ТЕМА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

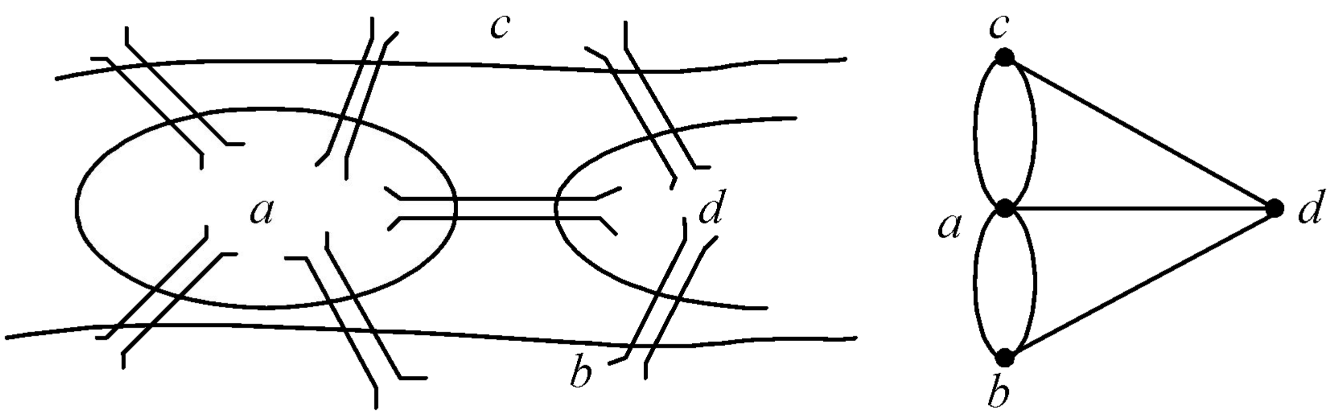
1. Введение
2. Основные понятия и определения. Способы задания графов
3. Типы графов
4. Расстояния и пути в графах. Центры и периферийные вершины
5. Операции над графами

Введение

Первая работа по графам была опубликована математиком Эйлером в 1736 году.

Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах: можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя в точности один раз по каждому мосту.

По условию задачи не имеет значения, как проходит путь по частям суши *a*, *b*, *c*, *d*, поэтому их можно представить точками или вершинами. А так как связи осуществляются через семь мостов, то каждый из них можно изобразить линией, соединяющей эти вершины.



а б

Начало развития теории графов как самостоятельной математической дисциплины положено Д. Кенигом, выпустившим в 1936 году книгу « Теория конечных и бесконечных графов».

Теория графов – раздел дискретной математики, основным объектом исследования которой являются графы.

Графом называют геометрическую схему, представляющую собой систему линий, связывающих какие то заданные точки.

Точки называются вершинами, а связывающие их линии – ребрами (или дугами).

Теория графов обосновывает способы построения графов, выражающих зависимости или связи в форме геометрических схем между различными единицами той или иной совокупности.

Фактически теория графов есть совокупность способов топологических представлений каких-либо процессов или структур.

Теория графов имеет большое прикладное значение.

Проблемы оптимизации тепловых, газовых и электрических сетей, вопросы совершенствования алгоритмов, структурный синтез систем управления связаны с фундаментальными свойствами таких абстрактных математических объектов, как графы.

Графами можно представить любую структуру или систему.

Также графа используются при описании технологических процессов.

Технологические процессы имеют циклический характер и обычно представляют собой последовательность сменяющих друг друга технологических операций.

Описание технологических циклов является неотъемлемой частью моделирования технологических объектов и основой формирования управляющих программ АСУТП.

В настоящее время круг задач, решаемых с помощью аппарата теории графов, очень разнообразен:

- анализ и синтез цепей и систем
- проектирование каналов связи
- исследование процессов передачи информации
- автоматизация проектирования
- теория кодирования и теория игр
- выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях и т. д.

Основные понятия и определения. Способы задания графов

Ориентированный граф G представляет собой множество элементов с их отображениями в этом множестве и обозначается символом

$$G = (X, Г),$$

где $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ - множество элементов

$Г$: $X \rightarrow X$ – множество, определяющее закон отображения

Существует три различных способа задания графа:

-аналитический,
-геометрический (графический)
- матричный.

При **аналитическом способе** задания для каждого элемента x_i множества X должно быть определено отображение Γ_{x_i}

Эти множества однозначно определяют ориентированный граф G.

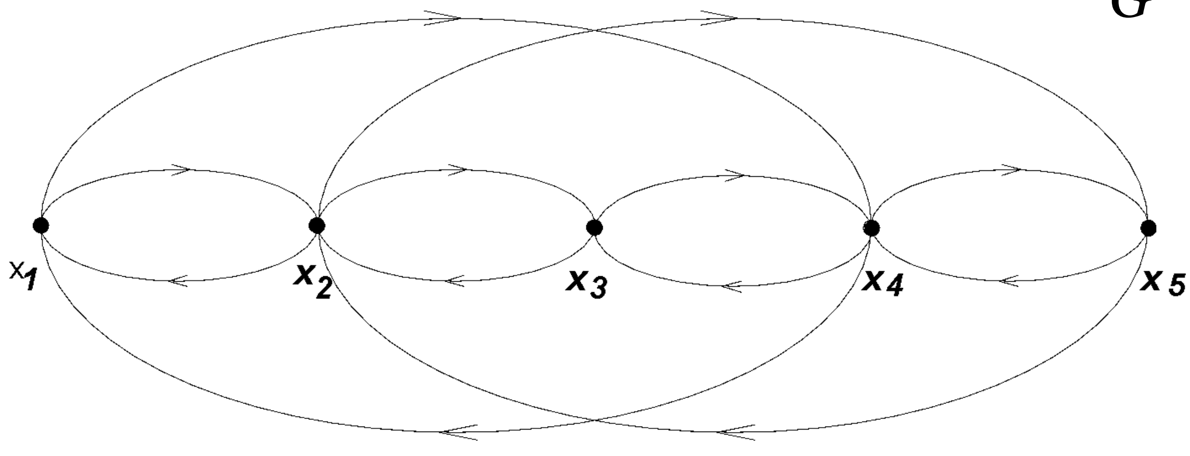
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ *- множество вершин графа*

$$\Gamma x_1 = \{ x_2, x_4\};$$
$$\Gamma x_2 = \{ x_1, x_3, x_5\};$$
$$\Gamma x_3 = \{ x_2, x_4\};$$
$$\Gamma x_4 = \{ x_1, x_3, x_5\};$$
$$\Gamma x_5 = \{ x_2, x_4\}.$$

При ***геометрическом способе*** задания графа элементы множества X изображаются точками плоскости и называются вершинами графа.

