Тема 1.

Графы

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

***Граф** – наглядное представление конечного антирефлексивного симметричного отношения*

Граф – конечное множество V, называемое ***множеством вершин***, на котором задано симметричное антирефлексивное отношение $\boldsymbol{R}$ и выделено множество E двухэлементных подмножеств V, определяемое как $\{a, b\} \in E$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \boldsymbol{R}$ и $a \neq b$.

Множество E называется ***множеством ребер***. Всякий элемент E называется ***ребром***.

Граф обозначается $G(V, E)$.

Элементы a и b графа V соединены или связаны ребром $\{a, b\}$, если $\{a, b\} \in E$.

Конечный граф изображается при помощи диаграммы, в котором вершины представлены точками, ребра, соединяющее вершины, линиями между точками.
Пример

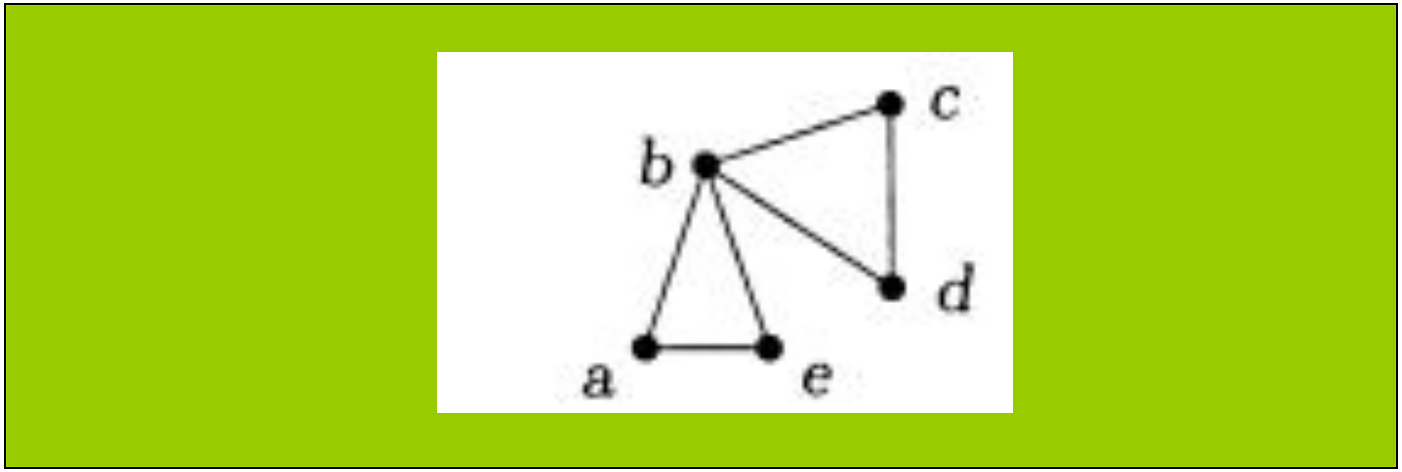
Граф, в котором множество вершин $V = \{a, b, c\}$,
$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ может иметь вид

или

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$$

Пример

Граф, в котором множество вершин $V=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ имеет диаграмму



$$R = \{(a,b), (b,a), (e,a), (a,e), (e,b), (b,e), (b,d), (d,b), (b,c), (c,b), (d,c), (c,d)\}$$

Определения

Ориентированный граф, или ***орграф G*** *состоит* из множества V вершин и отношения E на V, называемого множеством ***ориентированных ребер*** или просто ***ребер***, если понятно, что граф ориентирован.

Обозначается **G**(V, E)

Элемент множества E называется ***ориентированным ребром.***

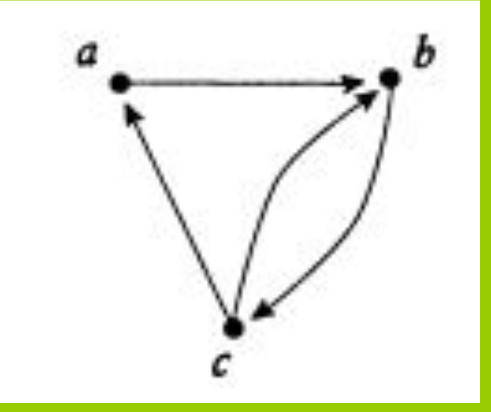
Если $(a, b) \in E$, тогда a называется ***начальной вершиной*** (a, b), b - его ***конечной вершиной***.

В случае ориентированного графа допускается наличие петель.

Пример

Орграф с вершинами

V={*a*, *b, c*} и ребрами *E*={(*a*, *b*), (*b*, *c*), (*c*, *b*), (*c*, *a*)}

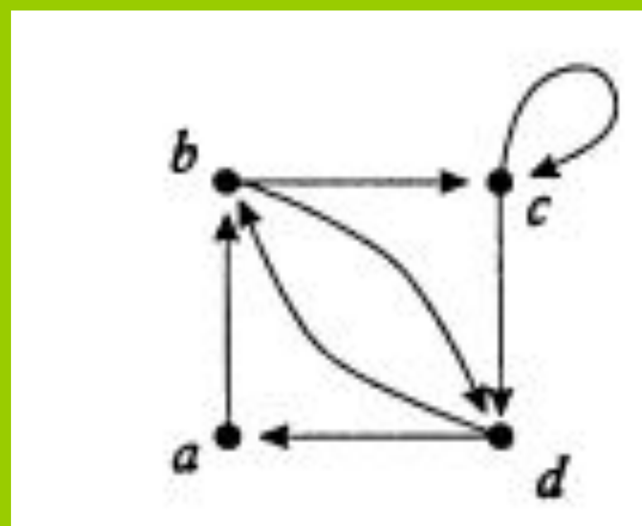


Порядок имеет значение. (*a*, *b*) может быть ребром диаграммы, (*b*, *a*) – нет.

Пример

Орграф с вершинами $V=\{a, b, c, d\}$

и ребрами $E=\{(a, b), (b, c), (c, c), (b, d), (c, d), (d, a)\}$



Определение

Отношение R на A есть отношение ***частичного порядка***, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если отношение R на A является отношением частичного порядка, то (A, R) называют ***частично упорядоченным множеством*** (или ***ЧУ-множеством*** с порядком R).

Если отношение порядка R предполагается по умолчанию, то (A, R) можно обозначить просто через A.

Пример (*)

Пусть $C = \{1, 2, 3\}$, X – множество всех подмножеств множества C:

$$X = P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Определим отношение R на X посредством $(T, V) \in R$, если $T \subseteq V$.

