \\ \vec{M}_0^{\text{внешн.}} = 0 \end{cases}$$

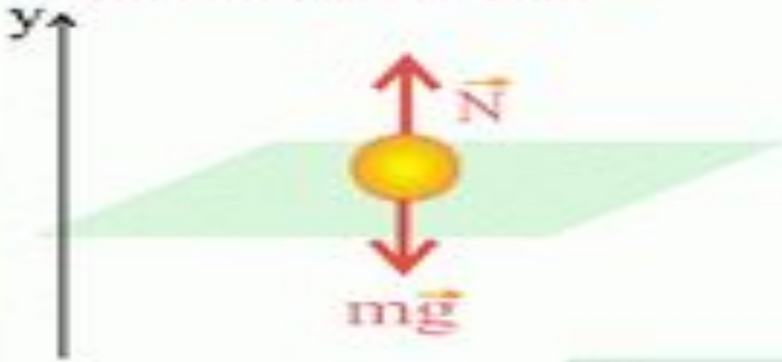
которые вытекают из уравнений движения.

***Число внешних сил*, действующих на тело и определяющих его положение равновесия, зависит от *числа контактов этого тела с другими телами*. Система уравнений описывающая равновесие абсолютно твёрдого тела позволяет определить *не более двух сил реакции опоры*. При большем числе опор состояние равновесия становится статически неопределенным и для его количественного описания необходим учет деформаций, т.е. отказ от модели абсолютно твердого тела.**



Условие равновесия тел

Материальная точка



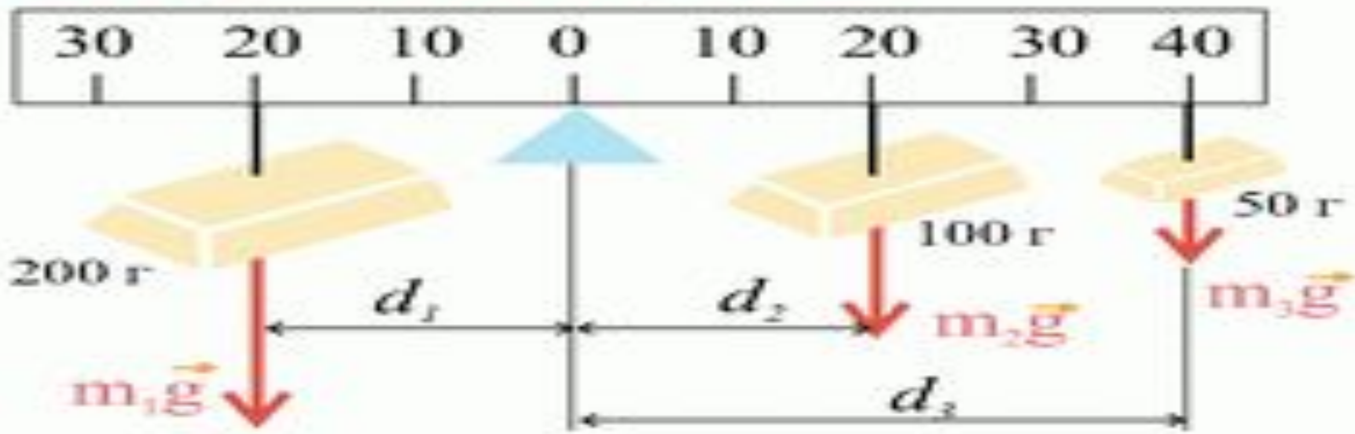
$$\vec{N} + m\vec{g} = 0$$

oy) $N - mg = 0$

$$N = mg$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = 0}$$

Тело с неподвижной осью вращения

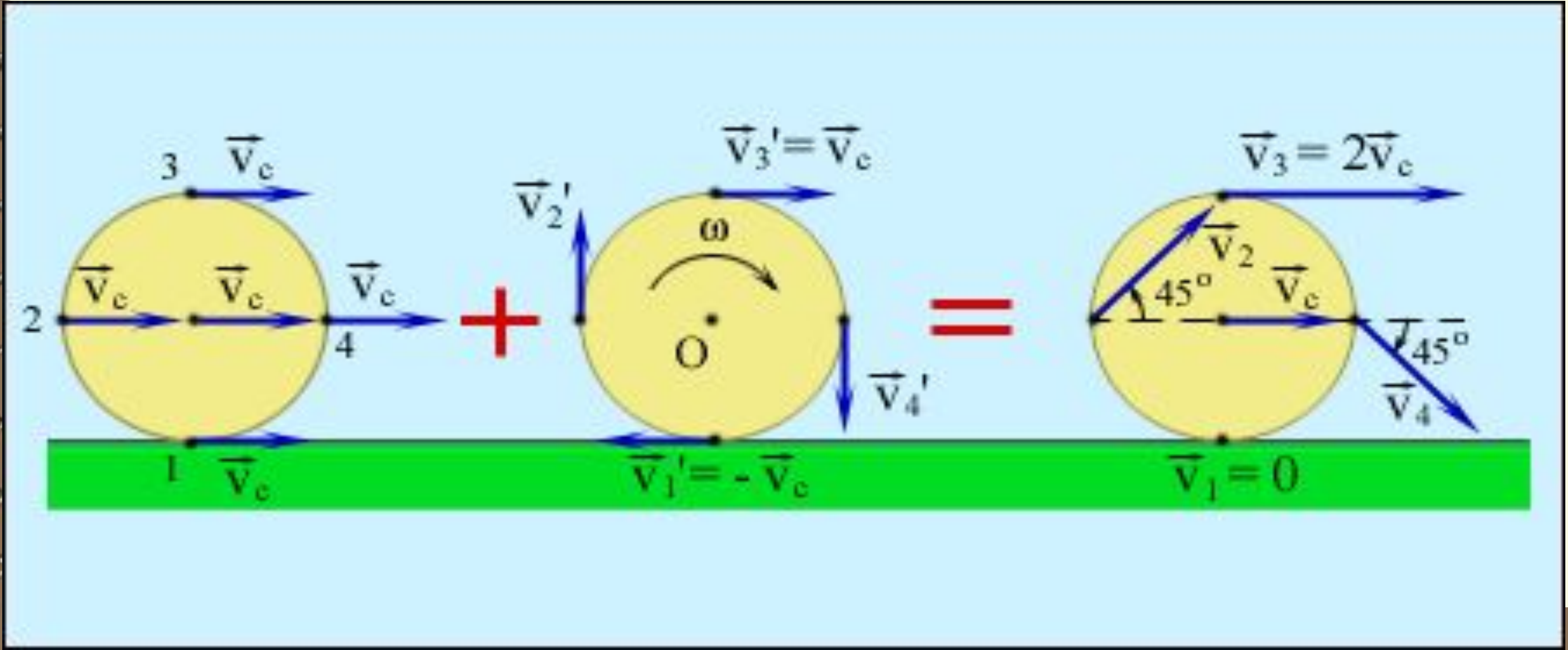


$$m_2 g d_2 + m_3 g d_3 - m_1 g d_1 = 0$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = 0 \quad \sum M_i = 0}$$

Плоскопараллельное или плоское движение твёрдого тела

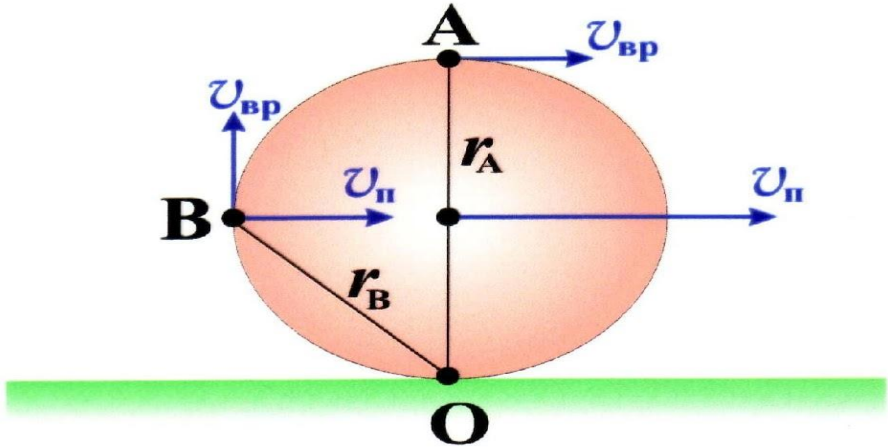
Одно из простых движений абсолютно твердого тела - <u>плоскопараллельное или плоское</u>. В этом случае все точки твердого тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.