Линии, соединяющие любые пары точек x_i, x_j из которых x_j является отображением x_i называются дугами, или ориентированными ребрами. Дуги графа имеют направление, обозначаемое стрелкой в направлении от x_i к x_j .

G

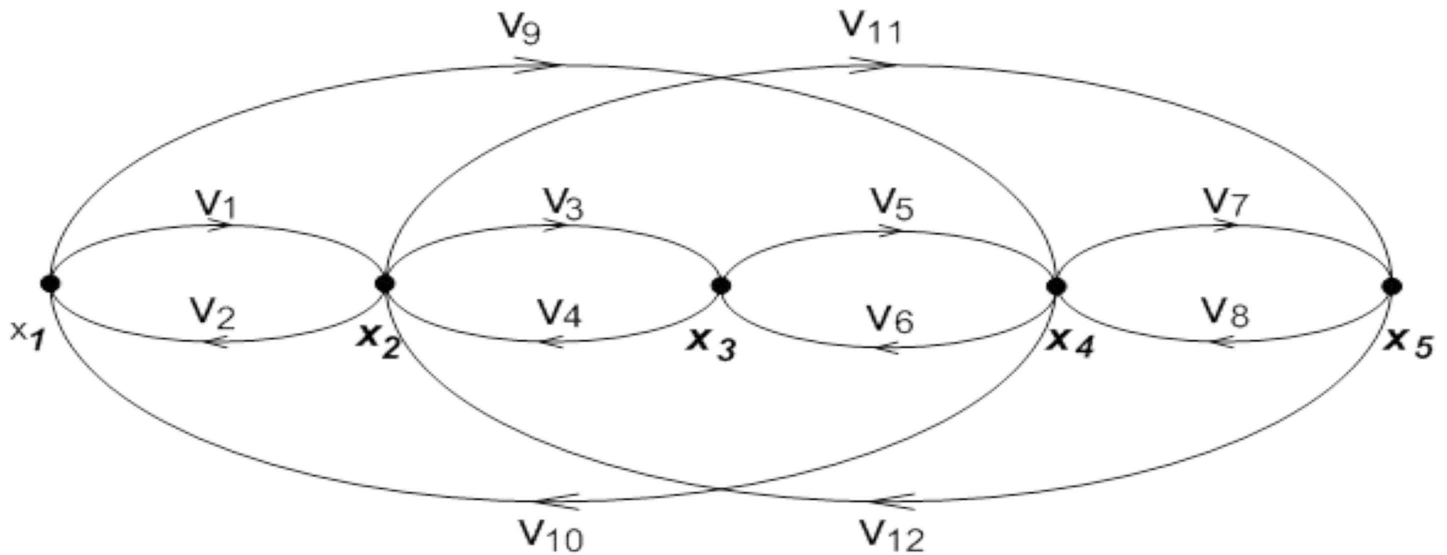


Если $x_i = x_j$ то дуга изображается линией без стрелки и называется **петлей.**

Каждую дугу (x_i, x_j) можно обозначить буквой $v_{k \in} V$, где V- множество упорядоченных дуг рассматриваемого графа.

Тогда граф G можно определить также как $G=(X,V)$, где V – множество упорядоченных пар $(x_i, x_j) = v_k$

Вершины графа могут располагаться в произвольном порядке и соединяться прямыми или кривыми линиями.



Две вершины графа называются **смежными**, если существует инцидентное им ребро. Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

Если вершина является одним из концов дуги то говорят, что они ***инцидентны***, т. е. вершина инцидентна дуге, а дуга инцидентна вершине.

Таким образом, смежность – отношение между однородными объектами, инцидентность– между разнородными.

При ***матричном способе*** задания ориентированный граф можно описать матрицей смежности или матрицей инцидентности.

Матрица смежности R_G ориентированного графа $G(X, Г)$ с n вершинами – это квадратная матрица порядка n, элементы r_{ij} которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть дуга, идущая из } x_i \text{ в } x_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$R_G =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	1	0
x_2	1	0	1	0	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	1	0	1	0	1
x_5	0	1	0	1	0

