

Тема 5

Ряды динамики

Ряды динамики - статистические данные, отображающие развитие во времени изучаемого явления. Их также называют динамическими рядами , временными рядами .

В каждом ряду динамики имеется два основных элемента :

1. показатель времени t_i - это *моменты или периоды* времени, к которым относятся числовые значения показателей.

2. соответствующие моментам времени уровни y_i развития изучаемого явления.

t_1	t_2	...	t_n
y_1	y_2	...	y_n

1. По времени различают:

* **Моментные ряды** динамики. Уровни такого ряда выражают состояние явления на определенные даты (моменты) времени.

Дата	1.01	1.04	1.07	1.10	1.01
Год	2004 г.	2004 г.	2004 г.	2004 г.	2005 г.
Число работников, чел.	192	190	195	198	200

* **Интервальные ряды** динамики. Уровни такого ряда выражают состояние явления за отдельные периоды (интервалы) времени.

Год	2000	2001	2002	2003	2004
Объем розничного товарооборота, тыс. руб.	885,7	932,6	980,1	1028,7	1088,4

Всякий ряд динамики может быть представлен в виде составляющих:

- * **тренд** - основная тенденция развития динамического ряда (к увеличению или снижению его уровней) ;
- * **циклические** (периодические колебания, в том числе сезонные);
- * **случайные колебания.**

8.1. Система характеристик ряда динамики

Система показателей ряда динамики включает в себя:

- * индивидуальные характеристики;
- * сводные или обобщающие характеристики.

Индивидуальные характеристики

1. Абсолютный прирост Δy_i .

- * цепной абсолютный прирост (сравнение с предыдущим уровнем):

$$\Delta y_{ци} = y_i - y_{i-1}, \quad i = \overline{2, n};$$

- * базисный абсолютный прирост (сравнение с начальным уровнем):

$$\Delta y_{би} = y_i - y_1, \quad i = \overline{2, n}.$$

2. Темп роста (коэффициент роста).

Темп роста – распространенный статистический показатель динамики . Он характеризует отношение двух уровней ряда и может выражаться в виде коэффициента или в процентах. **Базисные темпы роста (базисные коэффициенты роста)**

$$Tr_{\bar{b}i} = \frac{y_i}{y_1} 100\% \quad i = \overline{2, n}$$

$$Kp_{\bar{b}i} = \frac{y_i}{y_1}$$

Цепные темпы роста (цепные коэффициенты роста)

$$Tr_{\bar{c}i} = \frac{y_i}{y_{i-1}} 100\%$$

$$Kp_{\bar{c}i} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

3. Темп прироста (коэффициент прироста).

Темпы прироста характеризуют абсолютный прирост в относительных величинах. Исчисленный в процентах темп прироста показывает, на сколько процентов изменился сравниваемый уровень по отношению к уровню, принятому за базу сравнения.

Базисный темп прироста (базисный коэффициент прироста)

$$Tn_{\bar{b}i} = \frac{y_i - y_1}{y_1} 100\% = \frac{\Delta y_{\bar{b}i}}{y_1} 100\% \quad Kn_{\bar{b}i} = \frac{y_i - y_1}{y_1} = \frac{\Delta y_{\bar{b}i}}{y_1} \quad i = \overline{2, n}$$

Цепной темп прироста (цепной коэффициент прироста)

$$Tn_{\bar{ц}i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} 100\% = \frac{\Delta y_{\bar{ц}i}}{y_{i-1}} 100\% \quad Kn_{\bar{ц}i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} = \frac{\Delta y_{\bar{ц}i}}{y_{i-1}}$$

4. Абсолютное значение одного процента прироста.

Используется для оценки значения полученного темпа прироста. Он показывает, какое абсолютное значение соответствует одному проценту прироста.

$$A_i = \frac{\Delta y_{\text{ц}i}}{Tn_{\text{ц}i}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} 100\%} = \frac{y_{i-1}}{100\%}$$

Сводные или обобщающие характеристики

1) Средний уровень ряда.

* Для интервальных равноотстоящих рядов динамики средний уровень находится по формуле простой средней арифметической:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

Сводные или обобщающие характеристики

1) Средний уровень ряда.

