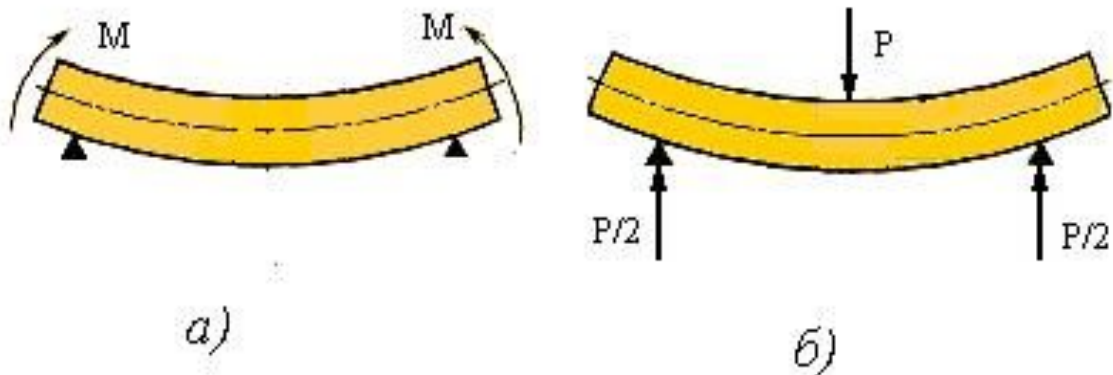




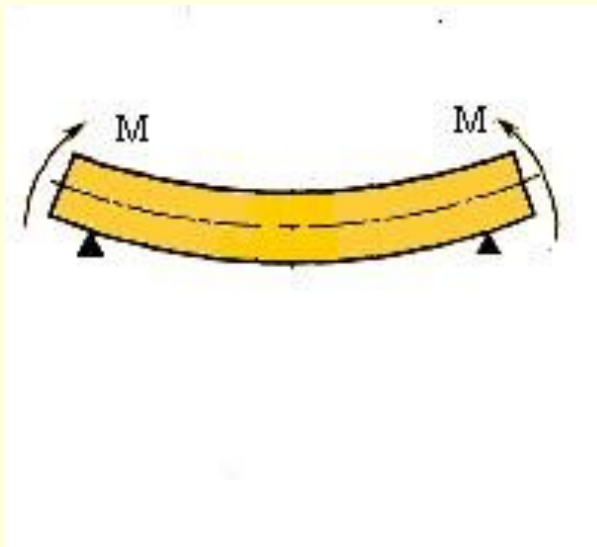
Изгиб

- Изгиб - воздействие нагрузки, перпендикулярной к продольной оси, или внешних пар, действующих в плоскости, проходящей через продольную ось
- Стержни, работающие в основном на изгиб, принято называть балками.



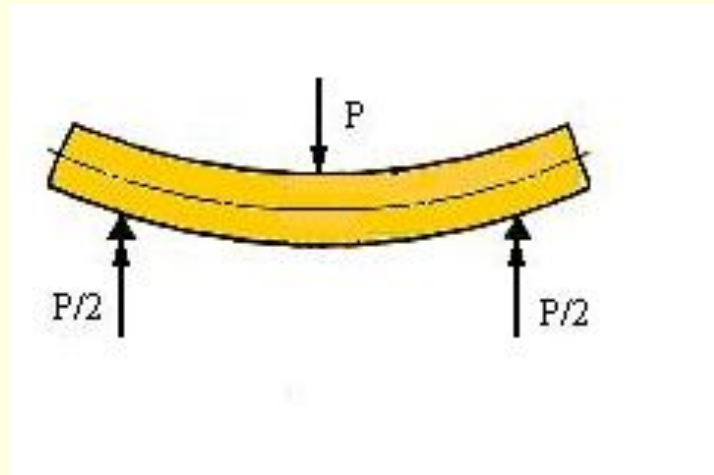
Чистый изгиб

- Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, изгиб называют *чистым*. При этом в сечении отсутствуют поперечные силы.