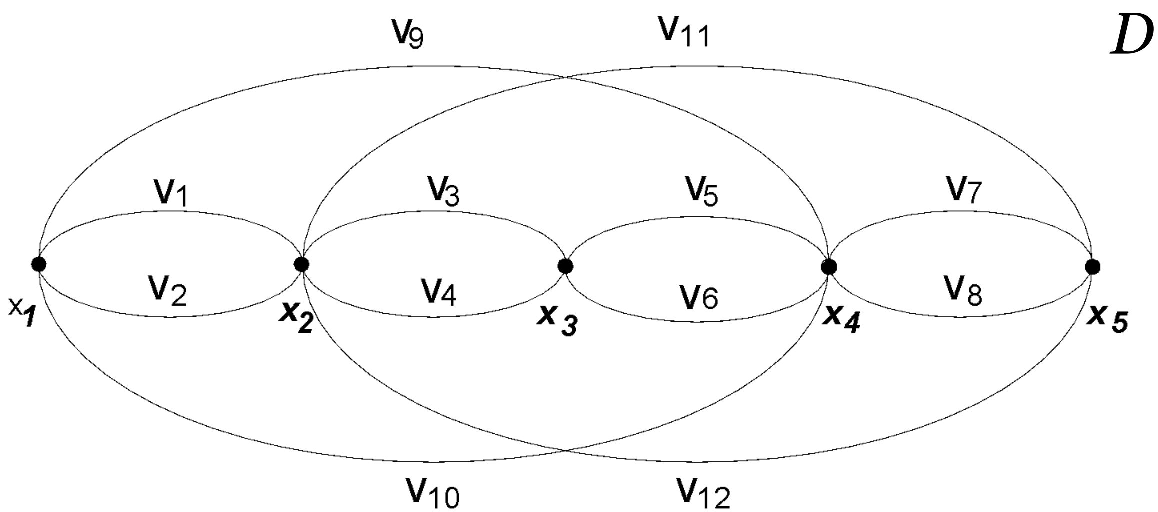
Матрица инцидентности A_G ориентированного графа $G(X, \Gamma)$ – это прямоугольная матрица размером $n \times m$ (n – число вершин, m – число дуг), элементы a_{ij} которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я дуга выходит из } i\text{-й вершины;} \\ -1, & \text{есть } j\text{-я дуга заходит в } i\text{-ю вершину;} \\ 0, & \text{если } i\text{-я вершина не инцидентна } j\text{-й дуге.} \end{cases}$$

$A_G =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
x_1	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
x_2	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1
x_3	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	-1	1	1	-1	-1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	-1	1

Иногда граф рассматривают без учета ориентации его дуг, в этом случае граф называют неориентированным.



Такой неориентированный граф называется соотнесенным данному ориентированному.

Матрица смежности R_D неориентированного графа $D(X, \Gamma)$ с n вершинами – это квадратная матрица порядка n, элементы r_{ij} которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} \ell, & \text{если } i\text{-я и } j\text{-я вершины соединены } \ell \text{ ребрами;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$R_D =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	2	0	2	0
x_2	2	0	2	0	2
x_3	0	2	0	2	0
x_4	2	0	2	0	2
x_5	0	2	0	2	0

Матрица инцидентности A_D неориентированного графа $D(X, V)$ – это прямоугольная матрица размером $n \times m$ (n – число вершин, m – число дуг), элементы a_{ij} которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я вершина инцидентна } j\text{-му ребру;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

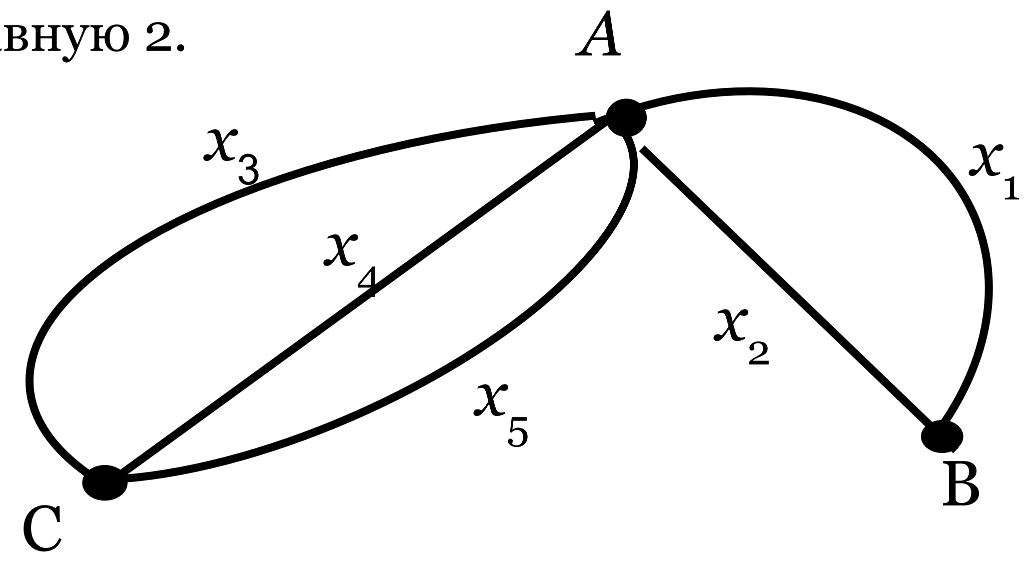
$A_D =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
x_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

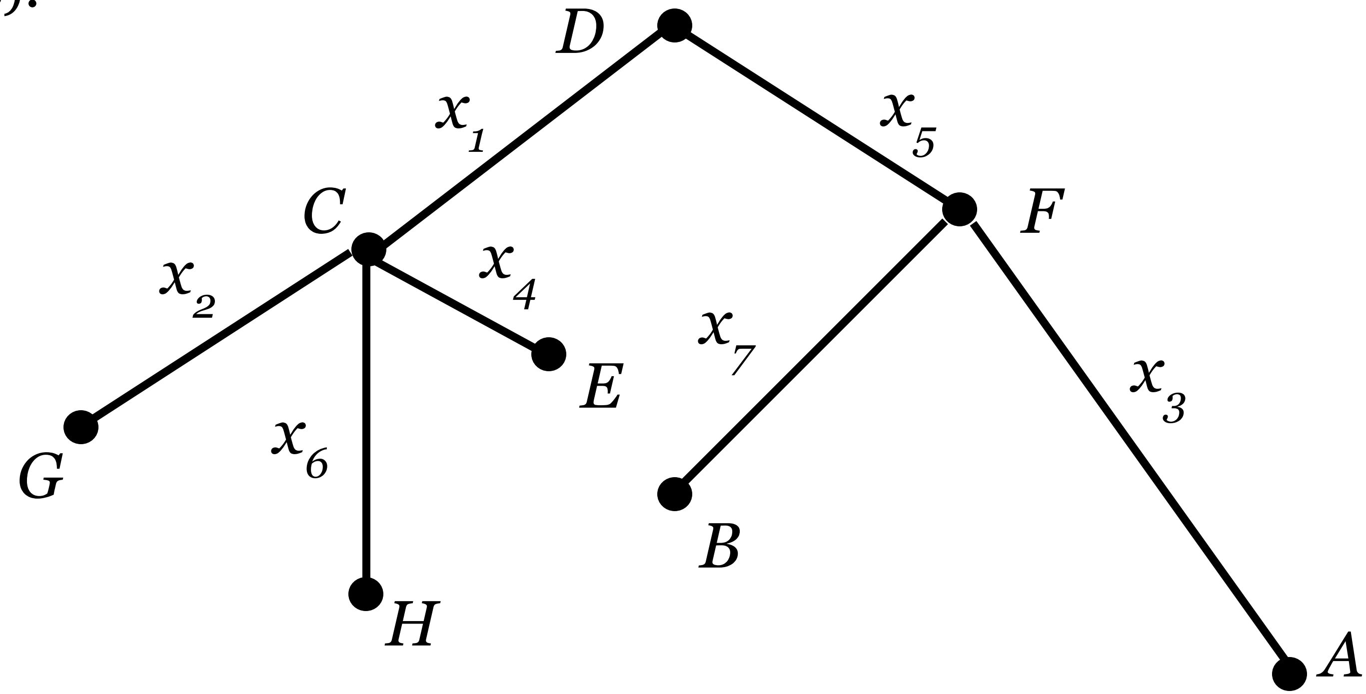
Рёбра, которые начинаются в одной и той же вершине, заканчиваются также в одной и той же вершине, называются **кратными**, или **параллельными**.