Плоское движение

Движение тела, при котором траектории точек тела лежат в параллельных плоскостях, называются ***плоским***

Это движение можно представить двумя способами



как сумму поступательного движения тела, например центра масс со скоростью $\vec{\upsilon}_п$ и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс $\vec{\upsilon}_{вр}$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_п + \vec{\upsilon}_{вр}$$

$$\upsilon_A = \upsilon_п + \upsilon_{вр} = 2\,\upsilon_п$$

$$\upsilon_O = \upsilon_п - \upsilon_{вр} = 0$$

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_п^2 + \upsilon_{вр}^2} = \upsilon_п\sqrt{2}$$

только вращательного движения вокруг мгновенной оси O, положение которой непрерывно меняется

$$\omega_{мгн} = \frac{\upsilon_п}{r}$$

$$\upsilon = \omega_{мгн} \cdot r$$

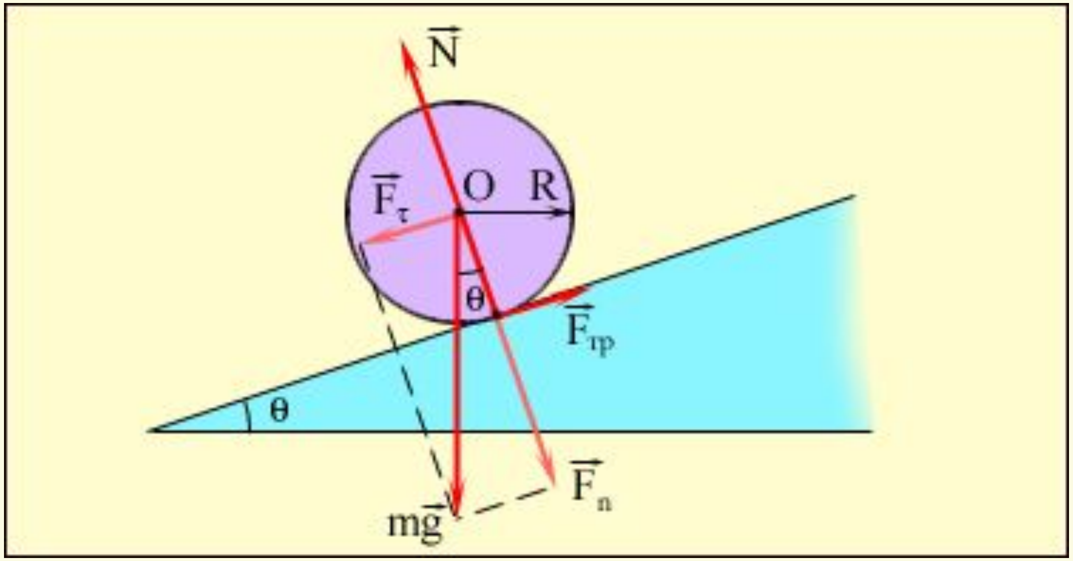
$$\upsilon_A = \frac{\upsilon_п}{r} \cdot r_A = 2\,\upsilon_п$$

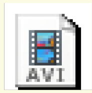
$$\upsilon_O = 0$$

$$\upsilon_B = \frac{\upsilon_п}{r} \cdot r_B = \upsilon_п\sqrt{2}$$

Скатывание тел

Примером плоского движения твердого тела является скатывание цилиндра без проскальзывания по наклонной плоскости, где все точки цилиндра движутся в параллельных вертикальных плоскостях, перпендикулярных оси симметрии цилиндра, вокруг которой он вращается.





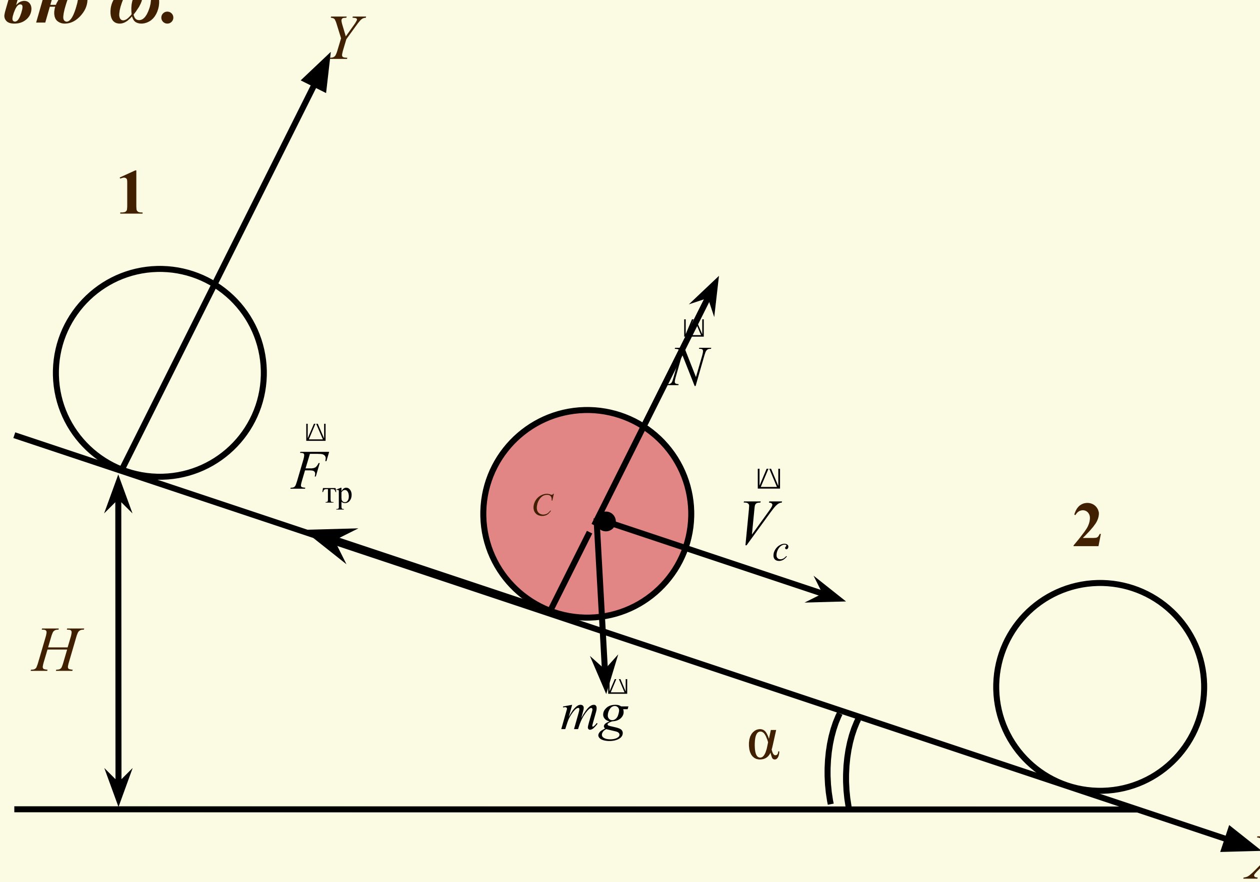
angl.avi

Применим законы динамики твёрдого тела для решения задачи о скатывании цилиндра с наклонной плоскости.

Сплошной цилиндр массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости — α, а высота H или h (H » R). Начальная скорость цилиндра равна нулю. Определим время скатывания — t и скорость центра масс цилиндра у основания наклонной плоскости.

При качении цилиндра на него действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, $\vec{N}$ упругая сила реакции опоры и $\vec{F}_{тр}$ сила трения покоя (ведь качение без проскальзывания!).