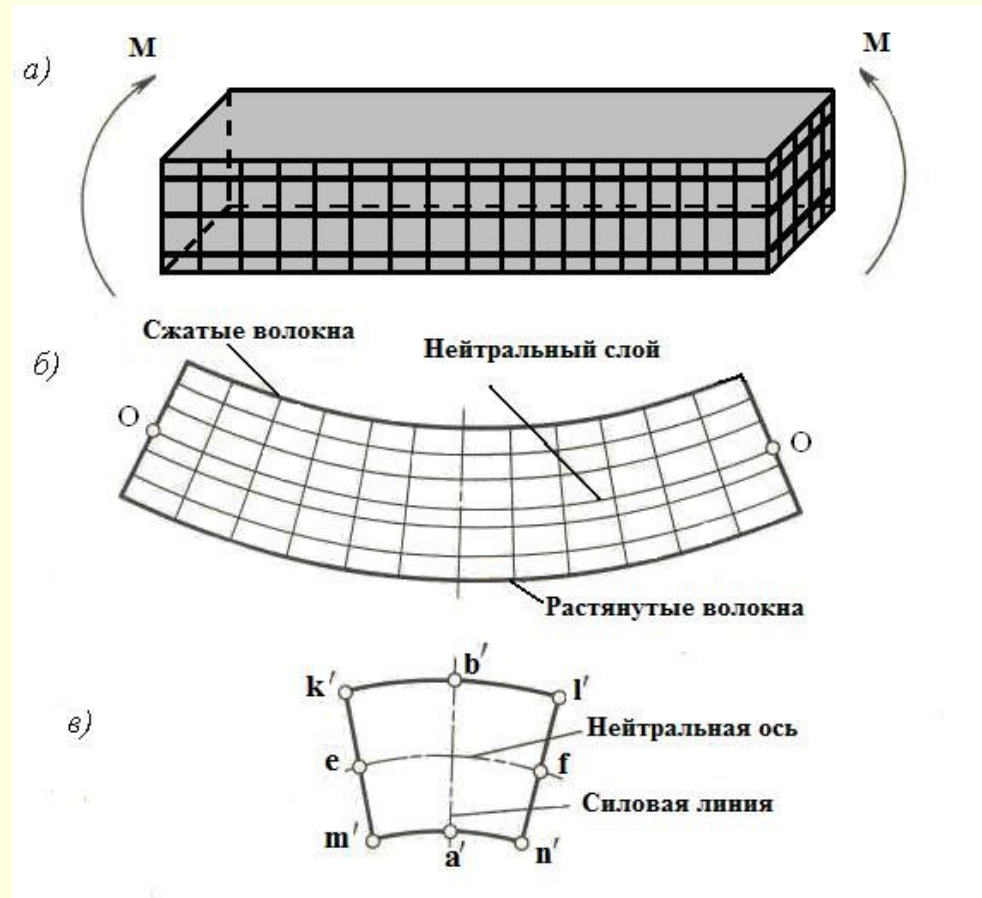


Поперечный изгиб

- При наличии в поперечном сечении наряду с моментом поперечных сил изгиб называют **поперечным**.

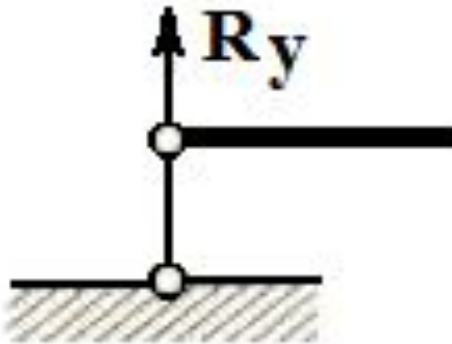


- Деформацию изгиба легко проследить на модели, представляющей собой прямолинейный призматический брус, длина которого значительно превышает его поперечные размеры. На боковые грани бруса нанесены равноотстоящие горизонтальные и вертикальные линии. В плоскости симметрии $aebf$ к концам бруса приложены два равных противоположно направленных момента, под действием которых брус изгибается.



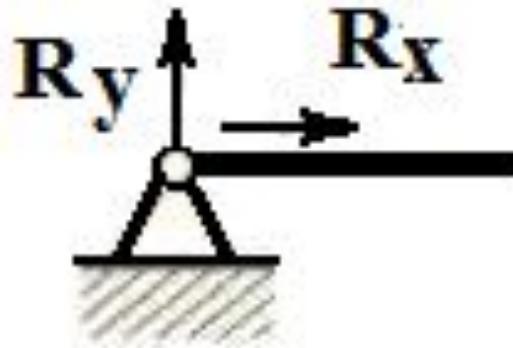
Конструкции опор

- **Шарнирно-подвижная опора** – опора, которая допускает поворот сечения балки над опорой и поступательное перемещение вдоль опорной поверхности.



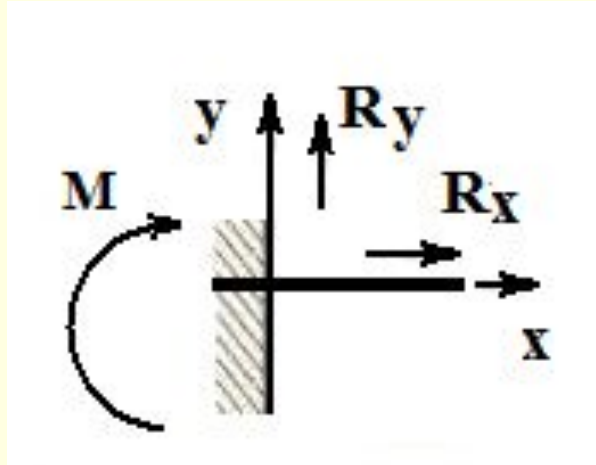
Конструкции опор

- **Шарнирно-неподвижная опора** – опора, допускающая только угловое смещение (поворот вокруг собственной оси) и не воспринимающая моментной нагрузки.