Количество одинаковых пар вида (V,W) называется **кратностью** ребра (V,W).

Ребро АС имеет кратность, равную 3,
Ребро АВ – кратность, равную 2.



Число рёбер, инцидентных вершине *A*, называется **степенью** этой вершины и обозначается **deg(A)** (от англ. *degree* – степень).



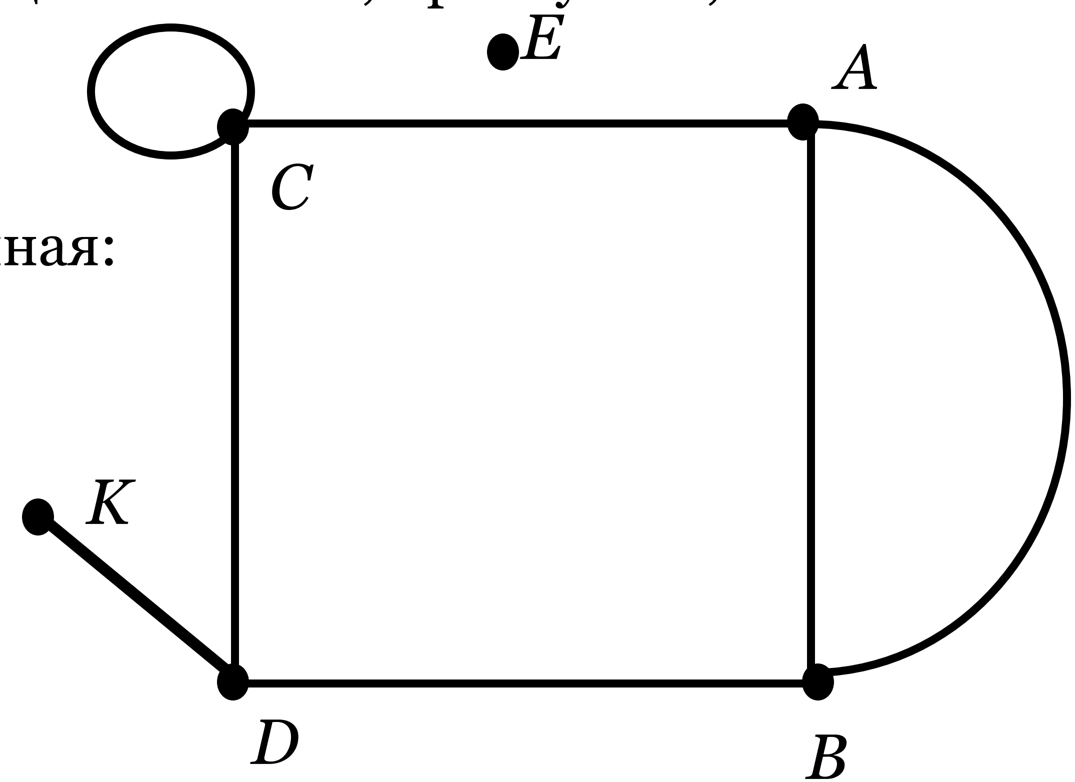
Вершина *A* имеет степень, равную 1, вершина *C* – 4, вершина *D* – 2. Записывается это в виде:

$$\deg(A)=1,\ \deg(C)=4,\ \deg(D)=2.$$

Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется **изолированной**.

Граф, состоящий из изолированных вершин, называется **нуль-графом**.

Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется **висячей**.



Вершина E – изолированная:

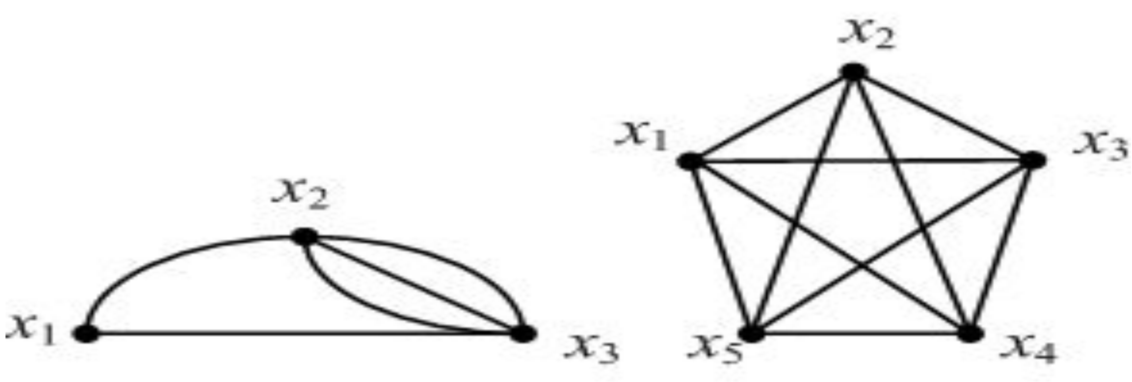
$\deg(E)=0$.

