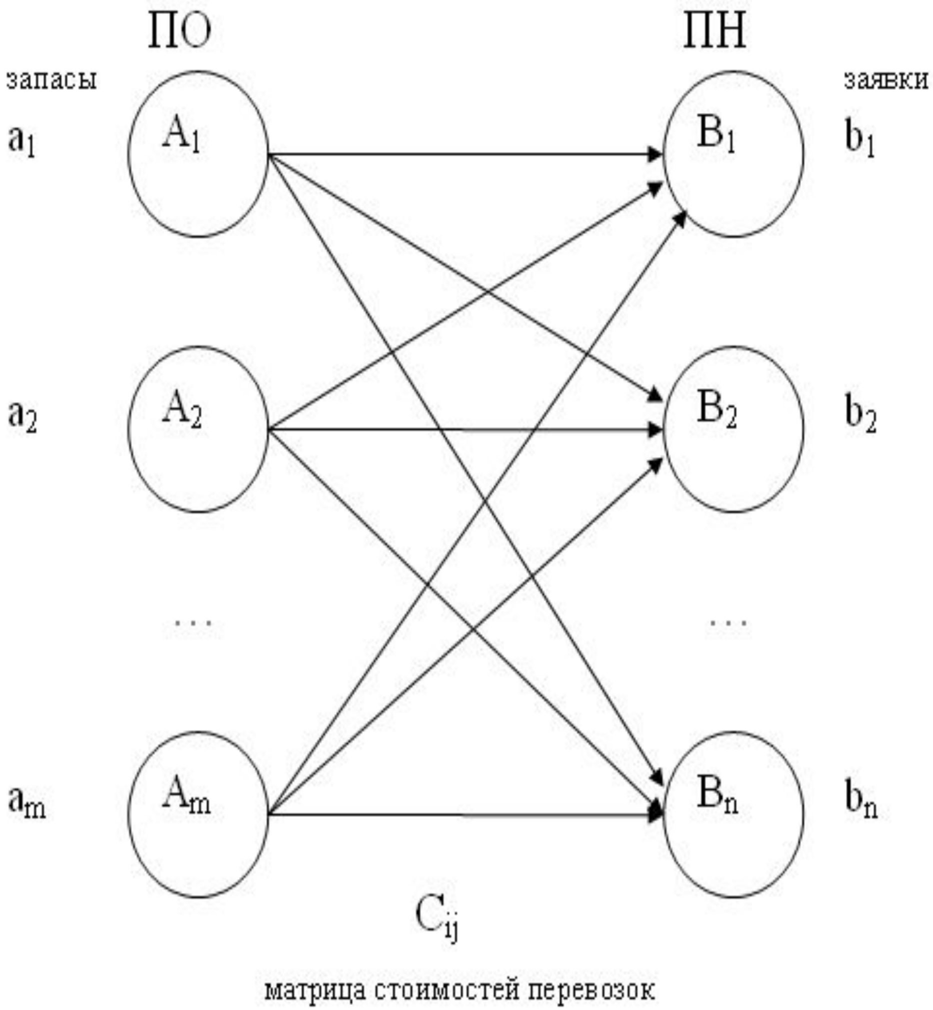
Транспортная задача линейного программирования

Постановка транспортной задачи



Условие сбалансированности задачи

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (1)$$

Математическая модель ТЗ

X_{ij} - количество груза из i-го ПО в j-й ПН

<u>Целевая функция</u>

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \to \min \qquad (2)$$

Система ограничений – балансовые условия

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m} \\ &\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n} \\ &X_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,m} \;\; j = \overline{1,n} \end{aligned} \qquad (3)$$

ТЗ – ЗЛП специального типа

Особенности математической модели ТЗ

1. $a_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, n}$

2. каждая переменная X_{ij} - лишь в <u>двух</u> ограничениях

3. количество переменных $m \times n$

4. <u>базисное решение</u> в соответствии с условием (1)

$n + m - 1$ - базисные переменные

$nm - (n + m - 1) = (n - 1)(m - 1)$ - свободные переменные

Терминология в ТЗ

- План перевозок
- Допустимый план перевозок
- Опорный план перевозок
- Оптимальный план перевозок
- Вырожденный план перевозок

Вид транспортных таблиц

ПО\ПН	B_1	B_2	…	B_n	запасы
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
заявки	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$

Алгоритм решения ТЗ

- 1. Определение начального допустимого базисного решения (опорный план)
- 2. В соответствии с условиями оптимальности определение переменной, вводимой в базис
- 3. Определение переменной, исключаемой из базиса
- 4. Определение нового базисного решения (опорного плана)

Методы решения ТЗ

- 1. Методы определения начального базисного решения (метод «северо-западного угла», метод «минимальных стоимостей перевозок», метод наименьшей стоимости, метод Фогеля)
- 2. Методы улучшения базисного решения (метод потенциалов, распределительный метод)

Метод потенциалов

Основа метода – связь ПЗЛП и ДЗЛП

Переход от ПЗЛП к ДЗЛП – ввод:

m переменных U_i (из (3) – 1-я группа ограничений-равенств)

n переменных V_j (из (3) – 2-я группа ограничений-равенств)

Прямая ТЗ

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \min \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j & j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (3)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}$$

Двойственная ТЗ

$$Z' = \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j \to \max \qquad (4)$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \quad i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n} \qquad (5)$$

Метод потенциалов (продолжение)

Основные положения:

1. В точке оптимума («равновесие») - $Z = Z'$ (6)

2. При решении симплекс-методом на каждой симплекс итерации коэффициент в строке ЦФ ПЗЛП (F_{ij}) при переменной X_{ij}

$$U_i + V_j - C_{ij} = F_{ij} \qquad (7)$$

а) если X_{ij} - базисная переменная, то $F_{ij} = 0$

б) если X_{ij} - свободная переменная, то $F_{ij} \neq 0$

<u>В оптимальном базисном решении задачи на минимум</u> - $F_{ij} \leq 0$

<u>Условие оптимальности в ТЗ</u>

$$\begin{cases} U_i + V_j - C_{ij} = 0 & \textit{базисные переменные} \\ U_i + V_j - C_{ij} \leq 0 & \textit{свободные переменные} \end{cases} \quad Z = Z' \qquad (8)$$

Если при свободной переменной X_{ij} коэффициент $F_{ij} > 0$, то эту переменную вводят в базис, тогда значение $\underline{Z}$ ПЗЛП <u>уменьшается</u>, а значение $\underline{Z'}$ ДЗЛП <u>увеличивается</u>

Варианты системы потенциалов

При переходе к ДЗЛП варианты ввода переменных:

а) U_i и V_j

б) $-U_i$ и V_j

в) U_i и $-V_j$

Условия оптимальности

$$\begin{cases} U_i + V_j - C_{ij} = 0 & бп \\ U_i + V_j - C_{ij} \le 0 & сп \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} V_j - U_i - C_{ij} = 0 & бп \\ V_j - U_i - C_{ij} \le 0 & сп \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} U_i - V_j - C_{ij} = 0 & бп \\ U_i - V_j - C_{ij} \le 0 & сп \end{cases} \quad (10)$$

U_i и V_j - система потенциалов

Алгоритм метода потенциалов

1. расчет системы потенциалов по (8), (9) или (10) для *бп*
2. проверка условия оптимальности по (8), (9) или (10) для *сп*
3. перенос в базис выбранной переменной в случае невыполнения принципа оптимальности

Вырождение на этапе оптимизации

	10 k		11 50-k	
	9 50-k		8 10+k	

	10 50		11	
	9 0		8 60	

Цена цикла

$$\gamma = 10 - 11 + 8 - 9 = -2 < 0$$

Количество груза для переноса

$$k = 50$$

Величина изменения ЦФ

$$k \cdot \gamma = -100$$

$$Z' = Z + k\gamma = Z - 100$$

Несбалансированная ТЗ

I.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Введение фиктивного потребителя $B_{(n+1)}$

Коэффициенты ЦФ

$$C_{i(n+1)} = 0 \quad (или \quad M - большое число)$$

Заявка фиктивного потребителя

$$b_{(n+1)} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

II.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Введение фиктивного поставщика $A_{(m+1)}$

Коэффициенты ЦФ

$$C_{(m+1)j} = 0 \quad (или \quad M - большое число)$$

Запас фиктивного поставщика

$$a_{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Транспортная задача в сетевой постановке

Условия ТЗ – <u>граф</u>:

1. <u>вершины графа</u> – поставщики (ПО) с a_i
   потребители (ПН) с b_j

2. <u>ребра графа</u> – связь ПО и ПН с C_{ij} - показатель критерия оптимальности (тарифы, расстояния и т.д.)

Пример:

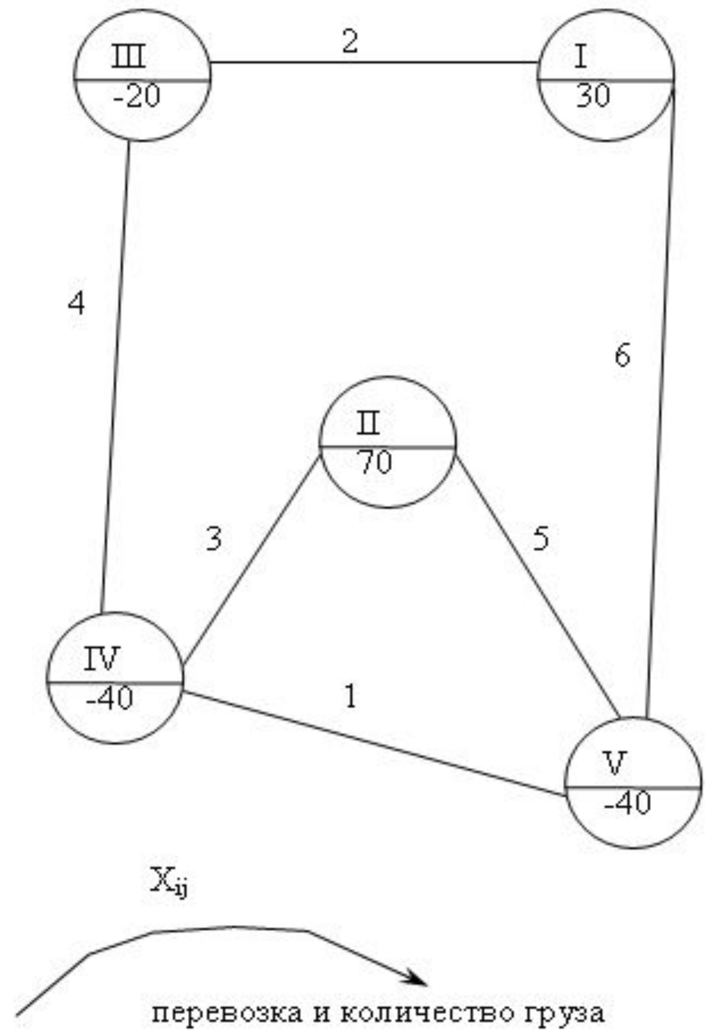
I, II – ПО ($a_I = 30,\ a_{II} = 70$)