Представим это движение суммой двух движений: поступательного со скоростью V_C, с которой движется ось цилиндра, и вращательного вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω.



Связь скоростей поступательного и вращательного движений следует из условия «движение без проскальзывания»: $\omega = \dfrac{V_c}{R}$.

Продифференцировав это уравнение по времени, получим соотношение углового и линейного ускорений цилиндра: $\dot{\omega} = \dot{V} / R$, то есть $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$

Воспользовавшись теоремой о движении центра масс, опишем поступательное движение цилиндра:

$$\sum \vec{F}^{\text{внешн}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}_C$$

Спроецировав уравнение на направления осей x и y, получим два скалярных уравнения:

x: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_C$;

y: $N - mg\cos\alpha = 0$.

Для описания вращения воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения: $M_C = I_C \cdot \varepsilon$.

Из трёх названных сил момент относительно оси цилиндра создаёт только сила трения:

$M_C = M(\vec{F}_{тр}) = F_{тр} \cdot R$ ***. Момент инерции сплошного цилиндра относительно его оси равен*** $I_C = \frac{1}{2} mR^2$

Учитывая всё это, уравнение моментов перепишем так:

$$F_{тр} R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_C}{R} = \frac{1}{2} mR \cdot a_C$$

Решая совместно уравнения, движение получим следующие значения неизвестных величин:

$$F_{тр} = \frac{1}{3} mg \operatorname{Sin} \alpha \qquad a_c = \frac{2}{3} g \operatorname{Sin} \alpha$$

Из предыдущего уравнения следует, что с увеличением угла наклона α должна возрастать и сила трения покоя $F_{тр}$. Но, как известно, её рост ограничен предельным значением:

$$F_{тр_{ск}} = \mu \cdot N = \mu mg \operatorname{Cos} \alpha$$

Так как сила трения покоя не может превышать предельного значения, то должно выполняться неравенство:

$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha$.

Отсюда следует, что скатывание будет происходить без проскальзывания до тех пор, пока угол α не превзойдёт значения $\alpha_{пред}$:

$\alpha_{пред} = \mathrm{arctg}\,3\mu$.

Здесь μ — коэффициент трения цилиндра по плоскости.

Линейное ускорение цилиндра величина неизменная, следовательно, поступательное движение цилиндра равноускоренное. При таком движении без начальной скорости цилиндр достигнет основания наклонной плоскости за время: $t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$ *Здесь:* $l = \frac{h}{\sin\alpha}$ *— длина плоскости;*

$$a_c = \frac{2}{3} g \operatorname{Sin} \alpha$$

Значит, время скатывания: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot 3}{\operatorname{Sin}\alpha \cdot 2g \operatorname{Sin}\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}}$

Вычислим конечную скорость поступательного движения оси цилиндра:

$$V_\mathrm{C} = a_\mathrm{C} t = \frac{2}{3} g \operatorname{Sin}\alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Заметим, что эту задачу можно решить проще, воспользовавшись законом сохранения механической энергии.

В системе, правда, присутствует сила трения, но её работа равна нулю, поскольку точка приложения этой силы в процессе спуска остаётся неподвижной: ведь движение происходит без проскальзывания. Раз нет работы силы трения, механическая энергия системы не меняется.

Рассмотрим энергию цилиндра в начальный момент — на высоте h и в конце спуска. Полная энергия цилиндра в этих положениях одинакова:

$$mgh = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Вспомним, что $I_C = \frac{1}{2}mR^2$ *и* $\omega = \frac{V_C}{R}$. *Тогда уравнение закона сохранения энергии можно переписать так:*

$$mgh = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{V_C^2}{R^2} = \frac{3}{4}mV_C^2$$

Отсюда легко найдём конечную скорость цилиндра:

$$V_C = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

, которая блестяще

подтверждает полученный нами ранее результат.

Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	S	Угол поворота	φ
Скорость	$\upsilon = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$ $S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t \upsilon dt$		$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$

Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты h			
$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$			

Модель жидкости.
Идеальная и неидеальная жидкость.

Жидкость ***есть агрегатное состояние вещества, промежуточное между твердым и газообразным. В макроскопическом подходе различия между твердыми телами и жидкостями могут быть описаны с помощью их деформаций под действием внешней нагрузки. Твердое тело характеризуется собственным объемом и собственной формой, которые изменяются при действии соответствующей внешней нагрузки. Жидкость обладает собственным объемом, но не имеет собственной формы и способна течь при сколь угодно малой сдвиговой нагрузке.***

Форма жидкости определяется формой того сосуда, в котором она находится. С микроскопической точки зрения различия между твердыми телами и жидкостями обусловлены особенностями теплового движения атомов и молекул, образующих твердые тела и жидкости. В твердом теле частицы совершают колебательные движения в малой окрестности устойчивого положения, а в жидкости частицы совершают как колебательное движение, так и переходы из одного устойчивого положения равновесия в другое. В механике жидкости **используется модель сплошной среды**, физические характеристики которой описываются непрерывными функциями координат.

Наше рассмотрение ограничено приближением несжимаемой жидкости, плотность ρ которой сохраняется постоянной.

Реальные жидкости являются сжимаемыми, однако заметное изменение их плотности наблюдается при давлениях 10^7 Па. Отметим, что давление воды в самой глубокой точке Тихого океана (Марианская впадина, глубина 11022 м) порядка 10^8 Па.

Если силами внутреннего трения, действующими между соседними слоями жидкости, текущими с разными скоростями, и теплообменом в жидкости можно пренебречь, то такая жидкость называется идеальной.

В таких жидкостях отсутствует преобразование механической энергии текущей жидкости во внутреннюю энергию (тепло).

Объёмные и поверхностные силы. Давление жидкости. Закон Паскаля.

Силы, *действующие на макроскопический элемент жидкости, обычно делятся на* ***объемные и поверхностные****.* ***Сила тяжести*** *является* ***объемной силой****. Поверхностные силы действуют на элементы поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем жидкости. В зависимости от пространственной ориентации поверхностные силы подразделяются на* ***нормальные и касательные****. Касательные силы действуют по касательной к поверхности, ограничивающей объем рассматриваемой жидкости.*

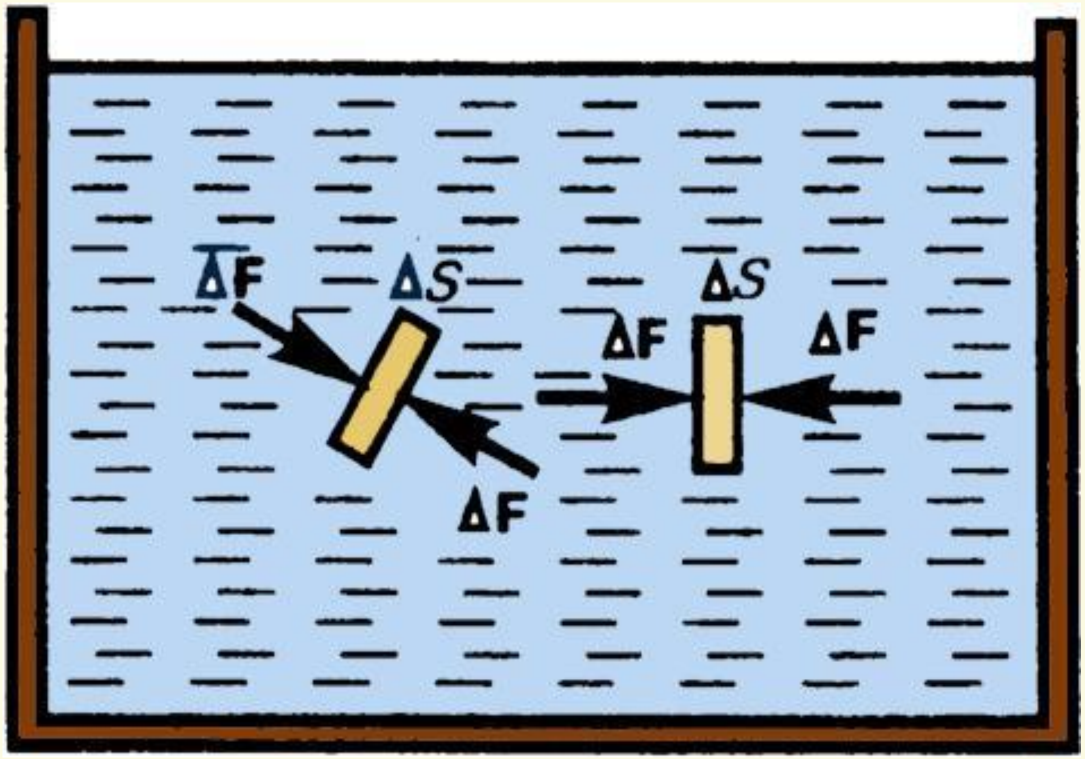
Примерами касательных поверхностных сил могут служить <u>силы поверхностного натяжения и силы внутреннего трения</u>.