Вершина K- висячая

3 Типы графов

Граф без петель и кратных ребер называется ***простым***. Граф без петель, но с кратными ребрами называется ***мультиграфом*** *(а)*.

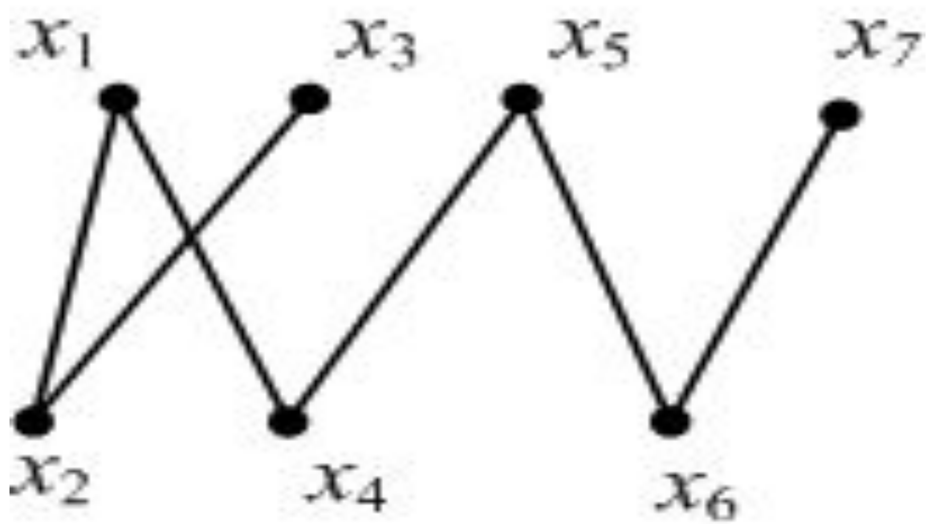
Наибольшее число ребер образует мультичисло и называется ***кратностью***. Простой граф, в котором две любые вершины соединены ребром, называется ***полным*** и обозначается K_n, где n- число вершин (б).



а б

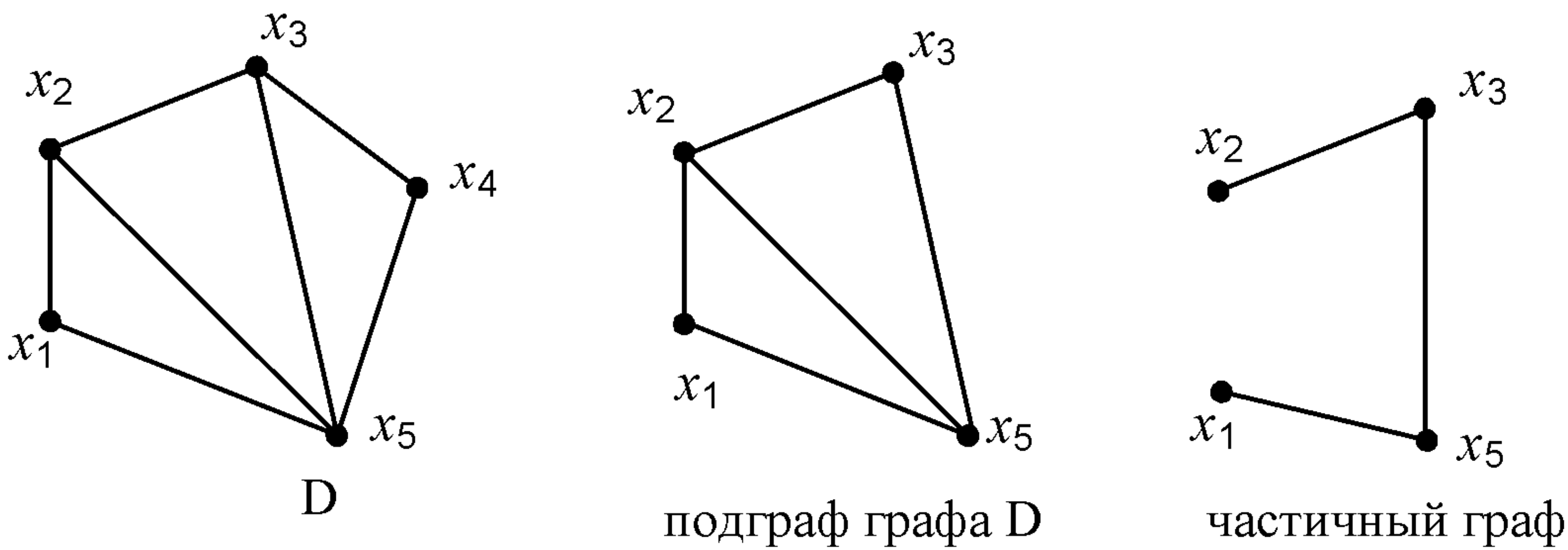
Граф называется ***двудольном*** (биграфом), если множество его вершин X может быть разбито на два таких подмножества X_1 и X_2 , что каждое ребро имеет один конец в подмножестве X_1, а другой в подмножестве X_2, при этом

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing \qquad X_1 \cup X_2 = X.$$

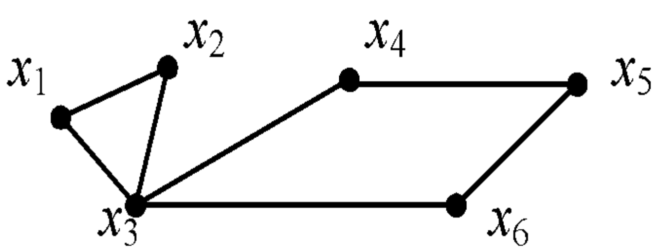


Подграфом графа *D* (или *G*) называется граф, в которой входит лишь часть вершин графа *D* (или *G*) вместе с ребрами, соединяющими эти вершины.