$(\{2\}, \{1, 2\}) \in R$, поскольку $\{2\} \subseteq \{1, 2\}$ и

$(\{1, 2\}, \{3\}) \notin R$, поскольку $\{2, 3\} \not\subset \{3\}$.

R – отношение частичного порядка,

(A, R) – ЧУ-множество.

Пример

Пусть S – множество действительных чисел,

R_1 – отношение, определенное условием $(x, y) \in R_1$, если $x \le y$.

R_1 – отношение частичного порядка,

(S, R_1) – ЧУ-множество.

Обозначение.

Частично упорядочение принято обозначать через $\le$

а ЧУ-множество - через $(S, \le)$.

$\le$ -частичный порядок на множестве S.

Определение

Два элемента a и b ЧУ-множества (S, ≤) сравнимы, если $a \le b$ или $b \le a$.

Если каждые два элемента ЧУ-множества (S, ≤) сравнимы, то (S, ≤) называется ***вполне упорядоченным множеством***, или ***цепью***.

Примеры

Пусть T – множество положительных делителей числа 30 и $\leq_1$ есть отношение $m \leq_1 n$, если m делит n нацело. Целые числа 5 и 15 сравнимы, поскольку 5 делит 15 нацело, а 5 и 6 – нет.

Пусть A – множество целых чисел и

$R = \leq_2$ – отношение $x \leq_2 y$, если x меньшее или равно y. Упорядоченное множество $(A, \leq_2)$ является цепью.

Пример

Пусть S – множество всех подмножеств множества $\{a,b,c\}$ $\leq_3$ есть отношение частичного порядка в примере *(*)*.

Множества $\{a, b\}$ и $\{a,b,c\}$ сравнимы, однако $\{a, b\}$ и $\{b,c\}$ таковыми не являются.

ЧУ-множество $(S, \leq_3)$ цепью не является.

Диаграммы Гессе

Для изображения ЧУ-множеств.

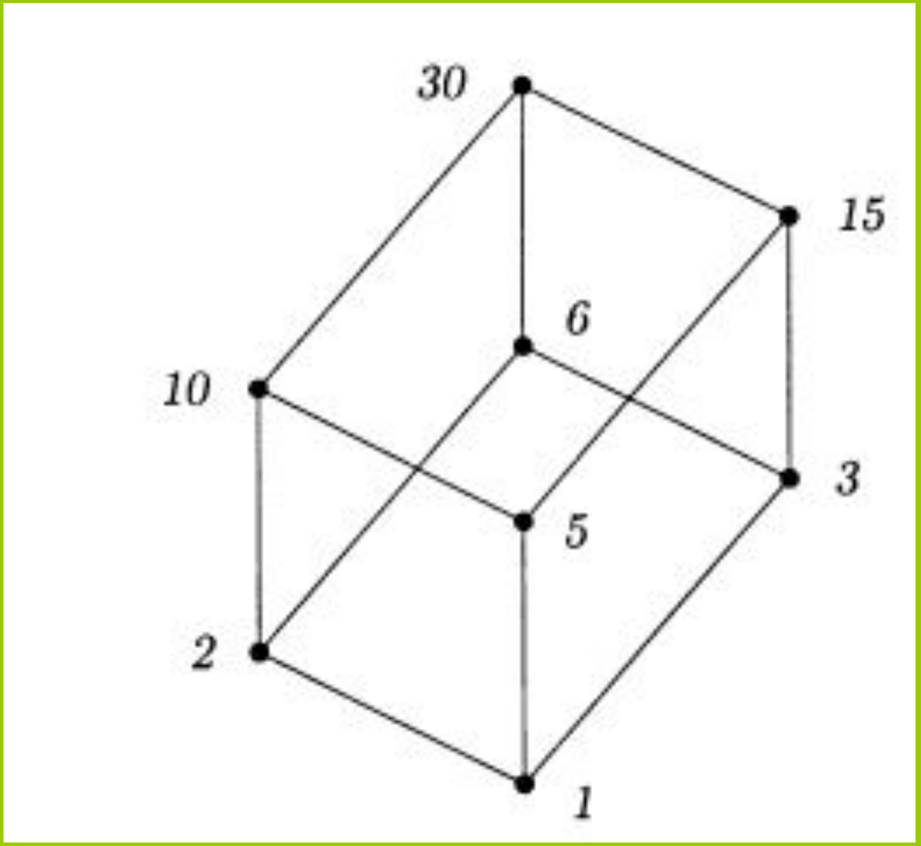
Для заданного ЧУ-множества (A, $\leq_2$) ***диаграмма Гессе*** состоит из совокупности точек и линий, в которой точки представляют элементы A, и если $a \leq c$ для элементов a и c множества A, тогда a помещено ниже c, и они соединены линией, если не существует такое $b \neq a$, c, что $a \leq b \leq c$.

Если рассмотрение отношений ограничено отношениями частичного порядка, для них диаграммы Гессе – просто ориентированный граф, в котором петли не указаны.

Если $a \leq b \leq c$, тогда линия от a к c не указана.