Нормальные силы перпендикулярны к поверхности элемента.

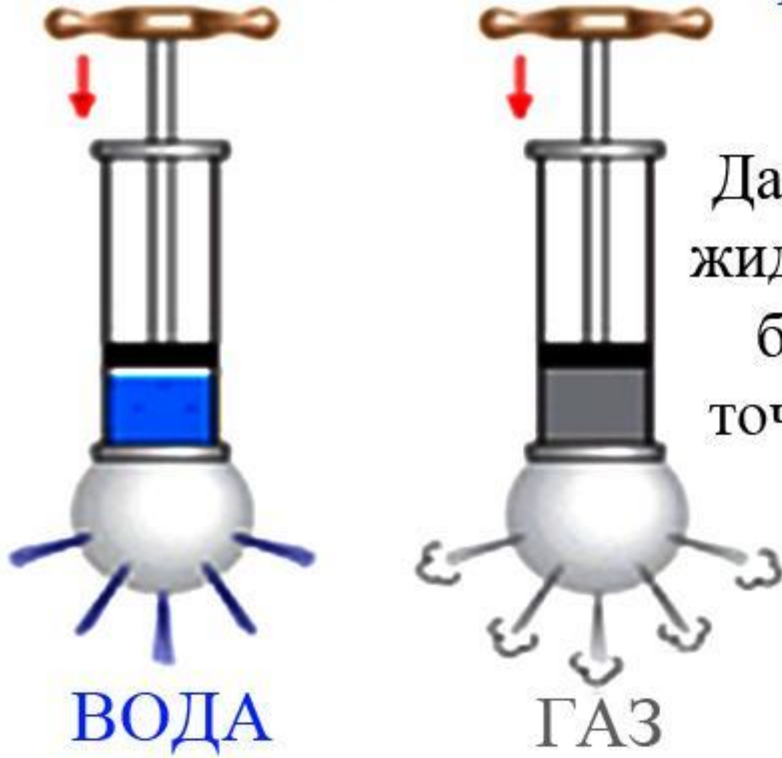
Характеристикой нормальной силы может служить давление, т.е. нормальная сила, отнесённая к единице площади поверхности:

$$\boxed{P = \frac{dF_n}{dS}}$$

В любой точке жидкости **давление одинаково по всем направлениям**, причём давление, производимое внешними силами на поверхность жидкости, **передаётся жидкостью во всех направлениях**. Это положение называется законом Паскаля (Б. Паскаль, 1663г.)



Закон Паскаля. Передача давления

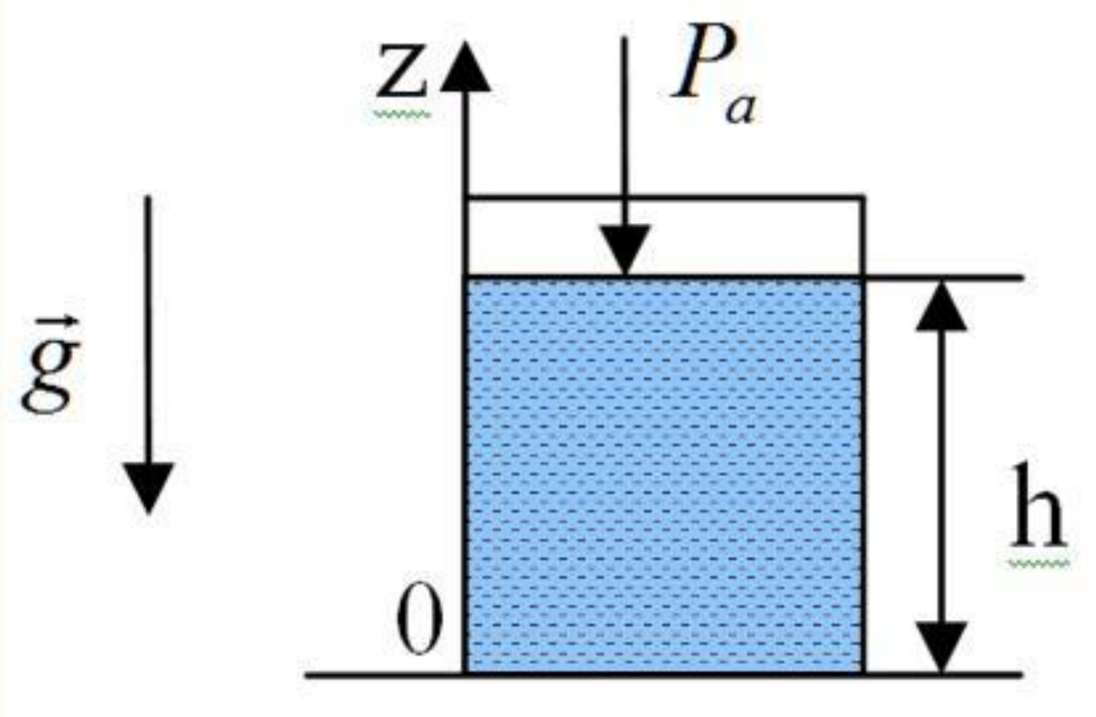


Давление, производимое на жидкость или газ, передаётся без изменения в каждую точку объёма жидкости или газа

Внешние силы, действующие на поверхность жидкости, обычно связаны с атмосферным давлением или поршнем под нагрузкой.

Равновесие идеальной жидкости в однородном поле силы тяжести. Закон Архимеда.

Рассмотрим равновесие идеальной несжимаемой жидкости, налитой в вертикальный сосуд, под действием однородной силы тяжести, когда ускорение свободного падения $\vec{g} = const$ *. Здесь плотность жидкости* ρ *, высота жидкости в сосуде* h *и атмосферное давление, действующее на свободную поверхность жидкости* P_a



Отметим, что свободная поверхность жидкости в однородном поле силы тяжести, всегда является горизонтальной.

Запишем условие равновесия слоя жидкости толщиной **dz**, *находящегося на высоте* **z** *от дна сосуда*

$$\left[P(z) - P(z + dz)\right]S = \rho S dz g$$

где **P(z)** *- давление жидкости на нижней границе слоя,* **P(z+dz)-** *давление жидкости на верхней границе слоя,* **S**- *площадь поперечного сечения сосуда.*

Согласно уравнению, сила тяжести, действующая на выделенный слой жидкости, уравновешена силой, которая обусловлена разностью давлений жидкости на различной высоте. Согласно закону Гука давление жидкости определяется степенью ее деформации (всестороннего сжатия).

