Логарифмические неравенства

их типы и методы решения

Концентрация внимания:

кросс–опрос

Вклад каждого учёного в развитие логарифмов	Ответ
Непер	Изобрёл логарифмы, их название, создал первые **таблицы логарифмов**
Бюрги	Создатель **таблиц логарифмов** параллельно с Непером
Эйлер	Ввёл обозначение числа **е** и вычислил его с точностью до 23 знаков
Бриггс	Составил **таблицы десятичных логарифмов**
Оутред	Изобретатель **логарифмической линейки**
Ламберт	Доказал иррациональность числа **е** (т. е. число е не может быть квадратом какого-либо числа)
Эрмит	Доказал трансцендентность числа **е** (т.е. число е не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения)
Менголи	Ввёл термин **«натуральные логарифмы»**

Концентрация внимания равна N.

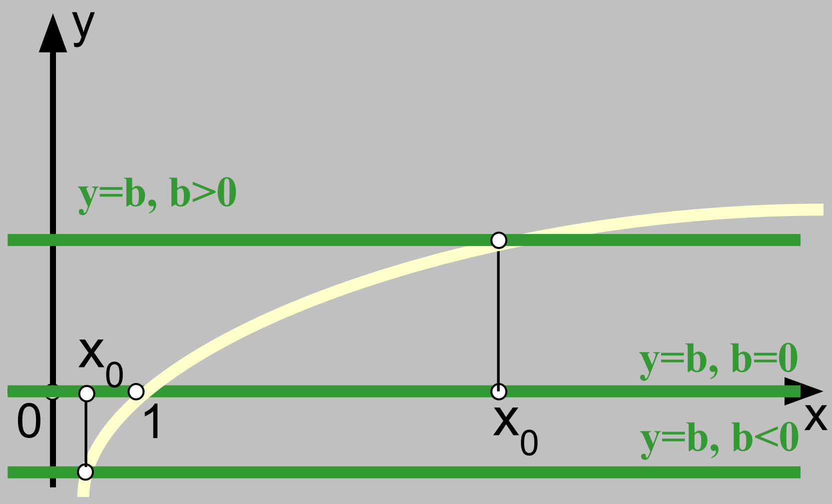
N = (число верных ответов) х 0,125 х 100%.

С в о й с т в а логарифмической функции

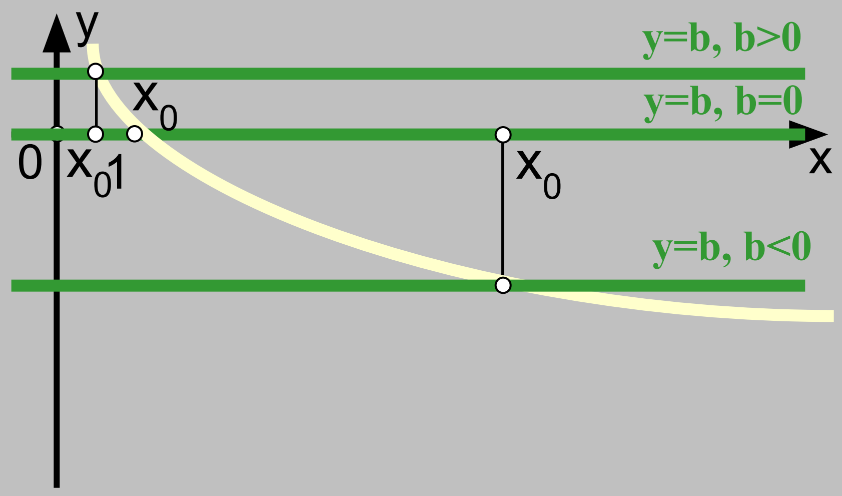
Свойства функции	$a > 1$	$0 < a < 1$
1. Область определения	$(0;\infty)$	
2. Область значений	$(-\infty;\infty)$	
3. Четность, нечетность	Функция не является ни четной, ни нечетной	
4. Нули функции	$y = 0$ при $x = 1$	
5. Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in (1;\infty)$ $y < 0$ при $x \in (0;1)$	$y > 0$ при $x \in (0;1)$ $y < 0$ при $x \in (1;\infty)$
6. Экстремумы	Функция экстремумов не имеет	
7. Промежутки монотонности при $x \in (0;\infty)$	Функция возрастает	Функция убывает
8. Асимптота	$x = 0$	