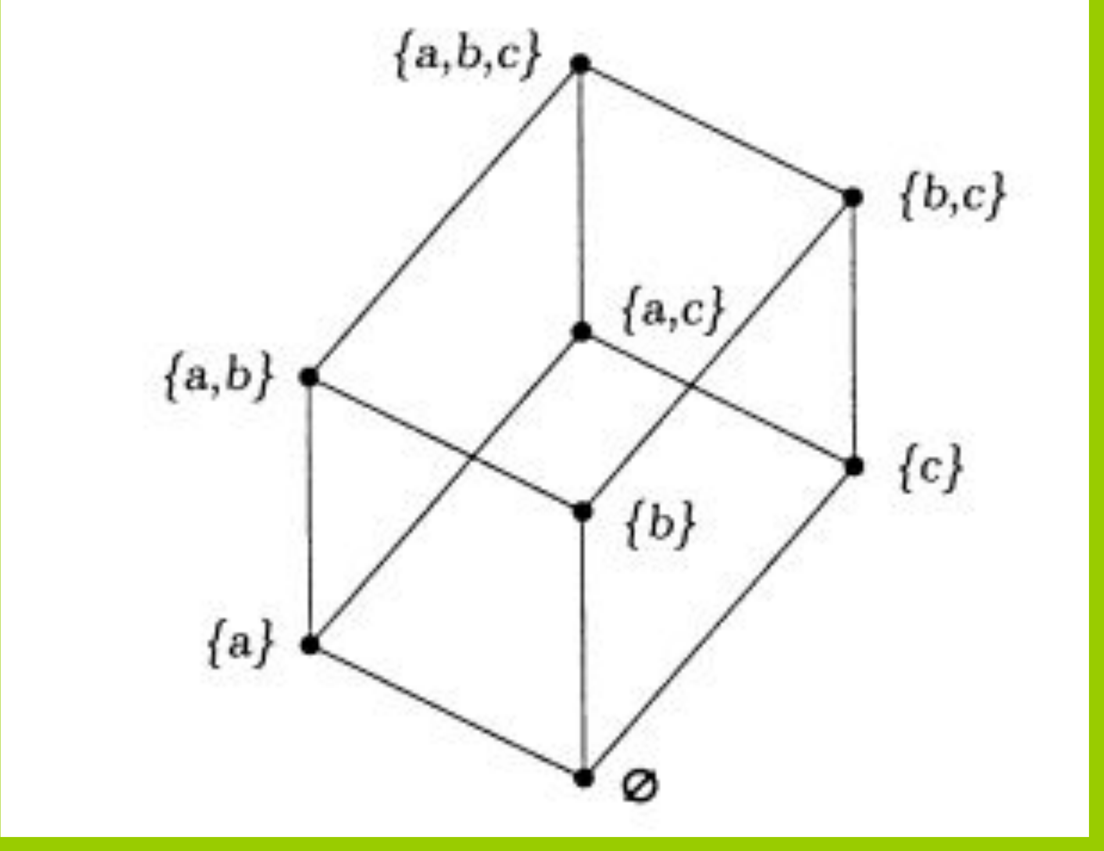
Пример

Диаграмма Гессе, соответствующая множеству (T, $\leq_1$)



Пример

Диаграмма Гессе, соответствующая множеству (S, $\leq_3$)



Матрицы инцидентности и смежности

Задание любой из этих матриц дает возможность восстановить граф

Определение

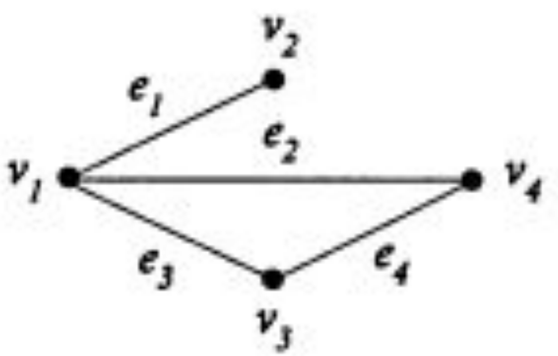
Пусть *G* - граф. Пусть В – матрица, строки которой обозначены вершинами графа, а столбцы обозначены ребрами графа. Считаем, что вершины и ребра графа пронумерованы.

Элемент *i* –ой строки и *j* –го столбца матрицы В (B_{ij}) равен 1, если *i*-ая вершина инцидентна *j*-му ребру, и равен 0 в противном случае.

Матрица В называется ***матрицей инцидентности*** графа *G*.

Пример

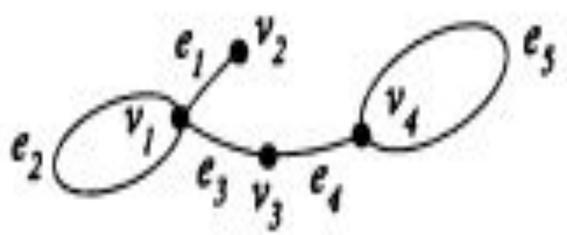
Пусть *G* - граф. Его матрица инцидентности:



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример

Пусть *G* - граф. Его матрица инцидентности:



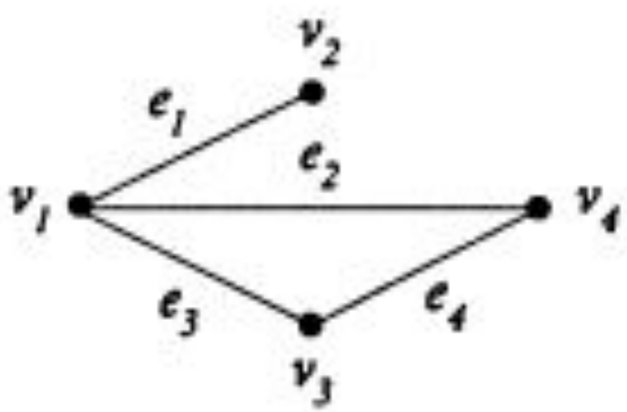
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Определение

Пусть *G* – граф (ориентированный граф).
Пусть *B* – матрица, строки которой обозначены вершинами графа и столбцы обозначены теми же вершинами в том же самом порядке. Элемент *i*-ой строки и *j*-го столбца матрицы B, обозначаемый B_{ij} , равен 1, если имеется ребро (ориентированное ребро) из *i*-ой вершины в *j*-ю вершину, и равен 0 в противоположном случае. Матрица *B* называется ***матрицей смежности*** графа *G*.

Пример

Пусть *G* - граф. Его матрица смежности:

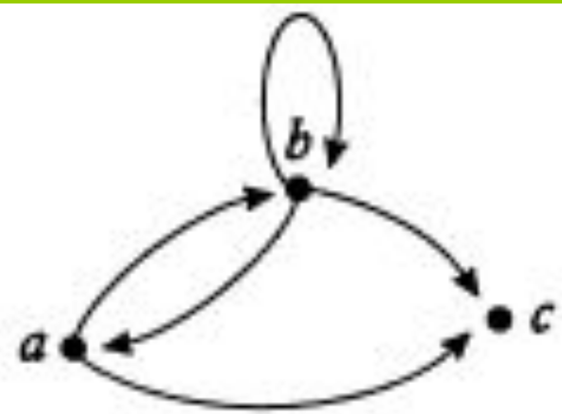


$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример

Пусть G – ориентированный граф .