Для бесконечно малой толщины слоя ***dz*** *можно приближенно положить*

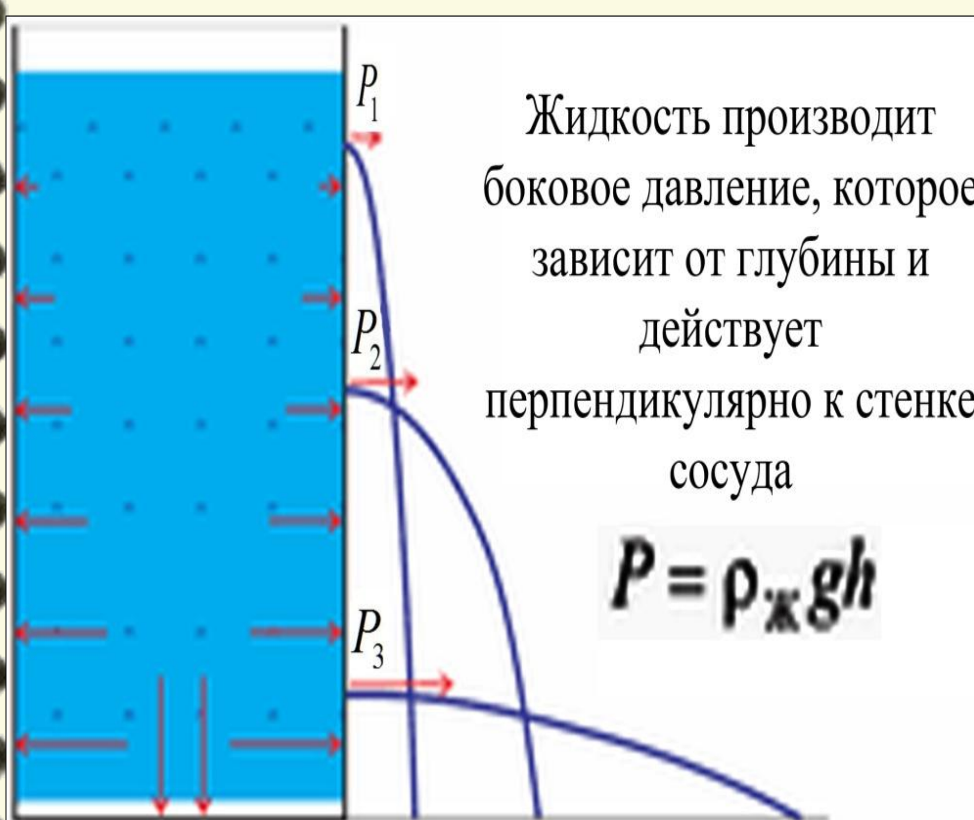
$$P(z + dz) \approx P(z) + \frac{dP}{dz} dz$$

и преобразовать это уравнение равновесия следующим образом

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по аргументу z для нахождения неизвестной функции P(z). Решение этого уравнения с учётом что на поверхности жидкости давление P = P_a имеет вид:

$$P(z) = P_a + \rho g(h - z)$$

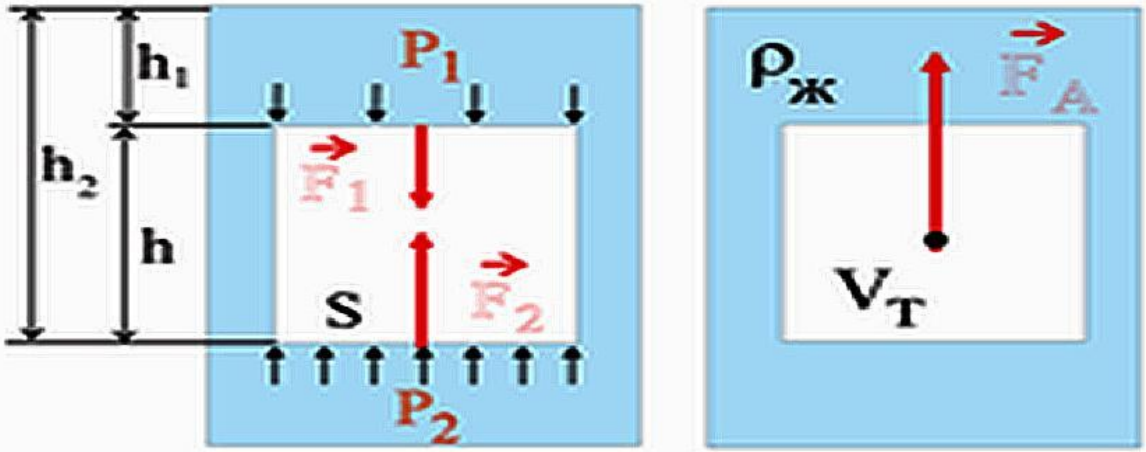


Изменение давления жидкости с глубиной лежит в основе ***закона Архимеда*****: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила,**

равная весу вытесненной телом жидкости.

Интересно отметить, что Архимед (сверхразум) – это прозвище древнегреческого ученого по имени Спор (ок 287 – 212 до н.э.).

Сила Архимеда



Плотность жидкости $\rho_ж$

Ускорение свободного падения g

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \rho_ж g h_1 \\ P_2 &= \rho_ж g h_2 \end{aligned}\right\} P_2 > P_1 \qquad \left.\begin{aligned} F_1 &= P_1 \cdot S \\ F_2 &= P_2 \cdot S \end{aligned}\right\} F_2 > F_1$$

$$F_A = F_2 - F_1 \qquad F_A = \rho_ж g \cdot Sh$$

$$\boxed{F_A = \rho_ж g V_т = m_ж g}$$

Сила Архимеда равна весу жидкости, вытесненой телом, и не зависит от формы погружаемого тела

Кинематика жидкости. Два подхода к описанию движения жидкости. Ламинарное и турбулентное стационарное течение жидкости.

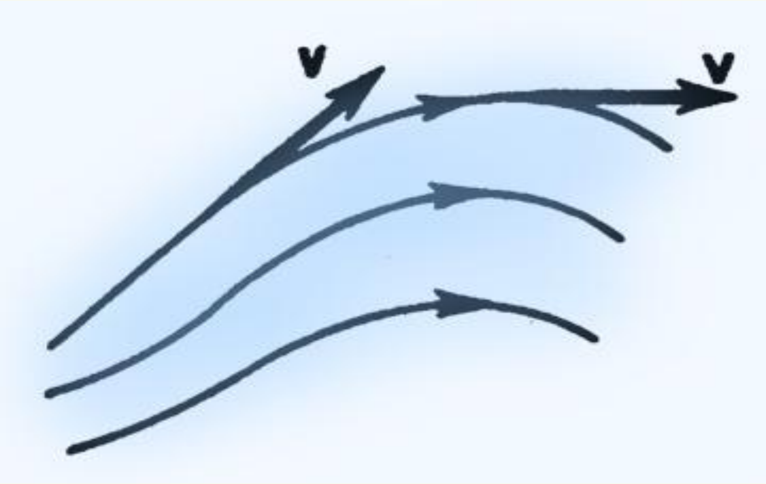
В механике жидкости кроме статики имеется раздел кинематики, где изучаются математические методы описания движения жидкости. Для описания движения жидкости используются два подхода. В первом жидкость рассматривается как совокупность бесконечно малых элементов, для которых записываются соответствующие уравнения движения с учётом объёмных и поверхностных сил. Решения этих уравнений дают радиус-векторы $\vec{r}(t)$ *и векторы скорости* $\vec{v}(t)$ *рассматриваемых элементов жидкости как функции времени* ***t*** *.*

Во втором подходе с каждой точкой пространственной области, занятой жидкостью, связываются физические характеристики, описываемые непрерывными функциями координат и времени: $\vec{v}(\vec{r},t)$, $\vec{p}(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$ и т.д.

В этом случае говорят, что заданы поля соответствующих физических величин.

Для поля скоростей $\vec{v}(\vec{r},t)$ можно построить кривые, касательные к которым определяют положение векторов скорости в данный момент времени.

Эти кривые называются линиями тока. Пучок близких линий тока, расположенных по контуру, образует трубку тока.