Для интервальных неравноотстоящих рядов динамики средний уровень ряда находится по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

Сводные или обобщающие характеристики

1) Средний уровень ряда.

Средний уровень ряда определяется по средней хронологической. Средней хронологической называется средняя, исчисленная из значений, изменяющихся во времени.

Средний уровень моментного равноотстоящего ряда динамики находится по формуле средней хронологической простой:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}}{n-1} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + \frac{1}{2}y_n}{n-1} = \frac{\frac{y_1 + y_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i}{n-1}$$

Сводные или обобщающие характеристики

1) Средний уровень ряда.

Средний уровень моментного неравноотстоящего ряда динамики находится по формуле средней хронологической взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1})t_i}{2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i}$$

Примеры.

Пример 1. Покажем расчет среднего уровня *моментного* ряда динамики с *равноотстоящими* уровнями по данным о численности работников фирмы на 1-ое число каждого месяца 2015 г. (чел.)

01.01.2015	01.02.2015	01.03.2015	01.04.2015
347	350	349	351

$$\bar{y} = \frac{\frac{347}{2} + 350 + 349 + \frac{351}{2}}{3} = \frac{1048}{3} \approx 349$$

Пример 2. Известна списочная численность рабочих организаций на некоторые даты 2014 года.

01.01.2014	01.03.2014	01.06.2014	01.09.2014	01.01.2015
530	570	520	430	550

Ряд динамики имеет *неравноотстоящие* уровни во времени.

$$\bar{y} = \frac{(530 + 570)2 + (570 + 520)3 + (520 + 430)3 + (430 + 550)4}{2(2 + 3 + 3 + 4)} = \frac{12240}{12} = 510$$

Сводные или обобщающие характеристики

Средний абсолютный прирост представляет собой обобщенный показатель абсолютной скорости изменения явления во времени. Скоростью в данном случае будем называть прирост (уменьшение) в единицу времени.

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=2}^n \Delta y_{\psi i}}{n-1} = \frac{y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \dots + y_n - y_{n-1}}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$$

8.2. Проверка ряда на наличие тренда. Непосредственное выделение тренда

Изучение тренда включает в себя два основных этапа :

1. Ряд динамики проверяется на наличие тренда .
2. Производится выравнивание временного ряда и непосредственное выделение тренда с экстраполяцией полученных показателей — результатов .

Проверка на наличие тренда в ряду динамики может быть осуществлена по нескольким критериям .

1. Метод средних.
2. Фазочастотный критерий Валлиса и Мура знаков первой разности (абсолютного цепного прироста) .
3. Критерий серий.

Проверка на наличие тренда в ряду динамики может быть осуществлена по нескольким критериям.

3. Критерий серий. По этому способу каждый конкретный уровень временного ряда считается принадлежащим к одному из двух типов: например, если уровень ряда меньше медианного (или среднего) значения, то считается, что он имеет тип А, в противном случае - тип В. Теперь последовательность уровней выступает как последовательность типов. В образовавшейся последовательности типов определяется число серий **R** (серия - любая последовательность элементов одинакового типа, с обеих сторон граничащая с элементами другого типа, *включая* крайние последовательности).

* Критерий серий

Если в ряду динамики общая тенденция к росту или снижению *отсутствует*, то количество серий R является случайной величиной, распределенной приближенно по нормальному закону (для $n > 10$).

Следовательно, если закономерности в изменениях уровней нет, то случайная величина R оказывается в доверительном интервале

$$\bar{R} - t\sigma_R \leq R \leq \bar{R} + t\sigma_R$$

* Критерий серий

Параметр t назначается в соответствии с принятым уровнем доверительной вероятности p .

p	0,683	0,950	0,954	0,990	0,997
t	1	1,96	2	2,576	3

Среднее число серий вычисляется по формуле:

$$\bar{R} = (n+1)/2.$$

* Критерий серий

Среднее квадратическое отклонение числа серий вычисляется по формуле:

$$\sigma_R = \sqrt{(n-1)/2}$$

здесь n - число уровней ряда .

Выражение для доверительного интервала приобретает вид:

$$(n+1-t\sqrt{(n-1)})/2 \leq R \leq (n+1+t\sqrt{(n-1)})/2$$

Полученные границы доверительного интервала округляют до целых чисел, уменьшая нижнюю границу и увеличивая верхнюю .