Его матрица смежности:



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Пример

Матрица смежности для ориентированного графа, у которого четыре и восемь ребер :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу смежности графа *G* с вершинами v1, v2, v4, v4.
Матрица

$$A^{\odot 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу смежности графа G с вершинами v1, v2, v4, v4.

$$\begin{aligned} A_{12}^{\odot 2} &= (A_{11} \wedge A_{12}) \vee (A_{12} \wedge A_{22}) \vee (A_{13} \wedge A_{32}) \vee (A_{14} \wedge A_{42}) = \\ &= (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = \\ &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 = \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{34}^{\odot 2} &= (A_{31} \wedge A_{14}) \vee (A_{32} \wedge A_{24}) \vee (A_{33} \wedge A_{34}) \vee (A_{34} \wedge A_{44}) = \\ &= (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = \\ &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = \\ &= 0, \end{aligned}$$

Теорема

Пусть *G* – (ориентированный) граф с вершинами v1, v2, v3, …, v_n и матрицей смежности *A*.
Путь длины *k*, или *k*-путь из v_i в v_j для $1 \le k \le n$ существует тогда и только тогда, когда

$$A_{ij}^{\odot k} = 1.$$

Теорема

Пусть *G* – (ориентированный) граф с вершинами v1, v2, v3, …, v_n и матрицей смежности *A*.
Из вершины v_i в v_j имеется m путей длины *k*, где $1 \le k \le n$ тогда и только тогда, когда

$$A_{ij}^{k} = m.$$

Алгебраические свойства графов

Определение.

Функция f из графа $G(V, E)$ в граф $G'(V', E')$ называется гомоморфизмом из G в G' и обозначается $f: G \to G'$, если обладает следующими свойствами:

- Если $e \in E$, то $f(e) \in E'$. ($f(E) \subseteq E'$).
- Если $v \in V$, то $f(v) \in V'$. ($f(V) \subseteq V'$).
- Если вершины u и v инцидентны ребру e графа G, то вершины $f(u)$ и $f(v)$ инцидентны ребру $f(e)$ графа G'.

Теорема.

Если функция f – гомоморфизм из G в G' , то $f(G)$ - подграф $(f(V), f(E))$ графа G'.

Теорема.

Если граф G связный и f – гомоморфизм, то граф $f(G)$ связный.

Теорема.

Если граф G полный и f – гомоморфизм, то граф $f(G)$ полный.

Замечание.

Многие свойства графа G не являются инвариантными относительно f.

Определение.

Гомоморфизм $f : G \to G'$, является ***изоморфизмом***, если $f : V \to V'$ и $f : E \to E'$ представляют собой взаимно однозначные соответствия. Если $f : G \to G'$ - изоморфизм, то G и G' называются ***изоморфными***.

Изоморфизм является переименованием вершин и ребер графа V, которое сохраняет свойство гомоморфности, так что если вершины u и v инцидентны ребру e графа G, то вершины $f(u)$ и $f(v)$ инцидентны ребру $f(e)$ графа G'.

- Практически все свойства графов инвариантны относительно изоморфизма. Простейший способ показать ***неизоморфизм*** двух графов – установить свойство, которым обладает один граф и не обладает другой.

Определение.

Если граф $G(V, E)$ содержит ребро $e=\{v1, v2\}$ и граф $G'(V', E')$ получен из графа $G(V, E)$ добавлением новой вершины v в множество V и заменой ребра $\{v1, v2\}$ ребрами $=\{v1, v\}$ и $=\{v, v2\}$, то граф $G'(V', E')$ называется расширением графа $G(V, E)$. Если графы G_1 , G_2 , G_3 , …, G_n таковы, что G_{i+1} является расширением графа G_i , то граф G_n называют производными от графа G_1 .

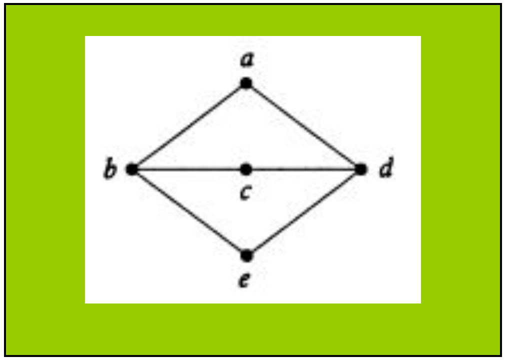
Если граф $G'(V', E')$ расширение графа $G(V, E)$, то посредине одного из ребер множества V появляется вершина, а исходное ребро делится на два новых ребра, которые соединяют вершины, инцидентные исходному ребру, и новую вершину.

Определение.

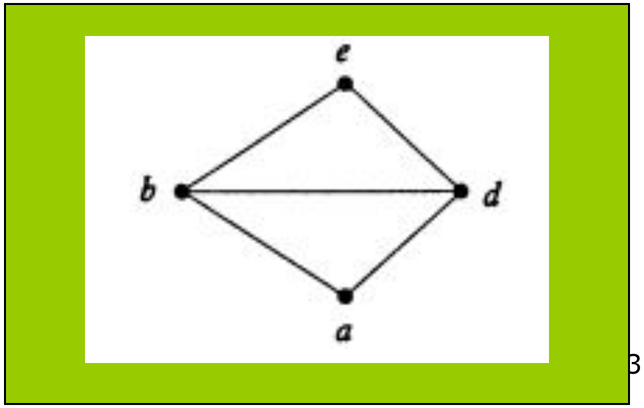
Графы G и G' называются ***гомеоморфными***, если существует граф G'' такой, что оба графа, G и G', являются производными от графа G''.

Пример.

Граф

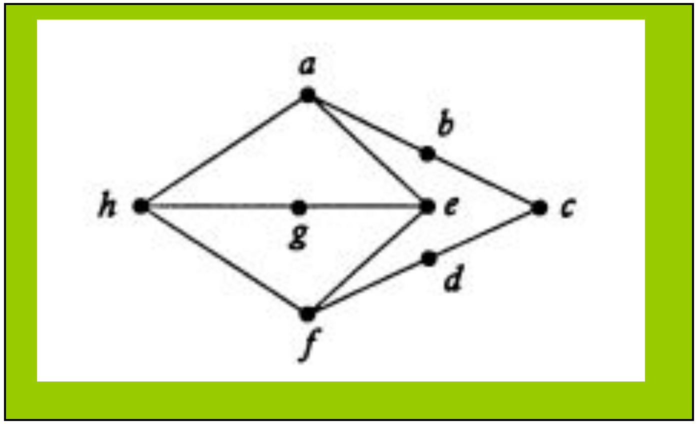


является расширением графа

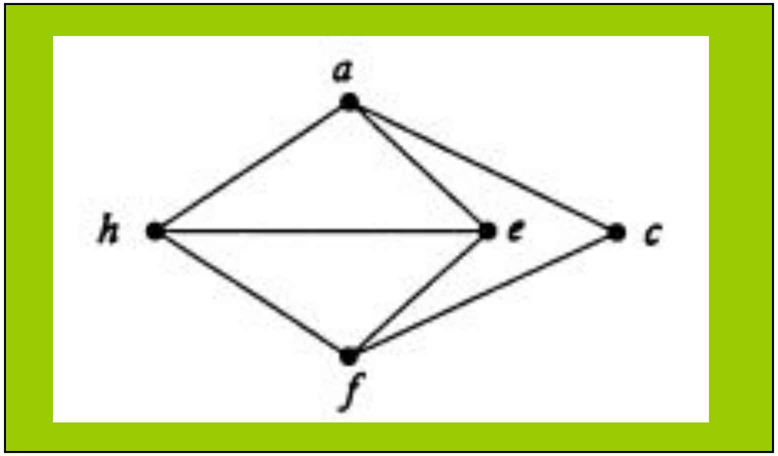


Пример.