Если поле скоростей не зависит от времени, то соответствующее течение жидкости называется **стационарным**. Для стационарного течения траектории движения бесконечно малых элементов жидкости совпадают с соответствующими линиями тока. В случае нестационарного течения это не так. Стационарные течения жидкости делятся на:

1) **Ламинарное**, где соседние слои жидкости скользят **не перемешиваясь** и **поле скоростей является безвихревым** в том смысле, что для любого контура L внутри жидкости для скорости $\vec{v}$ выполняется равенство.

$$\oint_L \left(\vec{v}\vec{\tau}\right) dl = 0$$

2) **Турбулентное, хаотическое**, где возникают **завихрения и перемешивание соседних слоёв жидкости**, характеристики движения жидкости меняются в пространстве и времени случайным образом, при этом **поле скоростей является вихревым** в том смысле, что для любого контура в жидкости.

$$\oint_L (\vec{v}\vec{\tau})\,dl \neq 0$$

На рисунке представлению распределение скорости для ламинарного и турбулентного течения жидкости по трубе:

Всякое течение идеальной жидкости, возникающее из состояния покоя под действием консервативной силы, является безвихревым (ламинарным, потенциальным). ***Учёт сил внутреннего трения*** *(вязкости) при выполнении определённых условий преобразует ламинарное течение в турбулентное. Если для текущей жидкости зафиксировать граничные условия, то* ***переход от ламинарного течения к турбулентному*** *наблюдается при превышении некоторой скорости* $v_{кр.}$*,* ***называемой критической.*** *Величина критической скорости может быть оценена с помощью безразмерной величины называемой* ***числом Рейнольдса****:*

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho l v}{\eta}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho l v}{\eta}$$ - число Рейнольдса

Здесь v - скорость жидкости, l - характерная длина задачи (например, радиус трубы, в которой течёт жидкость) и η - вязкость жидкости.

Критическая скорость определяется выражением:

$$v_{кр} = \frac{\eta}{\rho l} \mathrm{Re}_{кр}$$

где $\mathrm{Re}_{кр}$ - критическое число Рейнольдса, зависящее от гладкости стенок трубы, в которой течёт жидкость, внешних условий, особенностей соединения трубы с источником, откуда поступает жидкость. В случае течения воды по прямолинейной гладкой трубе круглого сечения $\mathrm{Re}_{кр} \approx 10^3 \div 10^4$

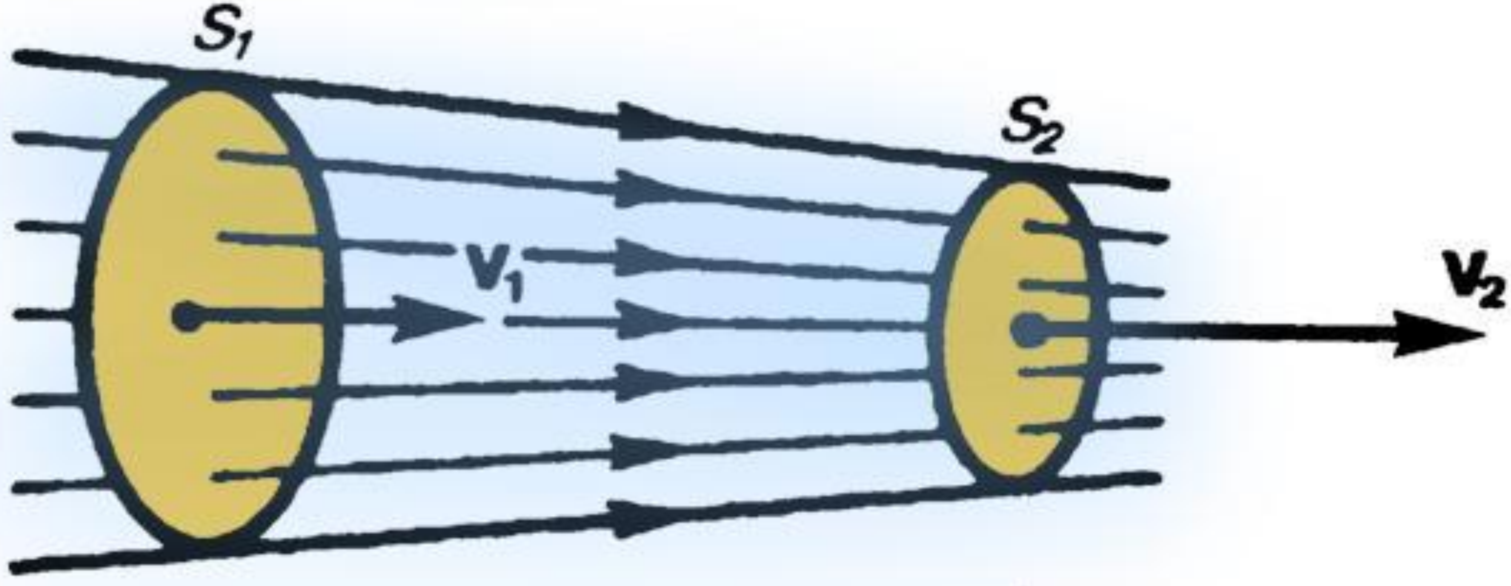
Уравнение неразрывности жидкости и уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости.

Рассмотрим ламинарное стационарное течение жидкости, когда жидкость не втекает и не вытекает через боковую поверхность трубок тока. Вдоль любой трубки тока справедливо ***уравнение неразрывности жидкости****, выражающее* ***постоянство массового расхода жидкости в любом сечении****:*

$$m_1 = m_2$$

где $m_1 = \rho_1 S_1 v_1$ *и* $m_2 = \rho_2 S_2 v_2$ *масса жидкости, проходящей через сечение 1 и 2 соответственно в единицу времени.*

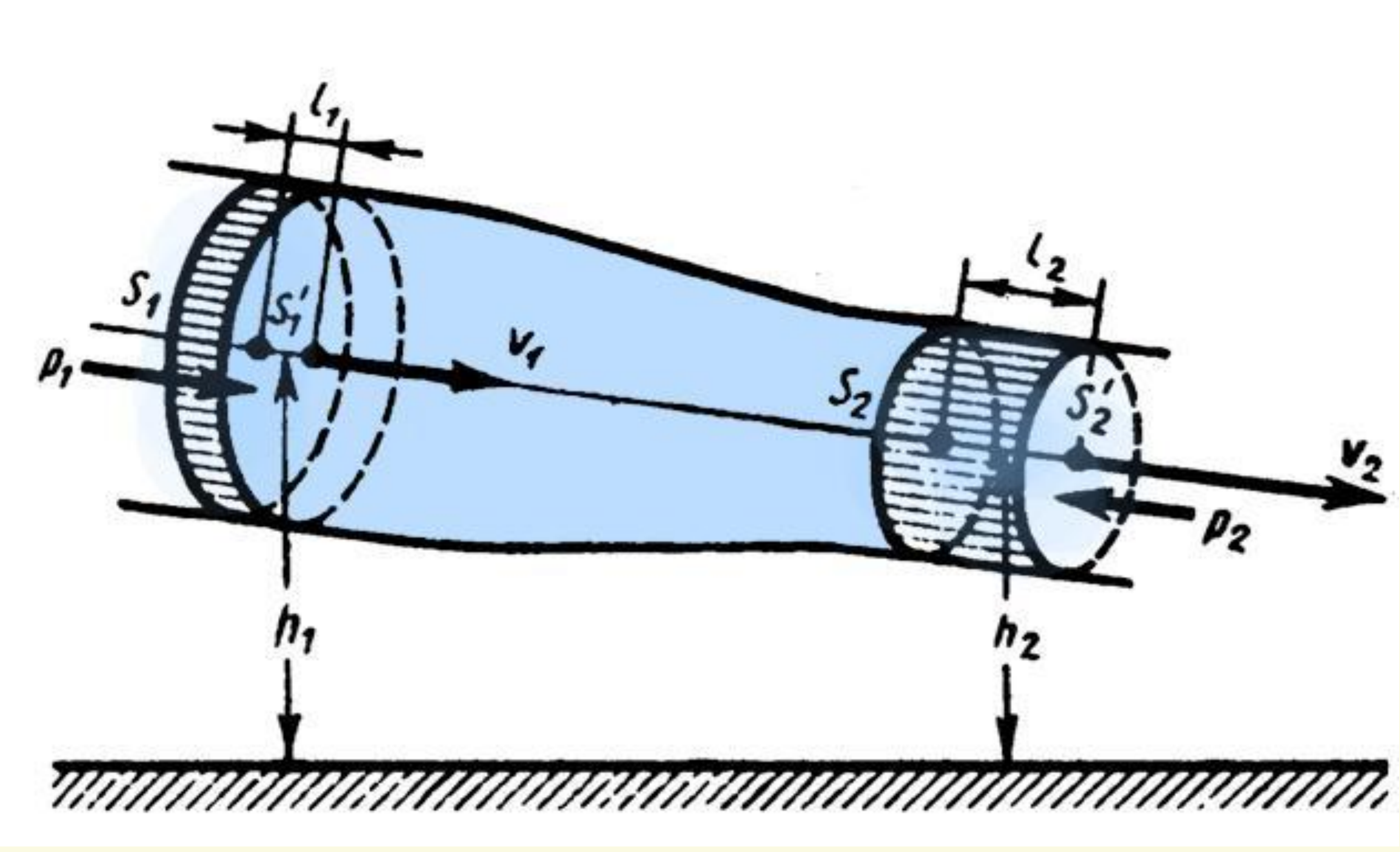
Здесь S_1 и S_2- площади поперечных сечений трубки тока, v_1 и v_2 - скорости течения жидкости в этих сечениях, ρ_1 и ρ_2 - плотность жидкости в сечениях 1 и 2.



Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принемает вид:

$$S_1V_1 = S_2V_2$$

Пусть элемент жидкости единичной массы перемещается внутри некоторой трубки тока под действием силы тяжести и разности давлений.

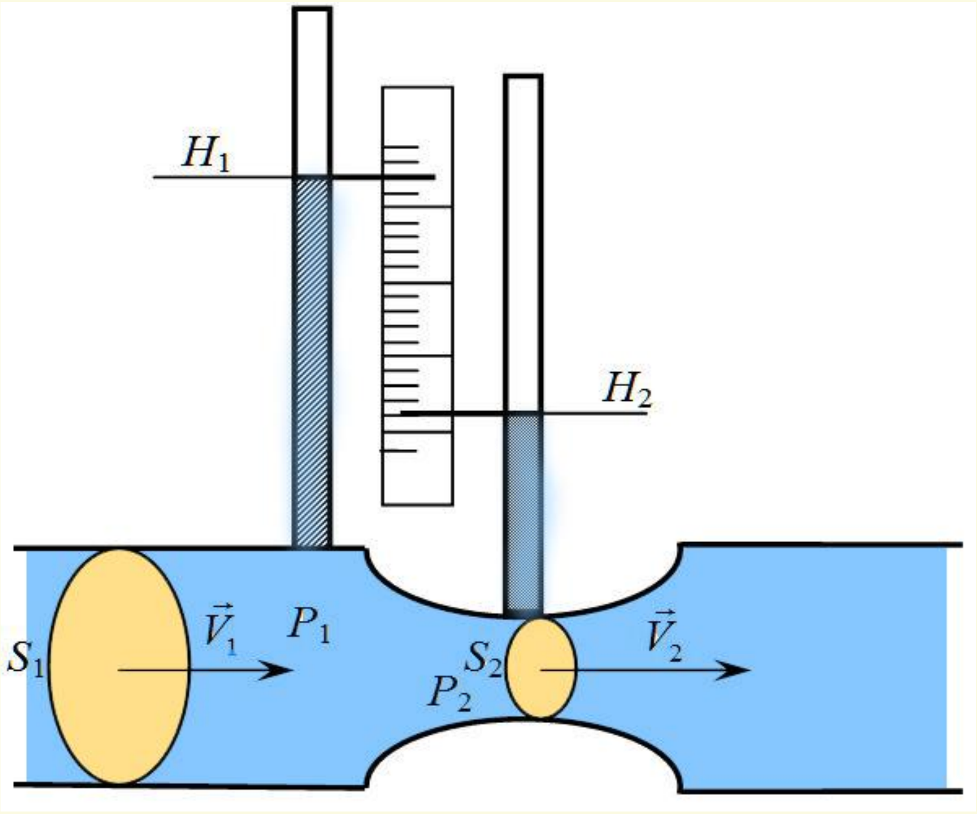


В случае стационарного ламинарного течения идеальной несжимаемой жидкости для этого элемента справедливо уравнение Бернулли (Д. Бернулли, 1738г.)

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = const$$

выражающее закон сохранения механической энергии. Согласно этому уравнению изменение механической энергии элемента обусловлено работой сил давления. Отметим, что для ламинарного безвихревого течения постоянная в правой части уравнения Бернулли одинаковая для всех сечений выбранной трубки тока, но может быть разной для разных трубок тока.

При горизонтальном течении жидкости, когда $h = const$, согласно уравнению Бернулли в области больших скоростей, где уменьшается поперечное сечение трубы, давление уменьшается, а в области меньших скоростей, где увеличивается поперечное сечение, давление возрастает.



Применим уравнение Бернулли для расчёта скорости истечения идеальной несжимаемой жидкости из сосуда через небольшое отверстие под действием силы тяжести.

Плотность жидкости ρ. Уровень жидкости в сосуде **H**. Течение жидкости считается ламинарным. На свободной поверхности жидкости скорость элементов жидкости равна нулю.

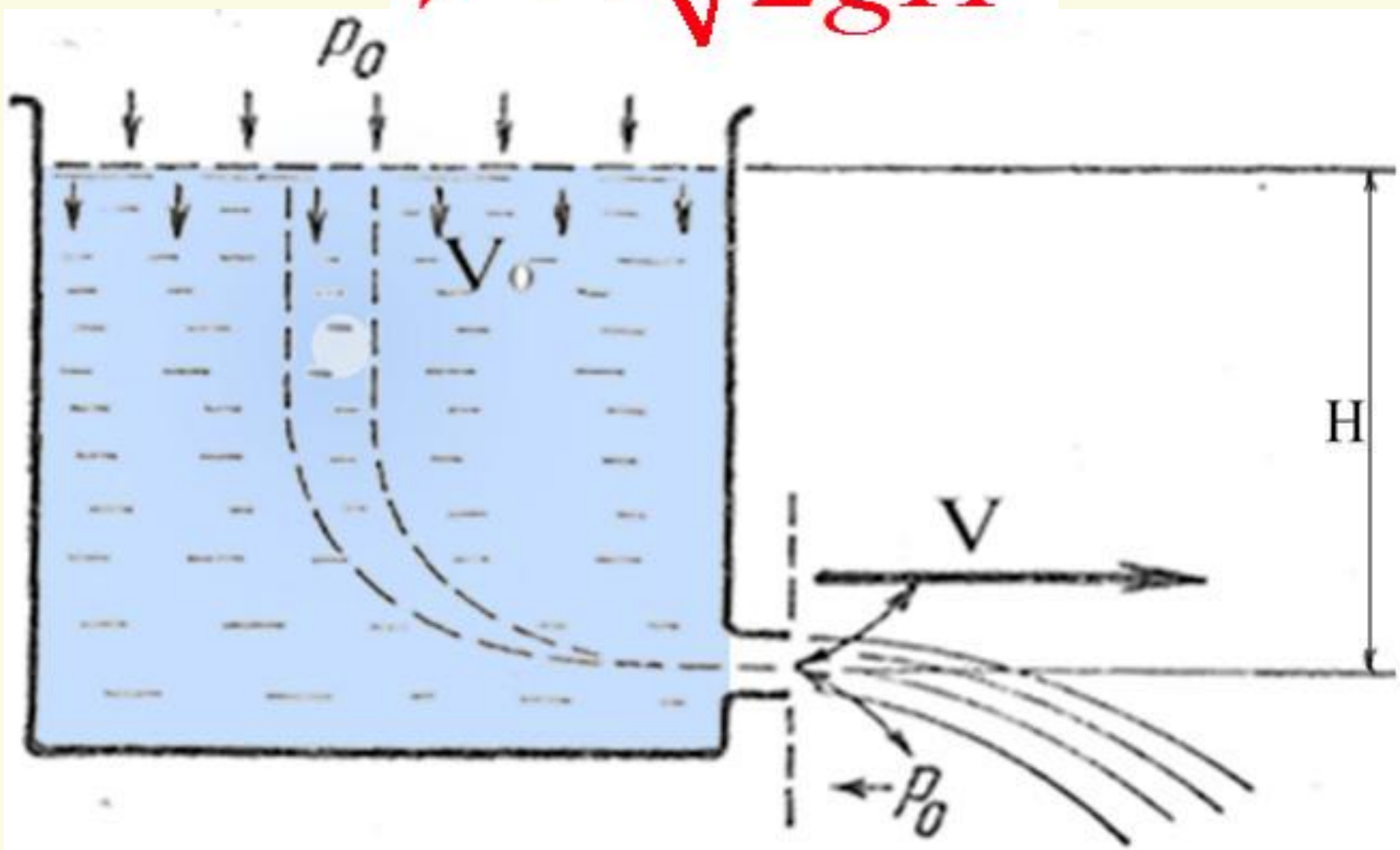
Запишем уравнение Бернулли для элемента жидкости внутри трубки тока, которая начинается в точке 1 на поверхности жидкости и заканчивается в точке 2 отверстия, из которого вытекает жидкость

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{P_2}{\rho_2}.$$

Для $v_1 = 0$, $h_1 - h_2 = H$, $P_1 = P_2 = P_0 = P_a$ - атмосферное давление, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ - плотность жидкости.