Непосредственное выделение тренда может быть произведено тремя методами.

1. Метод укрупнения интервалов.

Ряд динамики разделяют на некоторое достаточно большое число равных интервалов. Средние уровни, рассчитанные по укрупненным интервалам, позволяют увидеть тенденцию развития явления.

Непосредственное выделение тренда может быть произведено тремя методами.

2. Метод скользящей средней.

В этом методе исходные уровни ряда заменяются средними величинами, которые получают из данного уровня и нескольких симметрично его окружающих.

Недостатком сглаживания ряда является укорачивание сглаженного ряда по сравнению с фактическим, а, следовательно, потеря информации.

Непосредственное выделение тренда может быть произведено тремя методами.

2. Метод скользящей средней.

Формулы расчета по скользящей средней выглядят, в частности, следующим образом :

При сглаживании по 3 уровням:

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}$$

При сглаживании по 5 уровням:

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}$$

Непосредственное выделение тренда может быть произведено тремя методами.

2. Метод скользящей средней.

При сглаживании по трем точкам выровненное значение в начале ряда рассчитывается по формуле :

$$\bar{Y}_1 = (5Y_1 + 2Y_2 - Y_3) / 6$$

Для последней точки расчет симметричен:

$$\bar{Y}_n = (5Y_n + 2Y_{n-1} - Y_{n-2}) / 6$$

Непосредственное выделение тренда может быть произведено тремя методами.

2. Метод скользящей средней.

При сглаживании по пяти точкам имеем такие уравнения:

$$\bar{Y}_1 = (3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 - Y_4) / 5 ,$$

$$\bar{Y}_2 = (4Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 + Y_4) / 10.$$

Для последних двух точек ряда расчет сглаженных значений полностью симметричен сглаживанию в двух начальных точках.

Непосредственное выделение тренда может быть произведено тремя методами.

3. Аналитическое выравнивание.

Под этим понимают определение основной проявляющейся во времени тенденции развития изучаемого явления. Отклонение конкретных уровней ряда от уровней, соответствующих общей тенденции, объясняют действием факторов, проявляющихся случайно или циклически. В результате приходят к трендовой модели:

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

где $f(t)$ – математическая функция, определяющая тенденцию развития ;

ε_t -случайное или циклическое отклонение от тенденции.

Целью аналитического выравнивания ряда динамики является определение аналитической или графической зависимости $f(t)$.

Чаще всего при выравнивании используются следующие зависимости :

* линейная $f(t) = a_0 + a_1 t;$

* параболическая $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2;$

* экспоненциальная $f(t) = \exp(a_0 + a_1 t)$.

Оценка параметров осуществляется методом наименьших

квадратов: $\sum_{t=1}^n (y_t - f(t))^2 \rightarrow \min$

Один из подходов к упрощению расчетов заключается в переносе начала координат в середину ряда динамики. Т.е., если отсчет ведется от середины ряда динамики - условного нуля, когда $\sum t = 0$

При **нечетном числе уровней** средняя точка (год, месяц) принимается за 0. Тогда предшествующие периоды обозначаются соответственно: -1, -2, -3, а следующие за нулем 1, 2, 3 и т.д.

При **четном числе уровней** два срединных момента (периода) времени обозначаются -1 и +1, а все последующие периоды, соответственно, через два интервала: $\pm 3, \pm 5, \pm 7$ и т.д.

Рассмотрим уравнение $f(t) = a_0 + a_1 t$

При переносе начала координат отсчета времени имеем:

$$a_0 = \frac{\sum y_t}{n}$$

$$a_1 = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2}$$

Пример.

Необходимо определить основную тенденцию ряда динамики числа продаж квартир в N-регионе за 2010-2014 год.

Годы	Число проданных квартир, тыс. ед.	t	t ²	y*t
2010	108	-2	4	-216
2011	107	-1	1	-107
2012	110	0	0	0
2013	111	1	1	111
2014	112	2	4	224
Итого	548	0	10	12

$$a_0 = \frac{548}{5} = 109,6$$

$$a_1 = \frac{12}{10}$$

$$y_t = 109,6 + 1,2t$$