Граф

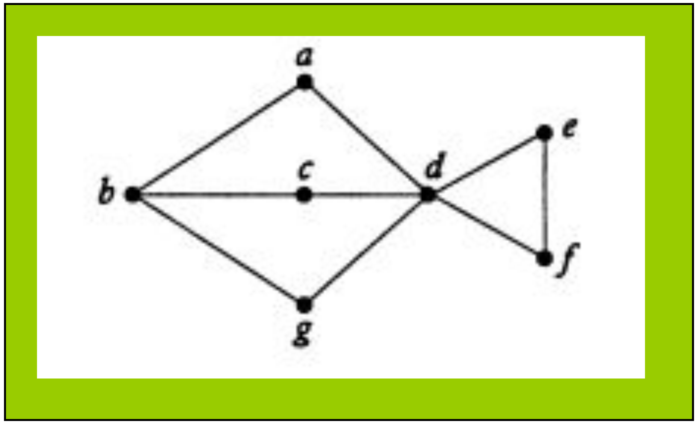


является производным от графа

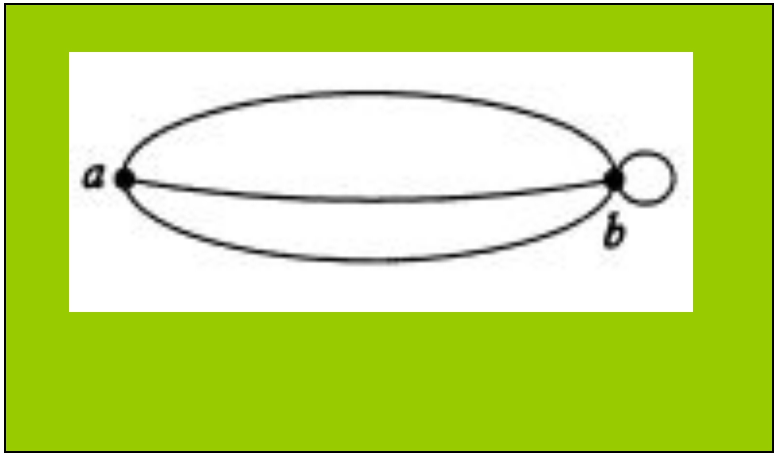


Пример.

Граф

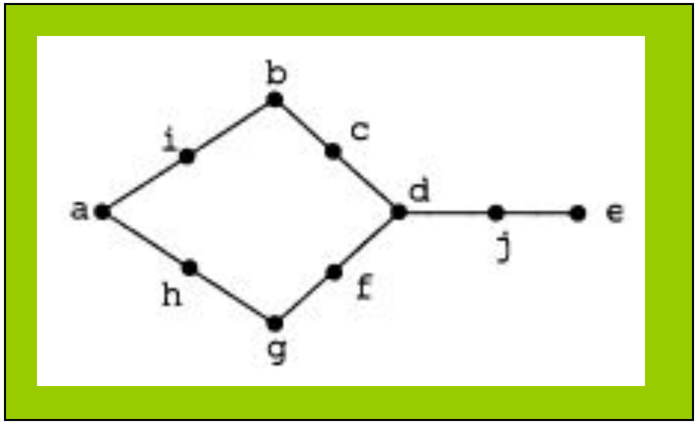


является производным от графа

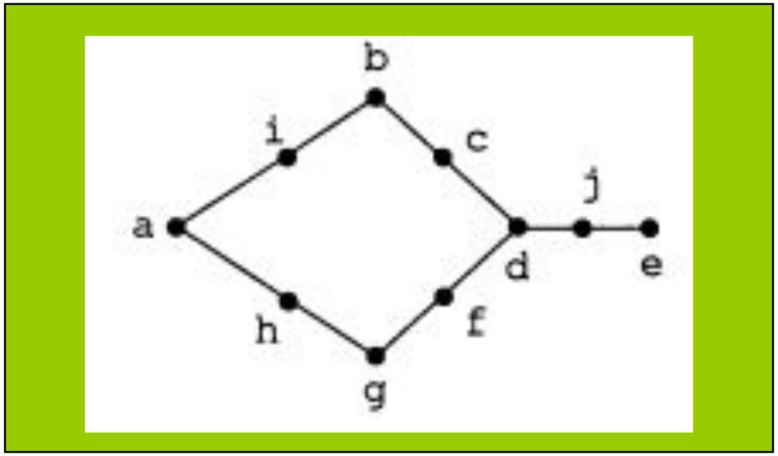


Пример.

Граф



является гомеоморфным графу



Теорема.

Если графы G и G' – гомеоморфны, то у них одинаковое количество вершин нечетной степени.

Доказательство:

Если граф $G'(V', E')$ – расширение графа $G(V, E)$, то новая добавленная вершина имеет степень 2. Степени других вершин не изменились.

Теорема

Если графы G и G' гомеоморфны, то граф G имеет эйлеров цикл (собственный путь) тогда и только тогда, когда граф G' имеет эйлеров цикл (собственный путь).

Если G' - подграф графа G, то обозначается $G' \preceq G.$

Определение.

Пусть $G(V, E)$ - граф и G_1 , G_2 , G_3 , …, G_n - подграфы графа G. Подграф G' графа G называется объединением графов G_1 , G_2 , G_3 , …, G_n и обозначается

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

если

1. Вершина $v \in G'$ тогда и только тогда, когда $v \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.
2. Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.

Определение.

