Производная

Содержание:

Приращение функции.

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

конспект

Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение, при Δx, стремящемся к нулю.

Конец.

Понятие о производной.

$(x^2)' = \Delta y / \Delta x = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 / \Delta x = x^2_0 + 2x\,\Delta x +$

$+ \Delta x^2 - x_0^2 / \Delta x = 2x_0\,\Delta x + \Delta x^2 / \Delta x = 2x_0 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\Delta x} \rightarrow 2x_0$

Назад

Определение производной.

$f'(x_0)=\lim /\Delta x \to 0$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)/\Delta x$

f (x)-дифференцируема

$c'=0$; $x'=1$; $(c\ x)'=c\ (x)'= c$

Далее.

Правило вычисления производных.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$(u / v)' = u'v - uv' / v^2$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Вперед.

Производная сложной функции.

$h(x) = g(f(x))$

$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Далее.

Производные тригонометрических функций.

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x$

$h(x) = g(f(x))$

$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Далее.

Дифференцирование.

Функцию, имеющую производную в точке x_o называют дифференцируемой в этой точке. Пусть D_1-множество точек, в которых функция f дифференцируема.Сопоставляя каждому x € D_1число $f\,'$ (x), получим новую функцию с областью определения D_1.Эта функция называется производной функции

y = f (x).Мы получаем формулы $(x^3)=3x^2$

$(x^2)=2x$,$(kx+b)'=k$.В формуле k=0, b=C

где C произвольная постоянная получаем

что $C'=0$,производная постоянная равна нулю.

Приращение функции.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 значениями этой функции в различных

Точках x лежащих в окрестности x_0,удобно выражать разность $f(x)-f(x_0)$

Через разность $x-x_0$,пользуясь понятиями «приращение аргумента»и

«приращение функции».

$\Delta x = x-x_0 \rightarrow x = x_0+\Delta x$.

Вследствие этого функции f изменится на

Величину $f(x)- f(x_0)= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Приращение функции.

Эта разность называется приращением
Функции f в точке x_0 соответствующим
приращению Δx, и обозначается Δf ,
Т.е.по определению $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,
откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f \ .$$

Обратите внимание :при фиксированном x_0
Приращение Δf есть функция от Δx.
Δf называют также приращением зависимой
Переменной и обозначают через Δy для функции
У= $f(x)$.

ДАЛЬШЕ

Производная сложной функции

Если функция f имеет производную в точке x_0,а функция g имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$,то сложная

функция $h(x)=g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0,причем

$h'(x_0)=g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Далее.

Приращение функции.

Пример 1.Найдем приращения Δx и Δf в точке x_0 ,если $f(x)= X^2$,А) $X_0=2$ и: $X=1,9$;

$\Delta x = x-x_0=1,9-2= - 0,1$;

$\Delta f =f(1,9)-f(2)=1,9^2-2^2= - 0,39$

НАЗАД

Производная сложной функции.

Пример 1.Найдем производную функции

$h(x)=(2x+3)^{100}$

Функцию h можно представить в виде сложной функции

$h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=y^{100}$, $y=f(x)=2x+3$.

Так как $f'(x)=2$ и $g'(y)=100y^{99}$, имеем

$h'(x)=2\cdot 100y^{99}=200(2x+3)^{99}$

Назад.

Правила вычисления производных.

Правило 1.Если функции U и v дифференцируемое в точке x_0 ,то их сумма дифференцируема в этой точке и производная суммы равна сумме производных.

$$(U + v)' = U' + v' .$$

Правило 2.Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0,то их произведение дифференцируемо в этой точке $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.

Правило 3.Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функции v не равна нулю в этой точке то

Частное u/ v также дифференцируемо в x_0 и

$$(u/v)' = (u'\,v - u\,v')/v^2.$$

Далее.

Правила вычисления производных.

Пример 1. Найдем производные функций:

А) $f(x)=x^2-1/x$

$(1/x)' = -x'/x^2 = -1/x^2$, поэтому $(x^2-1/x)' =$

$=(x^2)'-(1/x)'=2x-(-1/x^2)=2x+1/x^2$

Кон
ец.

Производные тригонометрических функций.

Формула производной синуса. Докажем, что функция синуса имеет производную в любой точке и $(\sin x)' = \cos x$.

Применяя формулу

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos \alpha\ \beta/2 \cdot \sin \alpha+\beta/2$,

Находим

$\Delta \sin x / \Delta x = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 / \Delta x =$

$= 2\cos(x_0+\Delta x/2)\sin \Delta x/2 / \Delta x =$

$= \sin\Delta x/2 / \Delta x/2 \cos(x_0+\Delta x/2)$.

Дале
е.

Производные тригонометрических функций.

Для вывода формулы достаточно показать ,что

а) $\sin\Delta x/2/\Delta x/2 \rightarrow 1$при $\Delta x \rightarrow 0$;

б) $\cos(x_0+\Delta x/2) \rightarrow \cos x_0$ при $\Delta x \rightarrow 0$

Опираясь на эти утверждения, можно получить формулу. Действительно, при $\Delta x \rightarrow 0$

$(x_0+\Delta x/2)\ \Delta\,\Delta \sin x/\Delta x=\sin\Delta x/2/\Delta x/2\Delta \cdot \cos \rightarrow$

$\rightarrow 1 \cdot \cos x_0=\cos x_0$.

Конец.

Формула приближенного вычисления.

$\text{У}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$\text{У} \approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x$

Производная в физике и технике.

Vср $(\Delta t)=\Delta x/\Delta t \to v(t_0)$

$\Delta x/\Delta t \to x'(t_0)$

$V(t)=x'(t)$

$a=v'(t)$

Метод интервалов.

1f <=>$\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$

f (x) $\to$(a) при x $\to$a

f '=> f

2 f и f $\neq$ 0 => ($\pm$cons)

Метод интервалов.

У$=k\,x + b \quad A(x_0;f(x_0))$

У$=f\,'(x) \bullet x + b$

$f(x_0)23=f'(x_0) \bullet x_0 + b$

$b= f(x_0)-f'(x_0) \bullet x_0$

У$=f\,'(x_0)\,x + f(x_0)-f'(x_0) \bullet x_0$

У$=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$

Касательная к графику функции.

$k=f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$

$f'(x_1)>0$; $f'(x_2)=0$; $f'(x_3)<0$

$f'(x_1)=1$; $f'(x_2)=0$; $f'(x_3)=-1$

Касательная к графику функции.

f (c)= f (b) – f (a) / b - a