из уравнения Бернулли получается формула Торричелли(Э. Торричелли, 1641г.) для скорости истечения жидкости под действием силы тяжести

$$V = \sqrt{2gH}$$



$$V = \sqrt{2gH}$$

Согласно формуле Торричелли ***скорость*** *истечения жидкости не зависит от её плотности и определяется* ***высотой*** *, с которой под действием силы тяжести жидкость спускается до уровня отверстия. В действительности скорость истечения жидкости зависит от размера и формы отверстия, вязкости жидкости и расхода жидкости, поэтому формула Торричелли является приближенной.*

Стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости. Формула Пуазейля.

При действии сил внутреннего трения стационарное течение жидкости в горизонтальной трубе обеспечивается перепадом давления на входе и выходе трубы. В случае ламинарного течения вязкой жидкости плотностью $\rho = const$ в горизонтальной прямолинейной трубе круглого поперечного сечения радиусом R её расход Q , равный массе жидкости, проходящей через поперечное сечения трубы в единицу времени, описывается формулой Пуазейля (Ж. Л. М. Пуазейль, 1840-41гг.)

$$Q = \pi\rho\frac{P_1 - P_2}{8\eta l}R^4$$

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4$$

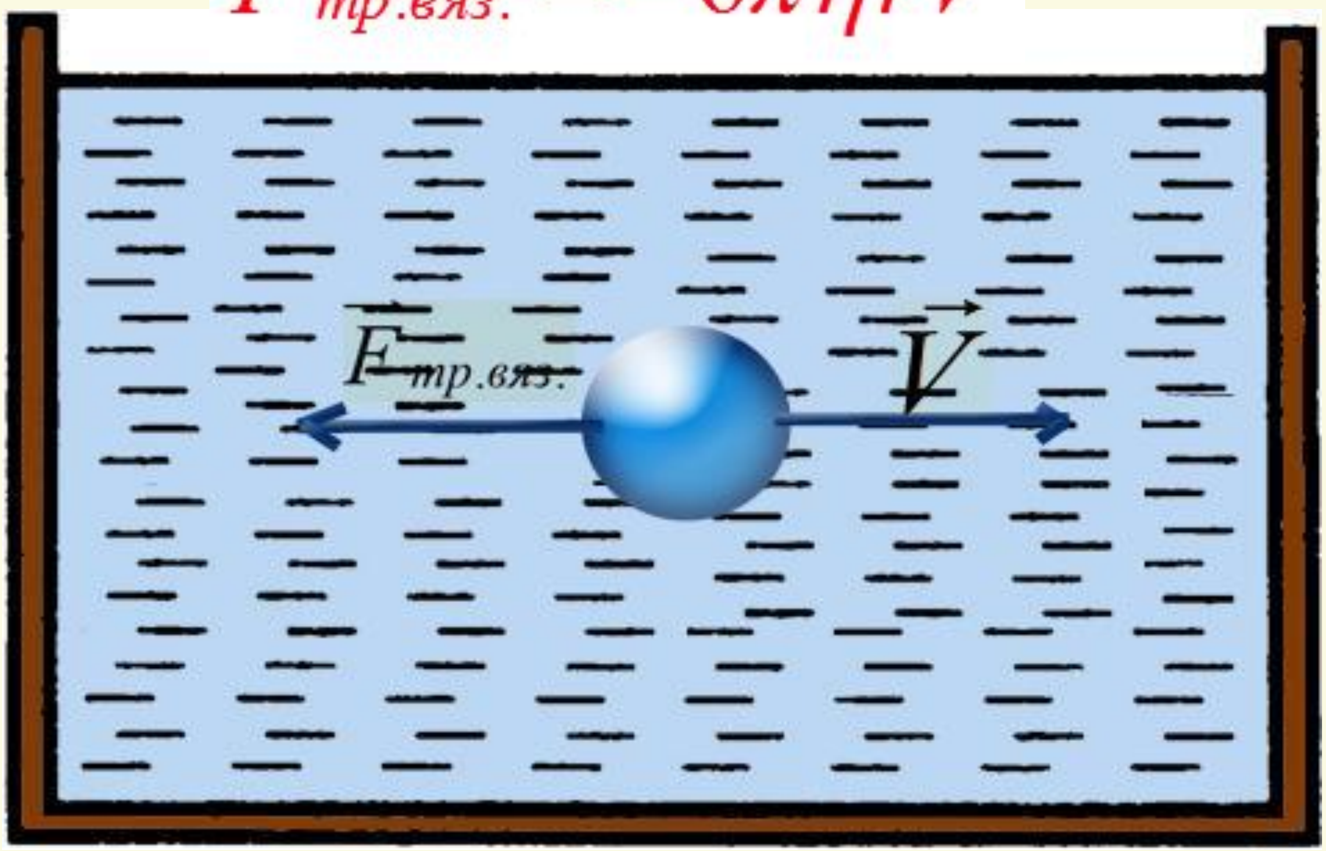
где P_1 и P_2 - давление жидкости соответственно на входе и выходе трубы длиной l, η - вязкость жидкости. Формула достаточно точно описывает стационарное течение вязкой жидкости в тонких и длинных трубках, в частности кровоток в сосудах человека. Сам Ж. Л. М. Пуазейль получил свою формулу, занимаясь физическими аспектами кровообращения. Из формулы Пуазейля следует, что при сужении кровеносных сосудов для сохранения интенсивности кровообмена необходимо увеличивать артериальное давление и, соответственно, нагрузку на сердце.

Неидеальная жидкость. Вязкость.

Модель идеальной жидкости не позволяет описать многие явления в гидродинамике (турбулентность, течение жидкости в граничном слое, силу сопротивления при движении тела в жидкости и т. д.). ***Вязкость жидкости****, связывающая* ***хаотическое тепловое движение молекул с макроскопическим движением жидкости****, даёт возможность получить ответы на многие вопросы гидродинамики.* ***Вязкость обеспечивает выравнивание скоростей движения соседних слоёв жидкости и приводит к появлению силы вязкого трения****.*

В случае шарика радиусом r, движущегося со скоростью V в жидкости с вязкостью η, на него действует сила вязкого трения, описываемая формулой Стокса (Дж. Д. Стокс, 1851г.).

$$\vec{F}_{тр.вяз.} = -6\pi\eta r\vec{V}$$



Работа сил внутреннего трения обуславливает преобразование кинетической энергии текущей жидкости во внутреннюю энергию (тепло).

В области ***больших скоростей*** *движения тела на него действует сила, зависящая от квадрата скорости,*

$$F_c = C \cdot S\rho \frac{V^2}{2}$$

где C > 0 – постоянная, зависящая от формы тела и характеристик его поверхности, S – наибольшая площадь поперечного сечения тела в направлении, перпендикулярном скорости , $\vec{V}$ *и ρ – плотность среды*


Love
Life
ЛЕКЦИЯ ЗАКОНЧЕНА!
Earth
Forever