Пусть $G(V, E)$ - граф и G_1, G_2, G_3, …, G_n - подграфы графа G. Подграф G' графа G называется пересечением графов G_1, G_2, G_3, …, G_n и обозначается

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

если

1. Вершина $v \in G'$ тогда и только тогда, когда $v \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.
2. Ребро $e \in G'$ тогда и только тогда, когда $e \in G_i$ для некоторого $1 \le i \le n$.

Определение.

Пусть $G(V, E)$ - граф G_1 , G_2 , G_3 , …, G_n - подграфы графа G. Подграфы G_1 , G_2 , G_3 , …, G_n являются попарно непересекающимися, если $G_i \cap G_J = \varnothing$ для всех $1 \le i < j \le n$.

Теорема.

Если G_1 и G_2 – различные компоненты графа G, то G_1 и G_2 - попарно непересекающиеся.

Теорема.

Граф G является объединением попарно непересекающихся компонент.

Определение.

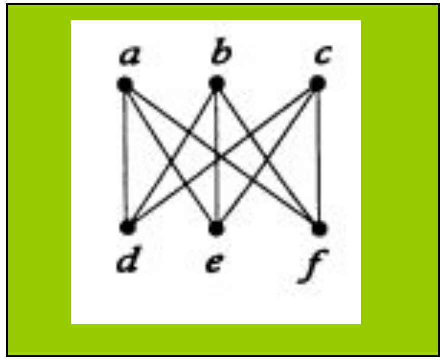
Пусть $G(V, E)$ - граф. ***Дополнением*** графа G называется граф такой, что для всех вершин $u, v \in V$ ребро между вершинами u и v в графе G^C существует тогда и только тогда, когда в графе G отсутствует ребро, соединяющее u и v.

Определение.

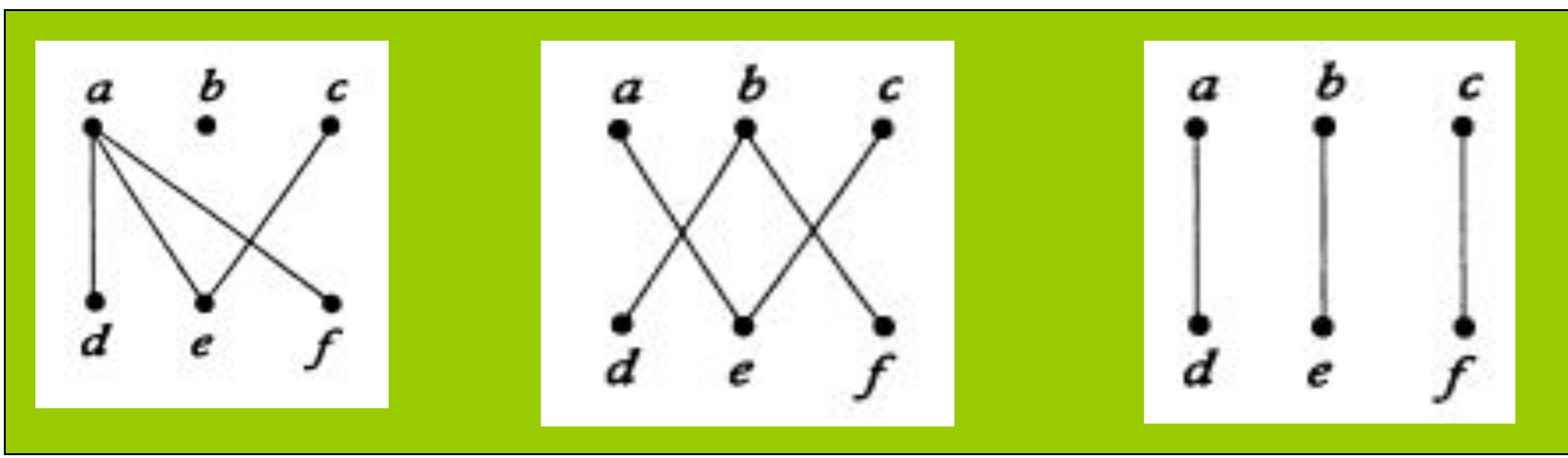
Подграф $G'(V', E')$ является ***остовным графом*** для графа $G(V, E)$, если $V' = V$.

Пример.

Для графа

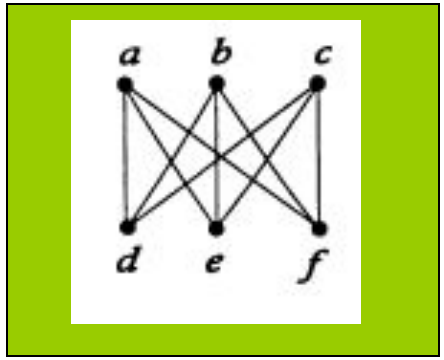


остовные графы

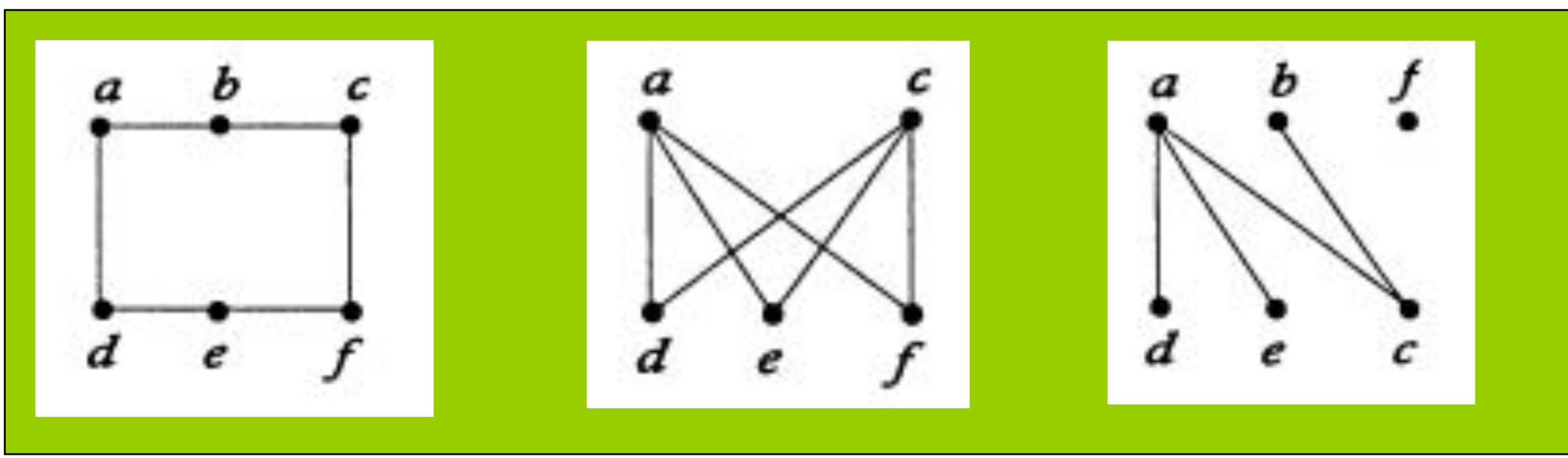


Пример.