III, IV, V – ПН ($b_{III} = 20,\ b_{IV} = 40,\ b_V = 40$)

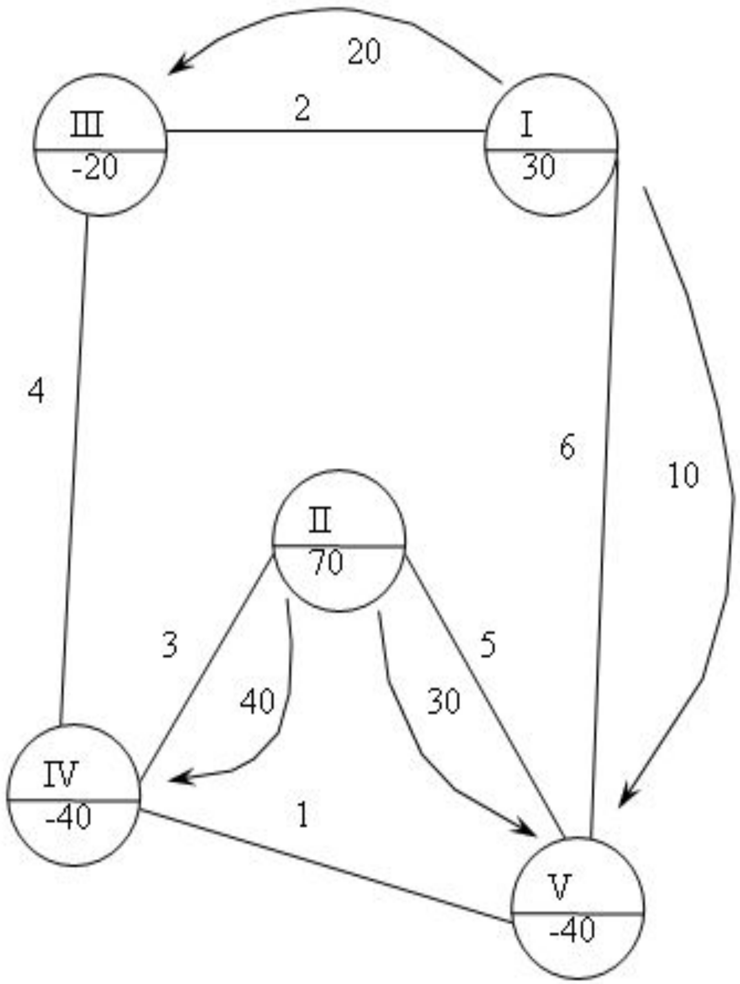
Условия сбалансированности:

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j = 100$$

В схемах могут быть нулевые вершины – транзит ($a_i = 0$ или $b_j = 0$)



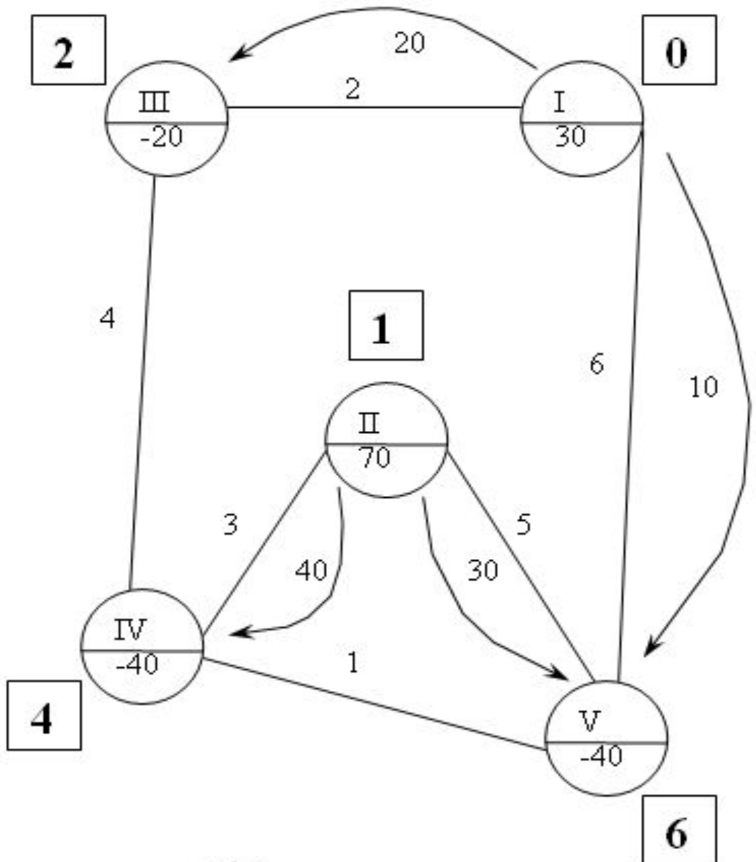
Построение опорного плана

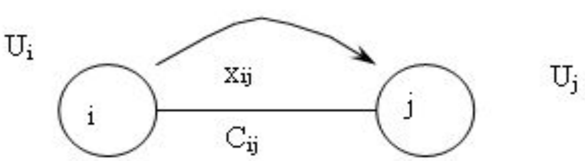


Требования:

1. допустимость плана
2. все вершины задействованы в распределении перевозок
3. общее количества перевозок – на одну меньше количества вершин
4. перевозки не образуют замкнутого контура (цикла)

Метод потенциалов – проверка плана на оптимальность





Алгоритм:

1. расчет системы потенциалов

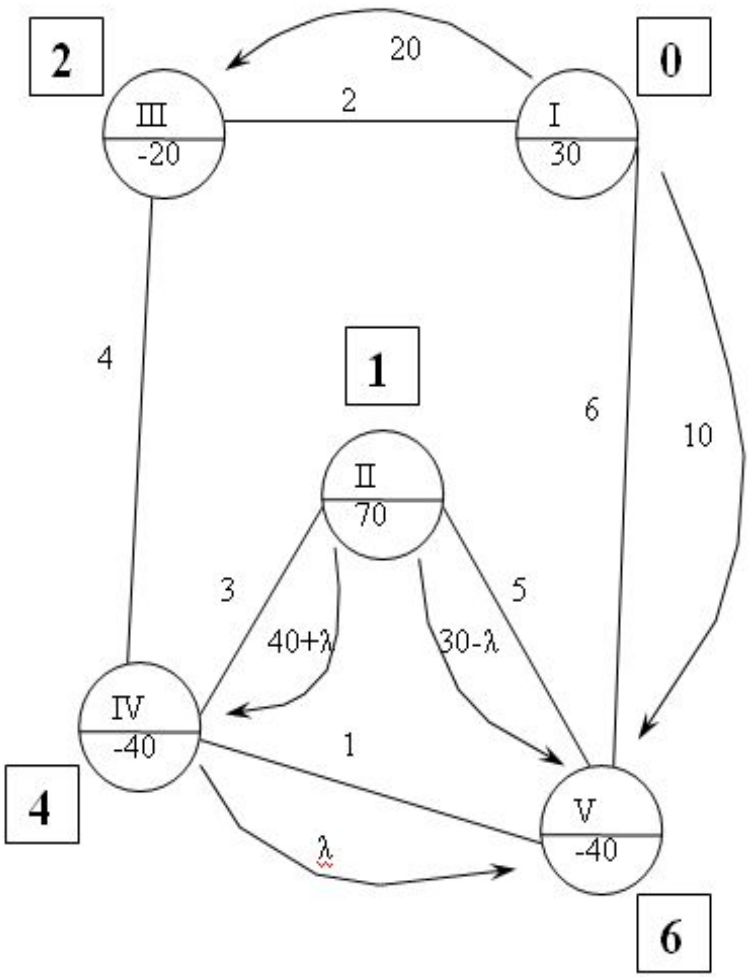
$$U_j = U_i + C_{ij} \quad \text{по базисным дугам}$$

2. оценка свободных ребер при $U_k > U_l$

$$U_k - U_l - C_{kl} \le 0$$

III-IV	4-2-4=-2<0
IV-V	6-4-1=1>0

Метод потенциалов – проверка плана на оптимальность

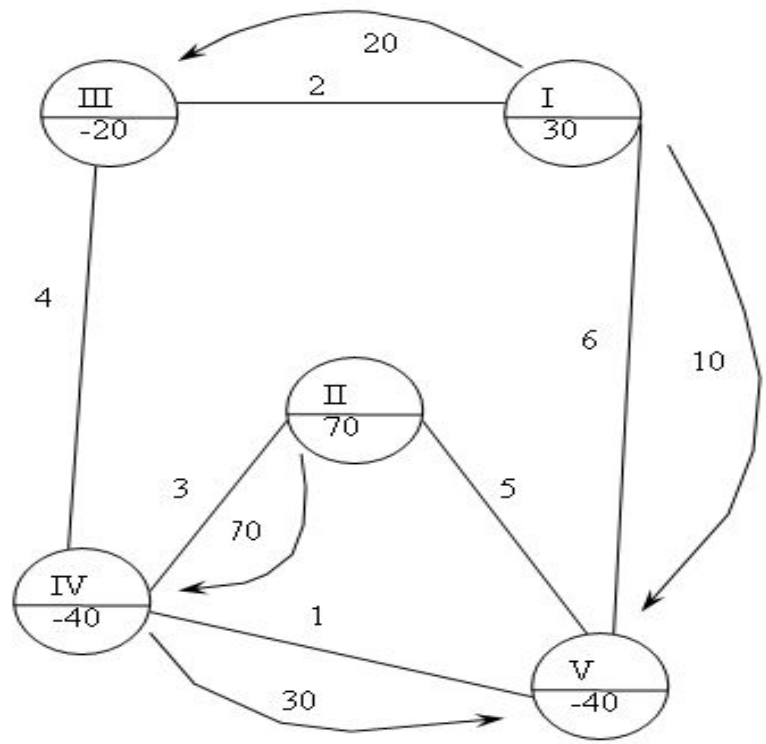


λ=30

Алгоритм:

3. введение ребра, не удовлетворяющего условиям оптимальности, в базис – построение цикла

4. расчет нового базисного решения



Особые случаи ТЗ в сетевом виде

Избавление от вырожденности:

1. этап составления опорного плана
2. этап оптимизации (улучшения) плана

Несбалансированность задачи – **фиктивный пункт не является промежуточным**

1.