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ и прямой $y=b$

$y=\log_a x$ $(a>1)$



$y=\log_a x$ $(0<a<1)$



ВЫВОД:

График функции $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ и прямая $y=b$ пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x_0=a^b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Пусть $a > 0, a \neq 1, b \in R$, тогда неравенства $\log_a x > b$ ($\log_a x \geq b$) или $\log_a x < b$ ($\log_a x \leq b$) называются простейшими логарифмическими неравенствами.

Что значит решить неравенство?

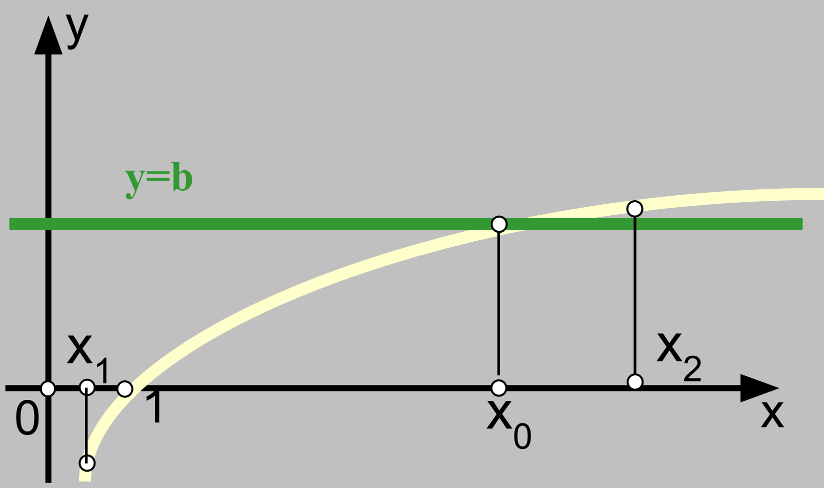
Решить неравенство - значит, найти все его решения или показать, что их нет.

Что называется решением неравенства?

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

ВЫВОД №1:

$y=\log_a x\ (a>1)$

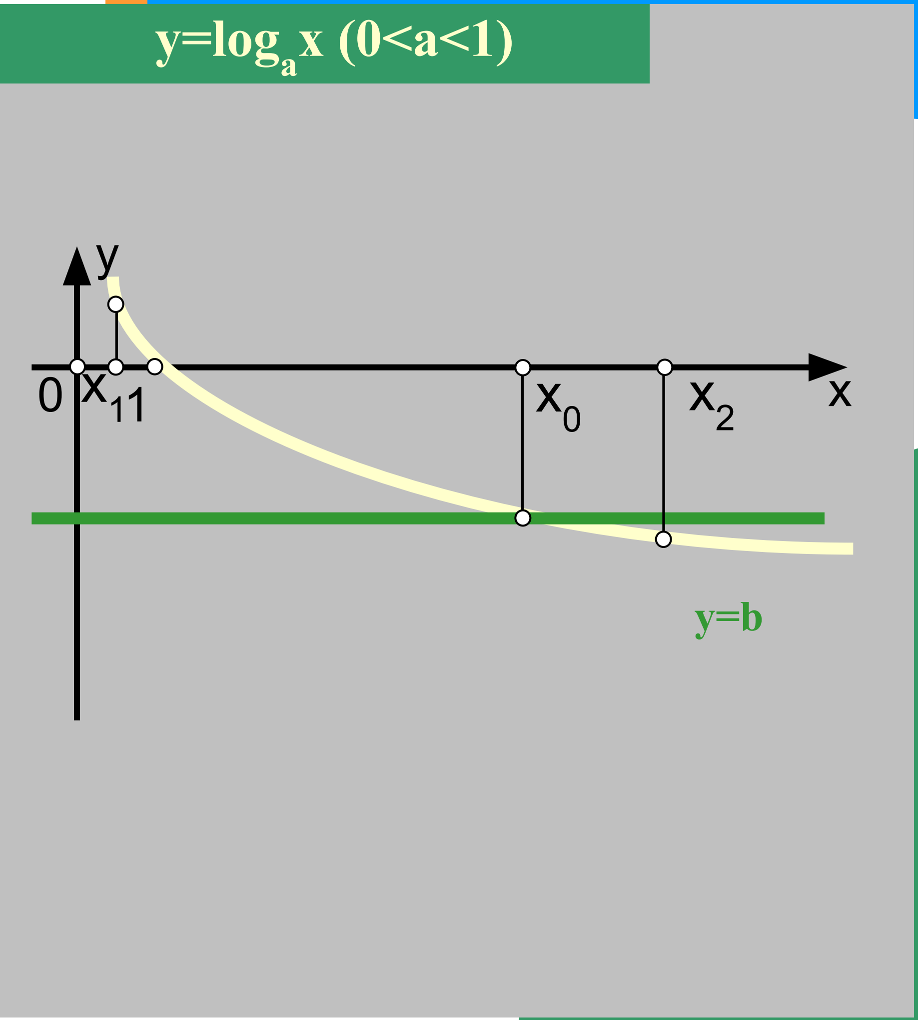


Если $a > 1$

для каждого $x_2 > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится выше прямой $y = b$

для каждого $0 < x_1 < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится ниже прямой $y = b$

ВЫВОД №2:



Если $0 < a < 1$

для каждого $x_2 > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится ниже прямой $y = b$

для каждого $0 < x_1 < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = \log_a x$ находится выше прямой $y = b$

Простейшие логарифмические неравенства

$a > 1$

$\log_a x > b$	$\log_a x \geq b$	$\log_a x < b$	$\log_a x \leq b$
$\log_a x > \log_a a^b$	$\log_a x \geq \log_a a^b$	$\log_a x < \log_a a^b$	$\log_a x \leq \log_a a^b$
$\begin{cases} x > 0, \\ x > a^b; \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0, \\ x \geq a^b; \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0, \\ x < a^b; \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0, \\ x \leq a^b; \end{cases}$
$x > a^b.$	$x \geq a^b.$	$0 < x < a^b.$	$0 < x \leq a^b.$

Простейшие логарифмические неравенства

$0 < a < 1$

$\log_a x > b$	$\log_a x \ge b$
$\log_a x > \log_a a^b$	$\log_a x \ge \log_a a^b$
$\begin{cases} x > 0, \\ x < a^b; \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0, \\ x \le a^b; \end{cases}$
$0 < x < a^b.$	$0 < x \le a^b.$

$0 < a < 1$

$\log_a x < b$	$\log_a x \le b$
$\log_a x < \log_a a^b$	$\log_a x \le \log_a a^b$
$\begin{cases} x > 0, \\ x > a^b; \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0, \\ x \ge a^b; \end{cases}$
$x > a^b.$	$x \ge a^b.$

1) Простейшие логарифмические неравенства

Пример №1

$$\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>0$$

Решение:

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1;$ $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ $\left(0<\frac{1}{3}<1\right)$ убывает на всей области определения и $\log_{\frac{1}{3}}1=0,$ то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}5x-1>0,\\ 5x-1<1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x>0{,}2\ ,\\ x<0{,}4;\end{cases} \qquad 0{,}2<x<0{,}4.$$

Ответ: $(0{,}2;\ 0{,}4)$

1) Простейшие логарифмические неравенства

Пример №2

$$\log_{0,5}(4x-3) > \log_{0,5}(x+3)$$

Решение:

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1;$ $y = \log_{0,5} t\ (0 < 0,5 < 1)$ убывает

на всей области определения, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4x-3 < x+3, \\ 4x-3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > 0,75; \end{cases} \quad 0,75 < x < 2.$$