Для графа



остовными **не** являются графы



Определение.

Дерево называется ***остовным деревом*** графа *G*, если оно является остовным графом графа *G*.

Теорема.

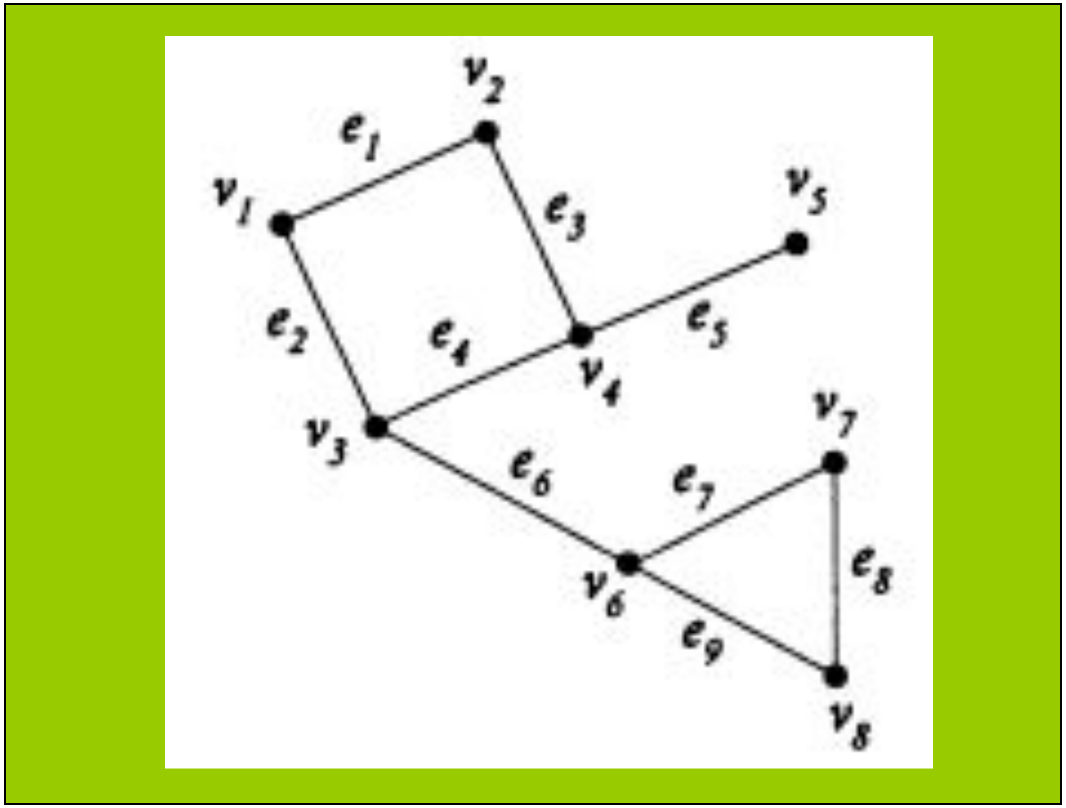
Если $T(V, E')$ - остовное дерево графа $G(V, E)$, то для любого цикла $v_0v_1v_2v_3v_4 \ldots v_0$, по крайней мере, одно из ребер принадлежит $E - E'$.

Определение.

Множество ребер *C* графа $G(V, E)$ называется ***разрезающим множеством***, если удаление ребер из множества *C* нарушает связность графа, а удаление собственного подмножества множества *C* оставляет граф связным. Если множество *C* состоит из одного ребра, то это ребро называется ***разрезающим ребром***.

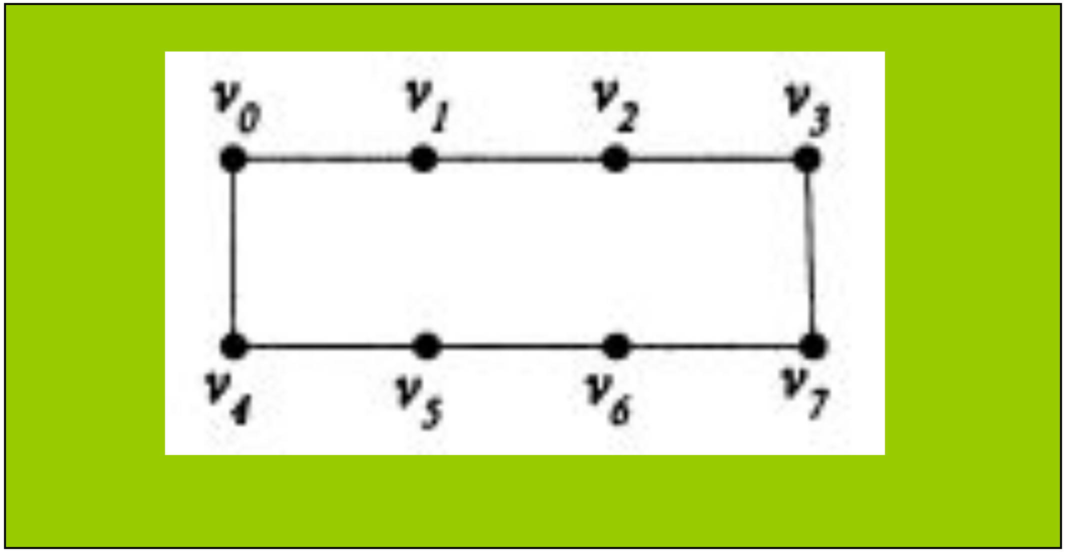
Пример.

Для графа *e*5 и *e*6 – разрезающие ребра



Пример.

Для графа $\{\{v_1, v_2\}, \{v_5, v_6\}\}$ и $\{\{v_2, v_3\}, \{v_6, v_7\}\}$ – разрезающие множества



Теорема.

Если $T(V, E')$ - остовное дерево графа $G(V, E)$ и С – разрезающее множество графа G, то $C \cap E' \neq \varnothing$.