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j$$

Фиктивный ПН связан со всеми ПО

$$b_{\phi} = \sum_i a_i - \sum_j b_j$$

$$C_{i\phi} = M \quad (\textit{большое число})$$

2.

$$\sum_i a_i < \sum_j b_j$$

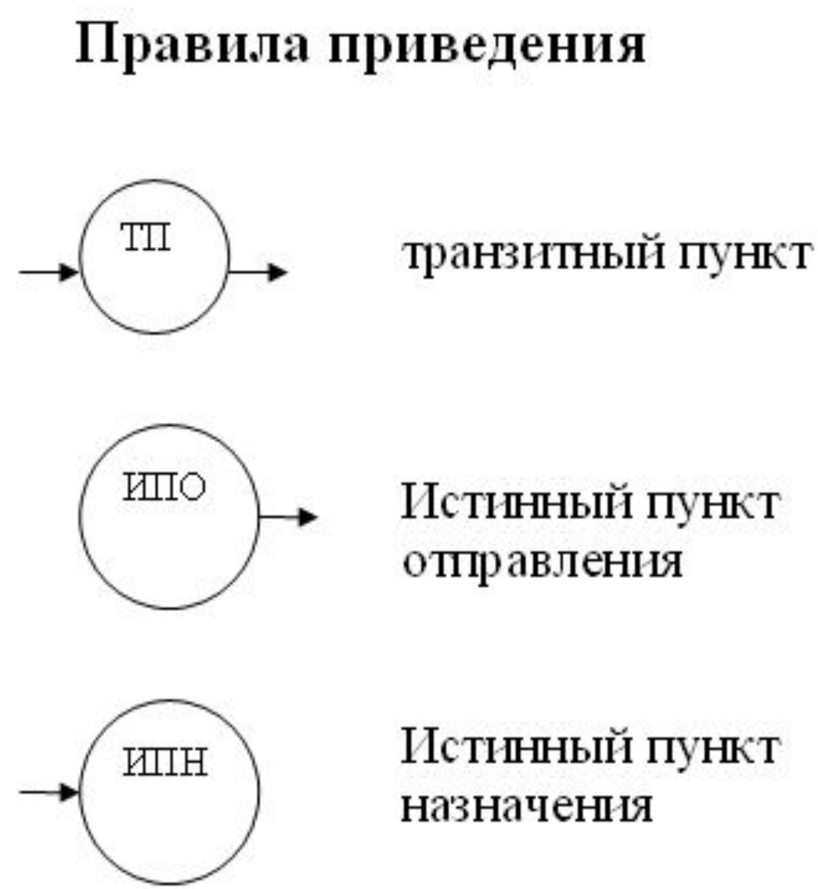
Фиктивный ПО связан со всеми ПН

$$a_{\phi} = \sum_j b_j - \sum_i a_i$$

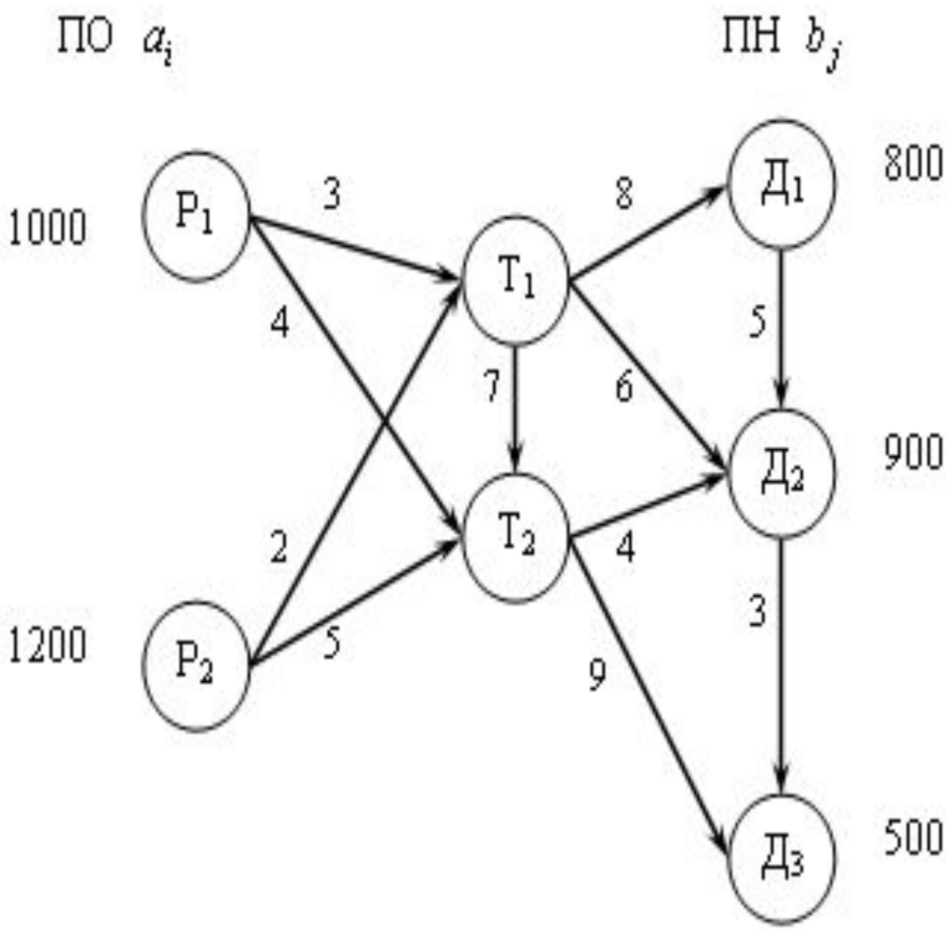
$$C_{\phi j} = M \quad (\textit{большое число})$$