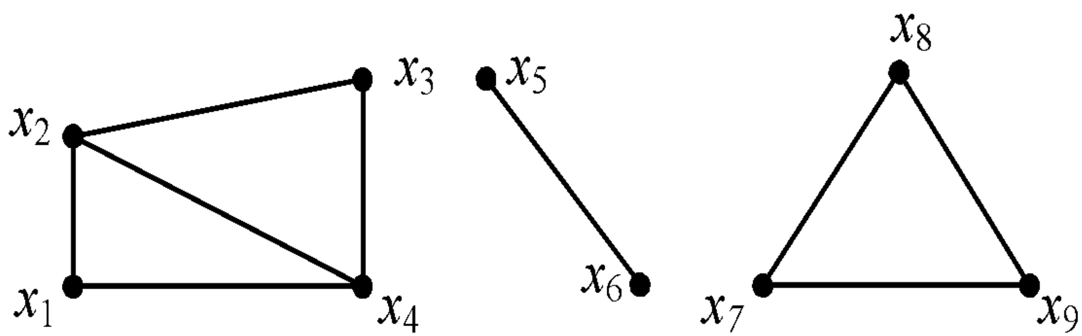
Частичным графом по отношению к графу *D* (или *G*) называется граф, содержащий только часть ребер графа.



Граф называется ***связным***, если каждую его вершину можно соединить с любой другой его вершиной некоторой последовательностью ребер. Если граф не связан, то его можно разбить на подграфы так, что все его вершины в каждом подграфе связны. Такие подграфы называются компонентами связности графа.

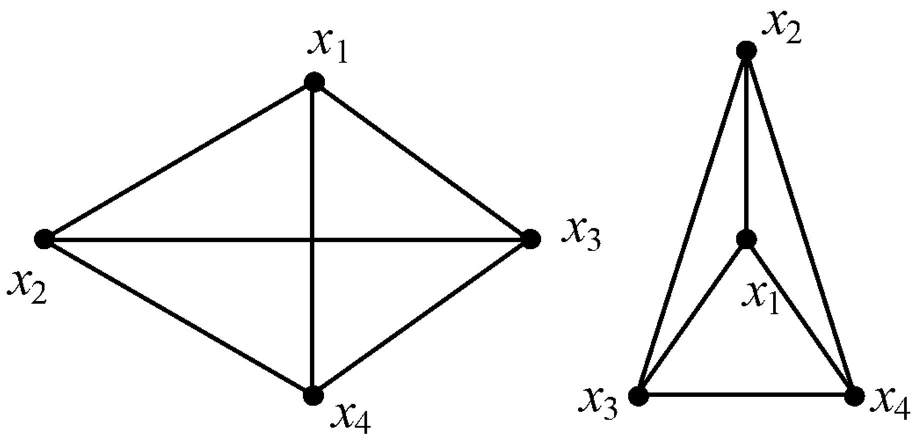


а



б

Графы называются ***изоморфными***, если между множествами их вершин существует взаимооднозначное соответствие, такое, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только в том случае, если соединены соответствующие им вершины в другом графе.



Изоморфизм – это отношение эквивалентности на графах.

Граф $D=(X,V)$ называется **плоским (планарным)**, если существует изоморфный ему граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер.

4 Расстояния и пути в графах. Центры и периферийные вершины

Путь в ориентированном графе G – это последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей.

Путь μ обозначается последовательностью вершин, которые в него входят, например, $\mu = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

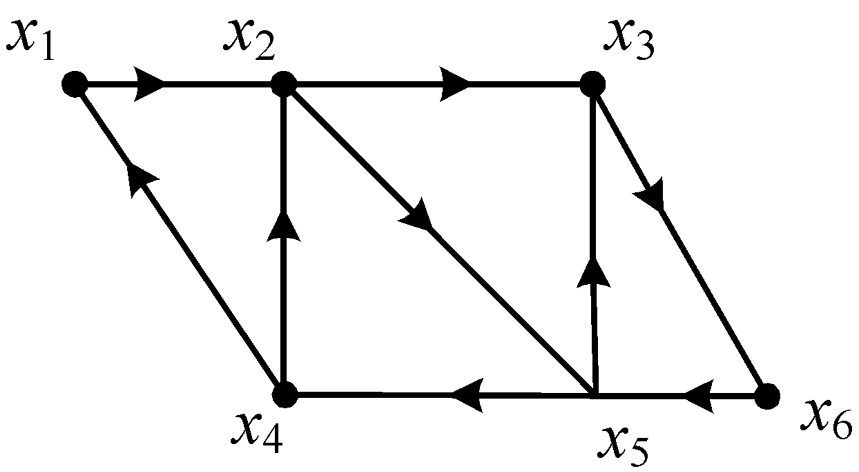
Длина ℓ пути μ определяется числом дуг, составляющих этот путь $\ell(\mu) = k$.

Путь, в котором никакая дуга не встречается дважды, называется ***простым***.

Путь, в котором никакая вершина не встречается дважды, называется ***элементарным***.

Контур – это конечный путь $\mu = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, у которого начальная вершина x_1 совпадает с конечной x_k.

Контур называется *элементарным*, если все его вершины различны.



$\mu_1 = (x_1, x_2, x_5, x_4, x_2, x_3, x_6)$ – простой путь;

$\mu_2 = (x_1, x_2, x_3, x_6)$ – элементарный путь;

$\mu_3 = (x_2, x_5, x_4, x_2)$ – контур.