Ответ: $(0,75;\ 2)$

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Пример №1

$$\log_5(3x-1)+\log_{\frac{1}{5}}(1+x^2)\ge 0$$

Решение:

$$\log_5(3x-1)+\log_{\frac{1}{5}}(1+x^2)\ge 0,$$

$$\log_5(3x-1)-\log_5(1+x^2)\ge 0,$$

$$\log_5(3x-1)\ge \log_5(1+x^2).$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\ne 1$ и $y=\log_5 t\,(5>1)$ возрастает на всей области определения, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-1\ge 1+x^2, \\ 1+x^2>0; \end{cases}$$

т.к. $1+x^2>0,$ при $x\in R,$ то система равносильна неравенству

$$3x-1\ge 1+x^2. \qquad x^2-3x+2\le 0,$$

$$1\le x\le 2.$$

Ответ: $[1;\ 2]$

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Пример №2

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x \le 6$$

Решение:

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x \le 6,$$

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x \le 6,$$

$$2\log_3 x \le 6,$$

$$\log_3 x \le 3.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \ne 1;$ $y = \log_3 t \, (3 > 1)$ возрастает на всей области определения и $3 = \log_3 27,$ то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \le 27; \end{cases} \qquad 0 < x \le 27.$$

Ответ: $(0;27]$

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Решение:

Пример №3

$$\log_{0,5}(x-0,5)+\log_{0,5}(x-1)\geq 1$$

$\log_{0,5}(x-0,5)+\log_{0,5}(x-1)\geq 1.$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1;$

$y=\log_{0,5}t \ (0<0,5<1)$ убывает на всей области определения и $\log_{0,5}0,5=1,$

то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x-0,5>0, \\ x-1>0, \\ \log_{0,5}(x-0,5)+\log_{0,5}(x-1)\geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0,5, \\ x>1, \\ \log_{0,5}(x-0,5)(x-1)\geq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ (x-0,5)(x-1)\leq 0,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1, \\ x^2-1,5x\leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ 0\leq x\leq 1,5; \end{cases} \quad 1<x\leq 1,5.$$

Ответ: $(1;1,5]$

2) Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим логарифмическим неравенствам

Пример №4

$1-\log_5(x-3)\le\log_5(x+1)$

Решение:

$1-\log_5(x-3)\le\log_5(x+1)$.

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\ne 1;\quad y=\log_5 t\ \ (5>1)$

возрастает на всей области определения и $1=\log_5 5$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}x-3>0,\\x+1>0,\\1-\log_5(x-3)\le\log_5(x+1);\end{cases}\quad \begin{cases}x>3,\\x>-1,\\\log_5(x+1)+\log_5(x-3)\ge 1;\end{cases}\quad \begin{cases}x>3,\\\log_5(x+1)(x-3)\ge 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>3,\\(x+1)(x-3)\ge 5;\end{cases}\quad \begin{cases}x>3,\\x^2-2x-8\ge 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>3,\\\left[\begin{array}{l}x\le -2,\\x\ge 4;\end{array}\right.\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3,\\x\le -2,\end{cases}\\\begin{cases}x>3,\\x\ge 4;\end{cases}\end{array}\right.\quad x\ge 4.$$

Ответ: $[4;\infty)$

3) Логарифмические неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени

Решение:

Пример №1

$$2\log^2_{\frac{1}{2}} x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 2 > 0$$

$2\log^2_{\frac{1}{2}} x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 2 > 0.$

Пусть $\log_{\frac{1}{2}} x = t,$ тогда $2t^2 - 5t + 2 > 0,$ $\left[\begin{array}{l} t < 0{,}5, \\ t > 2. \end{array}\right.$

Вернёмся к переменной x. Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1,$ то

$$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_{0,5} x < 0{,}5, \\ \log_{0,5} x > 2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} -\log_2 x < 0{,}5, \\ -\log_2 x > 2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x > -0{,}5, \\ \log_2 x < -2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$y = \log_2 r \ (2 > 1)$ возрастает на всей области определения, то

$$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x < \frac{1}{4}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x < \frac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{4}, \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$

3) Логарифмические неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени

Пример №2

$$\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x) < -4\log_3 x + 4$$

Решение:

$\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x) < -4\log_3 x + 4.$ Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1,$ то для нахождения области допустимых значений переменной x составим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} > 0, \\ 3x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad x > 0.$$

В найденной области допустимых значений переменной **x** преобразуем неравенство.

$$(\log_3 3 - \log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) < 4(1 - \log_3 x),$$

$$(1 - \log_3 x)(1 + \log_3 x) - 4(1 - \log_3 x) < 0,$$

$$(1 - \log_3 x)(\log_3 x - 3) < 0,$$

$$(\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) > 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x < 1, \\ \log_3 x > 3; \end{array}\right. \quad y = \log_3 t\ (3 > 1)$$

возрастает на всей области определения и $1 = \log_3 3,$ а также $3 = \log_3 27.$

$$\left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 27. \end{array}\right.$$

С учётом области допустимых значений переменной **x** получим:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 27; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x > 27; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x < 3, \\ x > 27. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;3) \cup (27;\infty)$

4) Логарифмические неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Пример №1

$$\frac{2}{\lg x+\lg 0{,}1}-\frac{1}{\lg x}>0$$

Решение:

Пусть $\lg x = t$ и $\lg 0{,}1 = -1$, тогда

$$\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t}>0,$$

$$\frac{t+1}{t(t-1)}>0,$$

$$\left[\begin{array}{l} -1<t<0, \\ t>1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной **x**

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} -1<\lg x<0, \\ \lg x>1; \end{array}\right. \end{cases}$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \lg 0{,}1<\lg x<\lg 1, \\ \lg x>\lg 10; \end{array}\right. \end{cases}$$

$y=\lg r \ (10>1)$

возрастает на всей области определения

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} 0{,}1<x<1, \\ x>10; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ 0{,}1<x<1, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ x>10; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0{,}1<x<1, \\ x>10. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)\cup(10;\infty)$

4) Логарифмические неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Пример №2

$$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_x 3 - \frac{5}{2}$$

Решение:

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1,$ то $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

В найденной области допустимых значений переменной **x** преобразуем данное неравенство к виду:

$$-\log_3 x < \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2}.$$

Пусть $\log_3 x = t.$ Тогда $-t < \frac{1}{t} - \frac{5}{2},$

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0, \quad \frac{(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{t} > 0, \quad \left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной **x**.

$$\begin{cases} x > 0, \ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \frac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$y = \log_3 r \ (3 > 1)$ возрастает на всей области определения и

$$\frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3}, \quad 2 = \log_3 9$$

$$\begin{cases} x > 0, \ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(1;\sqrt{3}\right) \cup (9;\infty)$

5) Логарифмические неравенства с переменной в основании и под знаком логарифма

Решение:

Пример №1

$$\log_{1-3x} 3 < 0$$

$$\log_{1-3x} 3 < 0.$$

Т.к. $\log_{1-3x} 3 < 0$ и $3 > 1$, то

$$0 < 1 - 3x < 1,$$

$$-1 < -3x < 0,$$

$$0 < x < \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

5) Логарифмические неравенства с переменной в основании и под знаком логарифма

Решение:

Пример №2

$\log_x(2x+5) > 1$

$\log_x(2x+5) > 1,$

$\log_x(2x+5) > \log_x x.$

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \neq 1,$ то

$$\begin{cases} 2x+5>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ 2x+5<x, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ 2x+5>x; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2{,}5\ , \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ x<-5, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ x>-5; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2{,}5, \\ x>1; \end{cases} \quad x>1.$$

Ответ: $(1;\infty)$

5) Логарифмические неравенства с переменной в основании и под знаком логарифма

Пример №3

$$\log_x(2x+3) \le 2$$

Решение:

$$\log_x(2x+3) \le 2,$$

$$\log_x(2x+3) \le \log_x x^2.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0, a \ne 1,$ то

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ 2x+3 \ge x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ 2x+3 \le x^2; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ x^2-2x-3 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ x^2-2x-3 \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1, \\ -1 \le x \le 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x>1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 3; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ x \ge 3; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1) \cup [3;\infty)$

Логарифмические неравенства
их типы и методы решения