Теорема.

Ребро e графа G является разрезающим ребром графа G тогда и только тогда, когда оно не входит в цикл графа G.

Задача

Сколько городов лишится связи, если коммутационная сеть выйдет из строя в определенном городе (вершине графа).

Вопрос: Что произойдет, если удалить вершину графа?

Определение.

Вершина $a \in V$ связного графа $G=(V, E)$ является ***разрезающей вершиной***, или точкой сочленения, если удаление этой вершины и инцидентных ей ребер к нарушению связности графа.

Определение.

Граф $G=(V, E)$ называется ***двусвязным***, если не содержит точек сочленения.

Теорема

Вершина a графа $G=(V, E)$ является точкой сочленения тогда и только тогда, когда существуют различные вершины u и v такие, что каждый путь из v в w проходит через a .

Доказательство: *Достаточность*.

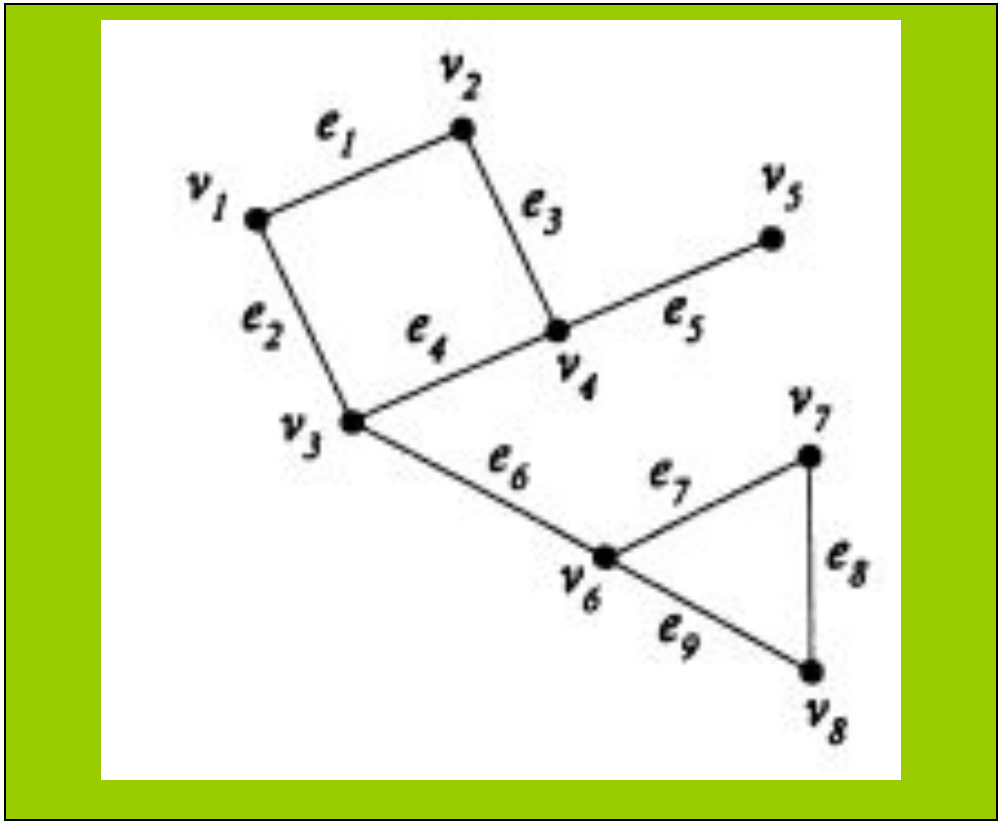
Предположим, каждый путь из вершины v в w проходит через вершину a. Если a удалена ⇒ не существует более одного пути из v в w , граф G становится несвязным. ⇒ Вершина a – точка сочленения.

Необходимость.

Доказательство от противного. Пусть для каждой пары вершин v и w существует путь, который не проходит через a. При удалении вершины a для всех v , $w \in V$ всегда остается путь из вершины v в w ⇒ граф G остается связным ⇒ Вершина a не является точкой сочленения.

Пример.

Вершины v3, v4, v6 – разрезающие вершины



Теорема

Для связного графа $G=(V, E)$ определим отношение R на E:

$e_1\ R\ e_2$, если $e_1 = e_2$ или в графе G существует простой цикл, содержащий e_1 и e_2 в качестве ребер. Тогда отношение R является отношением эквивалентности.

Определение.

Пусть для каждого класса эквивалентности E_i и отношения эквивалентности R V_i - множество вершин, инцидентных ребрам из множества E_i и $G_i=(V_i, E_i)$ - подграф графа $G=(V, E)$ с вершинами V_i и ребрами E_i . Подграф $G_i=(V_i, E_i)$ называется ***компонентой двусвязности*** графа $G=(V, E)$.

Теорема.

Если (a, b) и (c, d) - различные ребра из компоненты двусвязности $G_i=(V_i, E_i)$, то в графе $G_i=(V_i, E_i)$ существует простой цикл, содержащий в качестве ребер (a, b) и (c, d).

Теорема.

Если компонента двусвязности $G_i = (V_i, E_i)$ состоит из единственного ребра e_i, то e_i - разрезающее ребро графа G.

Теорема.

Если каждые два различных ребра входят в общий простой цикл графа $G=(V, E)$, то граф $G=(V, E)$ - двусвязный.

Следствие.

Подграф $G=(V, E)$ - двусвязный.

Теорема.

Если $G_i = (V_i, E_i)$ и $G_J = (V_J, E_J)$ - компоненты двусвязности графа $G=(V, E)$, то $V_i \cap V_J$ содержит не более одной вершины.

Теорема.

Вершина a является точкой сочленения тогда и только тогда, когда для некоторого $i \neq j$ эта вершина принадлежи $V_i \cap V_J$ для компонент двусвязности $G_i=(V_i, E_i)$ и $G_J=(V_J, E_J)$.

Теорема.

Граф $G=(V, E)$ является двусвязным тогда и только тогда, когда любые два различных ребра входят в один и тот же простой цикл графа $G=(V, E)$.

Теорема.

Если $G_i=(V_i, E_i)$ - компонента двусвязности графа $G=(V, E)$ и $G_i=(V_i, E_i) \neq G=(V, E)$, то существует, по крайней мере, одна несовпадающая компонента дусвязности $G_J=(V_J, E_J)$ такая, что $V_i \cap V_J$ содержит ровно одну вершину.

Последний слайд лекции