ТЗ с промежуточными пунктами

- Способ решения задачи о нахождении наикратчайшего расстояния на сети связи между двумя пунктами
- Сведение в ТЗ в матричной форме введением буфера



Пример ТЗ с промежуточными пунктами



Преобразование графа в матричную форму

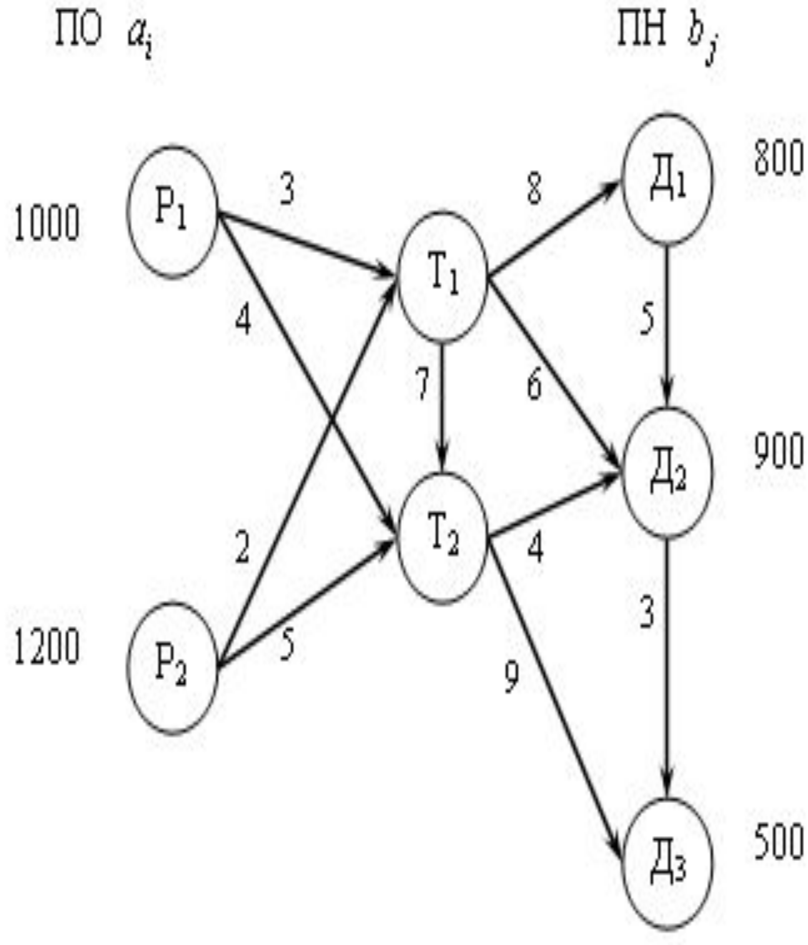
1. ПО – ИПО и ТП ($P_1, P_2, T_1, T_2, Д_1, Д_2$)
2. ПН – ИПН и ТП ($T_1, T_2, Д_1, Д_2, Д_3$)

<u>Объем буфера</u> - $\sum_i a_i \left(\sum_j b_j \right)$

<u>Объемы спроса и предложения</u>

1. предложение ИПО = исходное предложение
2. предложение ТП = исходное предложение + буфер
3. спрос ИПО = исходный спрос
4. спрос ТП = исходный спрос + буфер

ТЗ с промежуточными пунктами



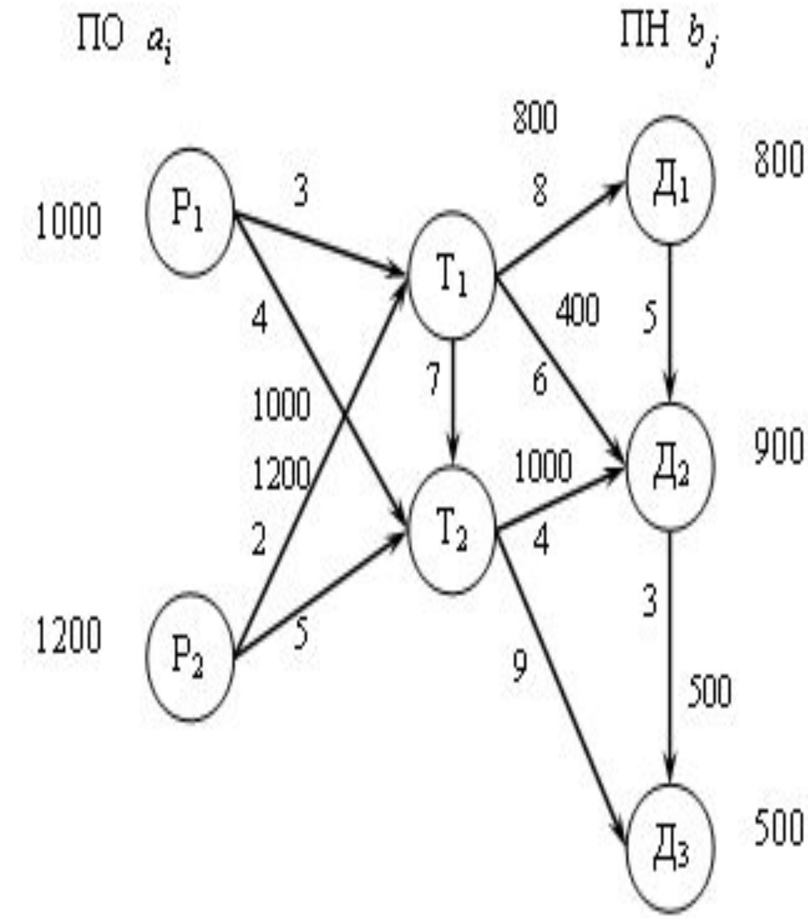
Метод «северо-западного угла»