Отклонением $d(x_i, x_j)$ вершины x_i от вершины x_j называется длина кратчайшего пути из x_i в x_j

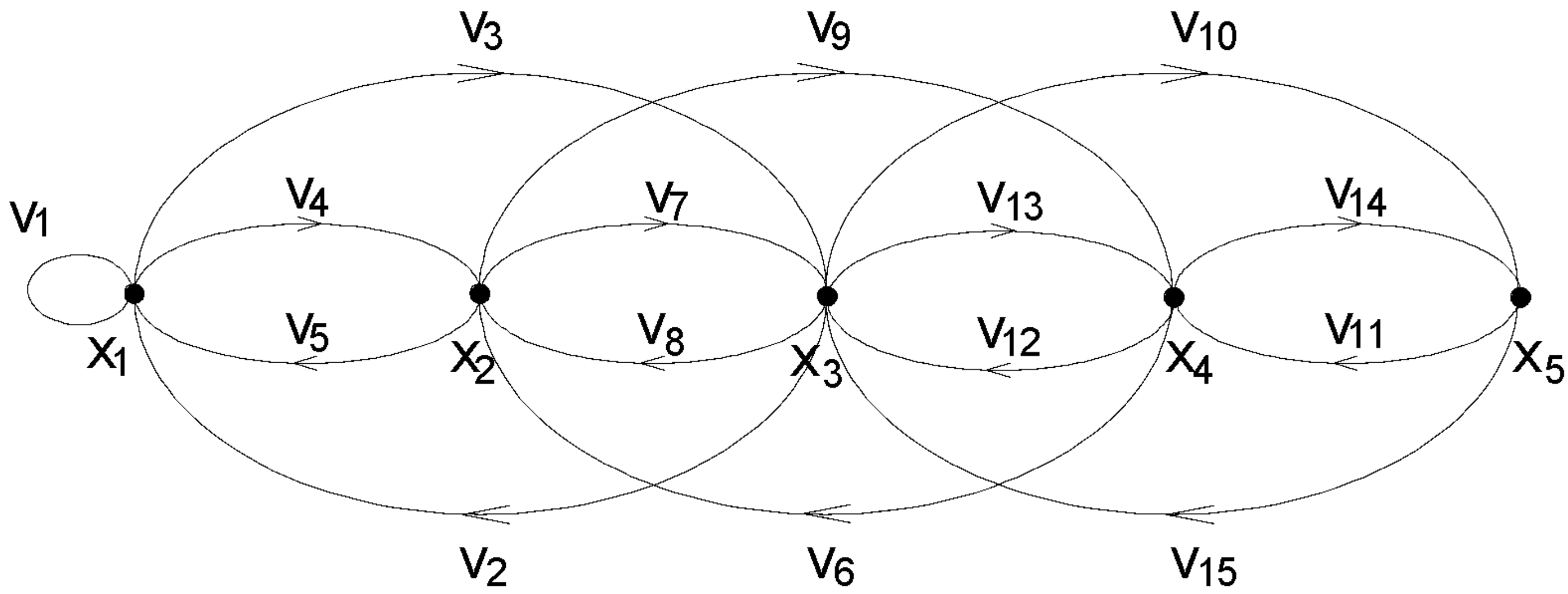
$$d(x_i x_j) = min\{l(x_i\ x_j)\}$$

Отклоненностью вершины x_i называется число $d(x_i)$ =max $d(x_i\ x_j)$, т.е. это наибольшее из отклонений вершины x_i от всех остальных.

Вершина графа с наименьшей отклоненностью называется ***центром графа***. В графе может быть несколько центров. Вершина с наибольшей отклоненностью называется ***периферийной вершиной***.

Радиусом ρ(G) ориентированного графа называется отклоненность центра.

Диаметром D(G) ориентированного графа называется отклоненность периферийной вершины



$d(x_i, x_j)$ – матрица отклонений имеет вид

$$d(x_i, x_j) =$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	2	2
x_2	1	0	1	1	2
x_3	1	1	0	1	1
x_4	2	1	1	0	1
x_5	2	2	1	1	0

$d(x_i)$ – вектор отклонения

$$d(x_i) = \max d(x_i, x_j) = \begin{array}{c|c|} x_1 & 2 \\ x_2 & 2 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 2 \\ x_5 & 2 \end{array}$$

x_3 – центр графа.

Радиус $\rho(G) = 1$.

Периферийными вершинами являются вершины x_1, x_2, x_4, x_5 с наибольшей удаленностью.

Диаметр графа $D(G) = 2$.

В неориентированных графах перемещаться можно в любом направлении, здесь вместо понятий «путь», «отклонение» и «отклоненность» используются понятия «цепь», «расстояние» и «удаленность». Замкнутая цепь называется циклом.

Расстоянием $\boldsymbol{d(x_i, x_j)}$ между двумя вершинами x_i и x_j неориентированного графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины:

$$d(x_i,x_j) = \min \{\ell(x_i,\ldots, x_j)\}.$$

Удаленностью вершины $\boldsymbol{x_i}$ называется число $d(x_i) = \max d(x_i, x_j)$, соответствующее наибольшему из расстояний от вершины x_i до всех остальных.

5 Операции над графами

Теоретико-множественные свойства графов определяют операции *объединения*, *пересечения*, *дополнения* до насыщенного графа и *разности* графов.

Пусть $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ и $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ – произвольные подграфы некоторого графа.

Граф $G = (X, \Gamma)$ называется ***объединением графов*** G_1 и G_2 и обозначается

$$G = G_1 \cup G_2$$

если $X = X_1 \cup X_2$ и $\Gamma = \Gamma_{1x} \cup \Gamma_{2x}$

Граф $G = (X, Г)$ называется ***пересечением*** графов G_1 и G_2 и обозначается

$$G = G_1 \cap G_2$$

если $X = X_1 \cap X_2$ и $Г = Г_{1x} \cap Г_{2x}$

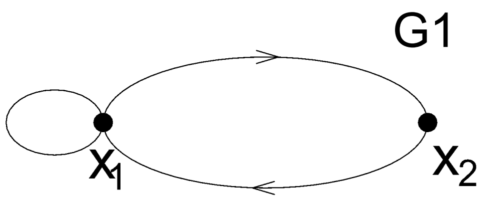
Насыщенным называется граф, матрица смежности которого содержит только единичные элементы. Это значит, что в насыщенном графе в каждой вершине есть петля и каждые две вершины связаны дугами.