ПО\ПН	T_1	T_2	$Д_1$	$Д_2$	$Д_3$	a_i
P_1	3 1000	4 -	M -	M -	M -	1000
P_2	2 1200	5 0	M -	M -	M -	1200
T_1	0 -	7 2200	8 0	6 -	M -	2200
T_2	M -	0 -	M 2200	4 -	9 -	2200
$Д_1$	M -	M -	0 800	5 1400	M -	2200
$Д_2$	M -	M -	M -	0 1700	3 500	2200
b_j	2200	2200	3000	3100	500	11000

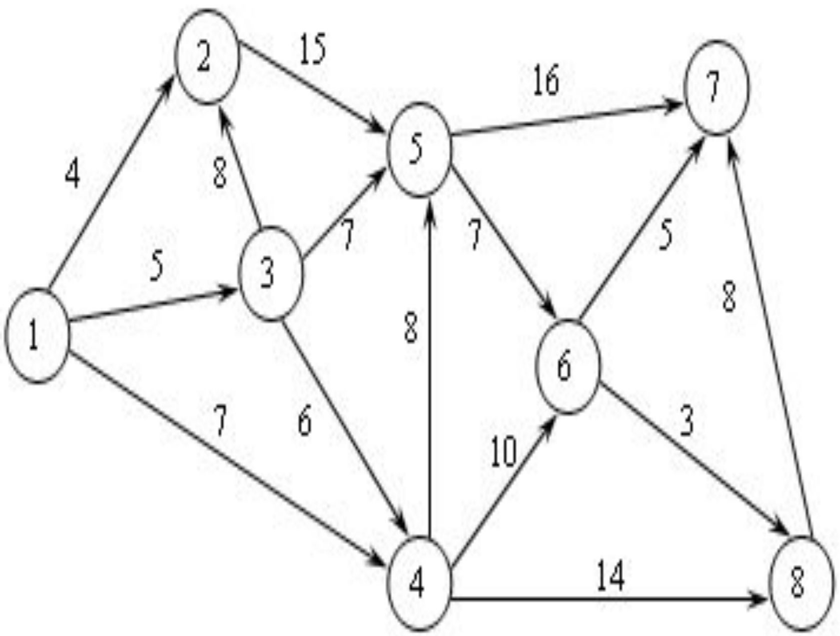
Оптимальное решение в ТЗ с ПП (Z=20700)

Оптимальное решение, полученное методом потенциалов

ПО\ПН	T_1	T_2	$Д_1$	$Д_2$	$Д_3$	a_i
P_1	3 -	4 1000	M -	M -	M -	1000
P_2	2 1200	5 -	M -	M -	M -	1200
T_1	0 1000	7 -	8 800	6 400	M -	2200
T_2	M -	0 1200	M -	4 1000	9 -	2200
$Д_1$	M -	M -	0 2200	5 -	M -	2200
$Д_2$	M -	M -	M -	0 1700	3 500	2200
b_j	2200	2200	3000	3100	500	11000



Поиск наикратчайшего пути на сети связи между двумя пунктами методом решения ТЗ с ПП



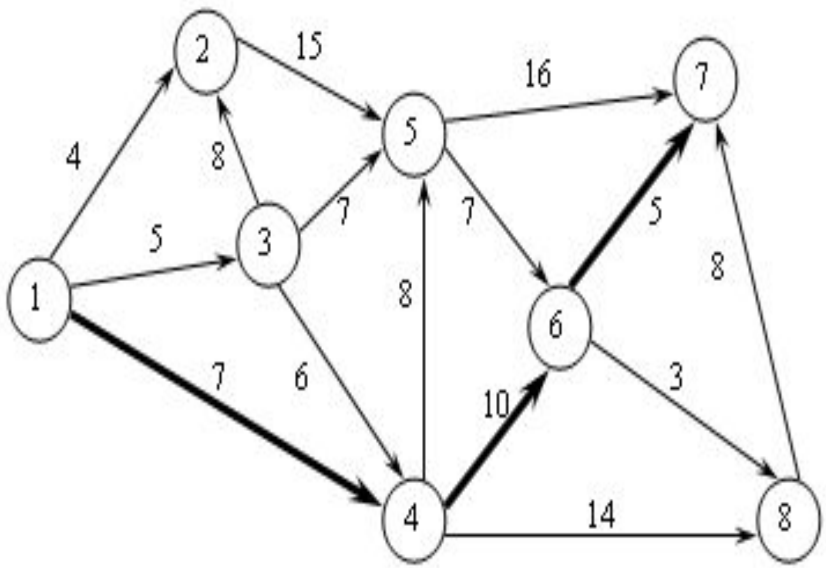
ПО\ПН	2	3	4	5	6	7	8	запасы
1	4 1	5 0	7 -	M -	M -	M -	M -	1
2	0 -	M 1	M 0	15 -	M -	M -	M -	1
3	8 -	0 -	6 1	7 0	M -	M -	M -	1
4	M -	M -	0 -	8 1	10 0	M -	M -	1
5	M -	M -	M -	0 -	7 1	16 0	M -	1
6	M -	M -	M -	M -	0 -	5 1	3 0	1
8	M -	M -	M -	M -	M -	8 -	0 1	1
заявки	1	1	1	1	1	1	1	7