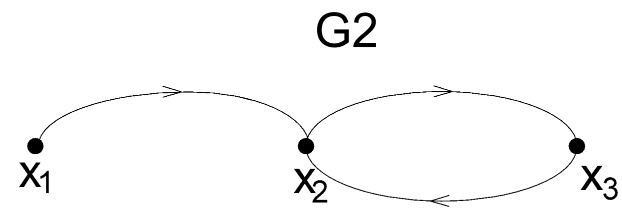
Дополнением по ***отображению*** графа G до насыщенного графа G_x называется граф $\overline{G} = (X, \overline{Г})$, у которого $\overline{Г}_x = X \setminus Г_x$

Разностью графов $G_1(X_1, Г_1)$ и $G_2(X_2, Г_2)$ называется граф $G(X, Г) = G_1 \setminus = G_1 \cap \overline{G}_2$

Пример:

Даны два подграфа G1 и G2. Найти объединение, пересечение и разность подграфов.





G1 : $X_1 - \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_{1x1} = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_{1x2} = \{x_1\}$,

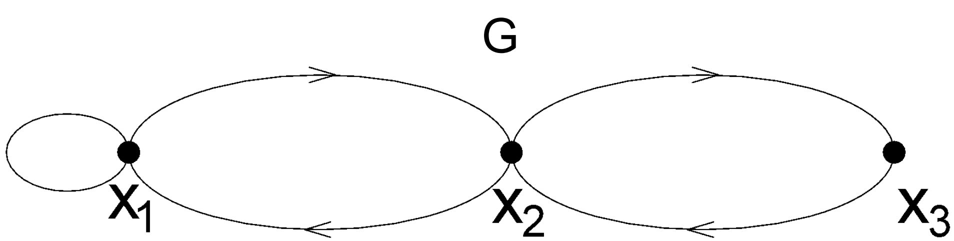
G2: $X_2 - \{x_1, x_2, x_3\}$, $\Gamma_{2x1} = \{x_2\}$, $\Gamma_{2x2} = \{x_3\}$, $\Gamma_{2x3} = \{x_2\}$.

Объединение $G = G_1 \cup G_2 \quad X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$

$$\Gamma_{x1} = \Gamma_{1x1} \cup \Gamma_{2x1} = \{x_1, x_2\}$$

$$\Gamma_{x2} = \Gamma_{1x2} \cup \Gamma_{2x2} = \{x_1, x_3\}$$

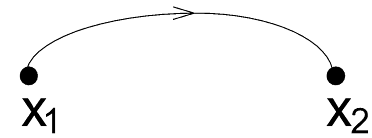
$$\Gamma_{x3} = \Gamma_{1x3} \cup \Gamma_{2x3} = \{x_2\}$$



Пересечение $G = G_1 \cap G_2$ $X = X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2\}$

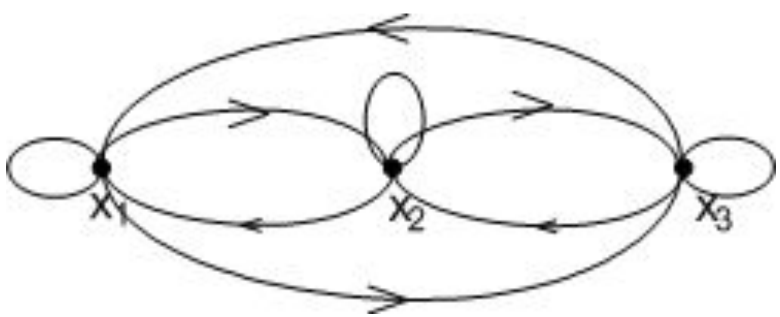
$\Gamma_{x1} = \Gamma_{1x1} \cap \Gamma_{2x1} = \{x_2\}$

$\Gamma_{x2} = \Gamma_{1x2} \cap \Gamma_{2x2} = \emptyset$

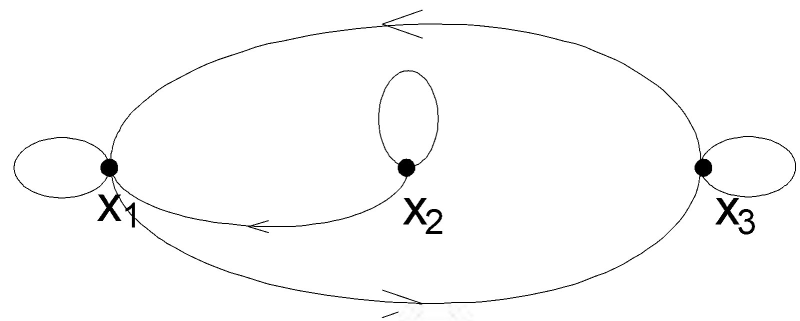


Разность $G = G_1 \setminus G_2 = G_1 \cap \overline{G_2}$

$\overline{G_2} = (X_2, \overline{\Gamma_2})$ - дополнение по отображению графа G2 до насыщенного



$\overline{G_2} = (X_2, \overline{\Gamma_2})$



$\overline{\Gamma}_{2x1} = \{x_1, x_3\}$ $\overline{\Gamma}_{2x2} = \{x_1, x_2\}$

$\overline{\Gamma}_{2x3} = \{x_1, x_3\}$

$$G = G_1 \setminus G_2 = G_1 \cap \overline{G}_2$$

$$\Gamma_{x1} = \Gamma_{1x1} \cap \overline{\Gamma}_{2x1} = \{x_1\}$$

$$\Gamma_{x2} = \Gamma_{1x2} \cap \overline{\Gamma}_{2x2} = \{x_1\}$$