F=80 при M=50

Наикратчайший путь

Поиск наикратчайшего пути на сети связи между двумя пунктами методом решения ТЗ с ПП (оптимум)

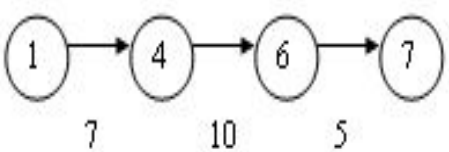
Оптимальное решение



ПО\ПН	2	3	4	5	6	7	8	запасы
1	4 0	5 0	7 1	M -	M -	M -	M -	1
2	0 1	M -	M -	15 -	M -	M -	M -	1
3	8 -	0 1	6 -	7 0	M -	M -	M -	1
4	M -	M -	0 0	8 -	10 1	M -	M -	1
5	M -	M -	M -	0 1	7 -	16 -	M -	1
6	M -	M -	M -	M -	0 0	5 1	3 0	1
8	M -	M -	M -	M -	M -	8 -	0 1	1
заявки	1	1	1	1	1	1	1	7

F=22

Наикратчайший путь



Задача о назначениях – частный случай ТЗ

<u>Условие задачи:</u>

ПО – исполнители (N) ПН – работы (N)

$a_i = 0 \quad i = \overline{1,N}$ $b_j = 0 \quad j = \overline{1,N}$

Матрица затрат $C = \{C_{ij}\} \quad i, j = \overline{1,N}$

<u>Математическая модель задачи о назначениях</u>

Переменные $X_{ij} = \begin{cases} 1 & i - й\ \underline{назначен}\ на\ j - ю\ работу \\ 0 & i - й\ \underline{не\ назначен}\ на\ j - ю\ работу \end{cases}$

ЦФ $f = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} X_{ij} \to \min$

Система ограничений $\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_{ij} = 1 & j = \overline{1,N} \\ \sum_{j=1}^{N} X_{ij} = 1 & i = \overline{1,N} \end{cases}$

Решение – матрица назначений X - содержит N элементов $\underline{1}$ (по одному в строке и столбце)

<u>Методы решения задачи о назначениях</u>

1. Симплекс-метод
2. Методы решения ТЗ
3. Специальный метод решения задачи о назначениях – венгерский (Мака)

Алгоритм венгерского метода

Основа метода – неизменность решения при изменении элементов строки (столбца) матрицы затрат на некоторое число

I Изменение матрицы затрат $C \Rightarrow Cnew$

II Решение в $Cnew$ найдено, если элементов «0» по одному в каждом столбце и каждой строке

III а) вычеркивание в $Cnew$ минимальным способом всех строк и столбцов с элементами «0»

б) поиск среди не вычеркнутых элементов в $Cnew$ - $\min Cnew_{ij}$

в) изменение матрицы затрат $Cnew \Rightarrow Cnew1$ по правилу:

для не вычеркнутых элементов $Cnew1_{ij} = Cnew_{ij} - \min Cnew_{ij}$

для элементов на пересечении вычеркнутых i-й строки и j-го столбца $Cnew1_{ij} = Cnew_{ij} + \min Cnew_{ij}$

г) переход к **II** (решение найдено) или к **I** (преобразование матрицы $Cnew1$)

Пример решения задачи о назначениях

I Матрица затрат

	1	2	3	4	
1	4	6	9	7	$P_1=4$
2	13	10	14	14	$P_2=10$
3	9	9	16	13	$P_3=9$
4	12	10	12	10	$P_4=10$

II

	1	2	3	4
1	0	2	5	3
2	3	0	4	4
3	0	0	7	4
4	2	0	2	0
	$Q_1=0$	$Q_2=0$	$Q_3=2$	$Q_4=0$

III

	1	2	3	4
1	0	2	3	3
2	3	0	2	4
3	0	0	5	4
4	2	0	0	0

IV

	1	2	3	4
1	0	2	3	3
2	3	0	**2**	4
3	0	0	5	4
4	2	0	0	0

V

	1	2	3	4
1	**0**	2	1	1
2	3	0	**0**	2
3	0	**0**	3	2
4	4	2	0	**0**

Затраты 37

Особые случаи решения задачи о назначениях

1. i-й исполнитель не может выполнять j-ю работу

$C_{ij} = M$ где M - большое число

2. а) Количество работ > Количество исполнителей
ввод фиктивных исполнителей с $C_{ij} = M$
б) Количество работ < Количество исполнителей
ввод фиктивных работ с $C_{ij} = M$

3. Дана матрица выигрышей C (т.е. ЦФ $f \to \max$)
а) матрица затрат = матрица выигрышей*(-1)
б) $C\max = \max\{C_{ij}\}\ i, j = \overline{1, N}$, тогда пересчитывают матрицу затрат $Cnew$

$$Cnew_{ij} = C\max - C_{ij} \quad i, j = \overline{1, N}$$