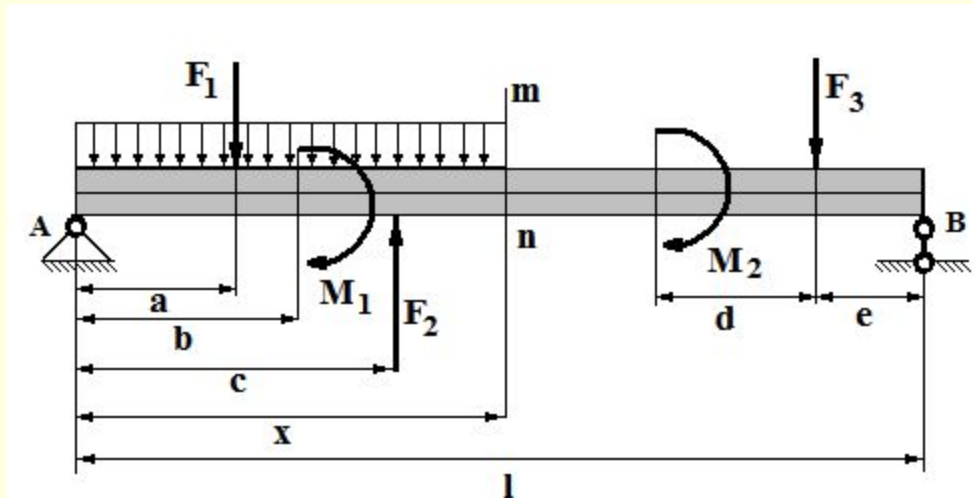
Конструкции опор

- **Жесткая заделка** (защемление) – опора, исключая осевые и угловые смещения балки и воспринимающая осевые силы и моментную нагрузку. Балку, защемленную одним концом и не имеющую других опор, называют **консольной балкой** (консолью).



Определение реакций опор

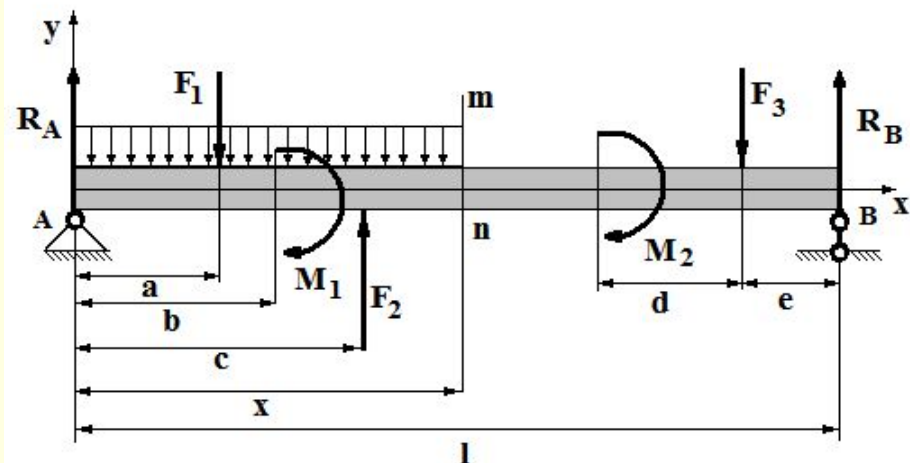
- Пусть на балку, лежащую на опорах A и B действуют вертикальные сосредоточенные силы F_1 , F_2 , F_3 , распределенная нагрузка q , и моменты M_1 , M_2 .



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad , \quad R_A - F_1 + F_2 - F_3 + R_B - q \cdot x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \quad q \cdot x \cdot x / 2 + F_1 \cdot a + M_1 - F_2 \cdot c + M_2 + F_3 \cdot (l - e) - R_B \cdot l = 0;$$

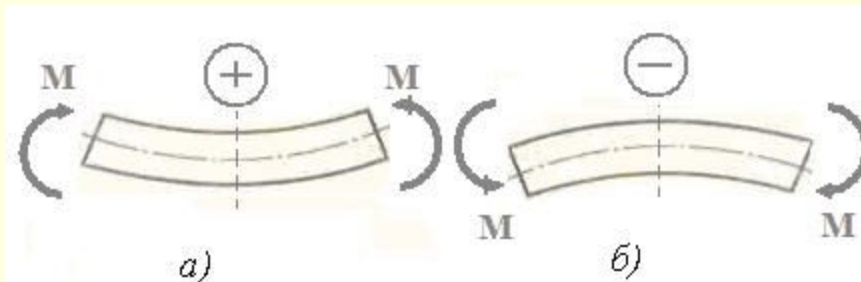
$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad -F_3 \cdot e + M_2 + F_2 \cdot (l - c) + M_1 - F_1 \cdot (c - a) - q \cdot x \cdot (l - x / 2) + R_A \cdot l = 0;$$



- Главный вектор и главный момент сил, действующих слева от сечения, соответственно равны по модулю и противоположны по направлению главному вектору и главному моменту сил, действующих справа от сечения.
- Главный вектор Q и главный момент M являются статическими эквивалентами внутренних сил, возникающих при изгибе в поперечном сечении. Главный вектор внешних сил, действующих на балку по одну сторону от данного сечения, называется поперечной силой в данном сечении.

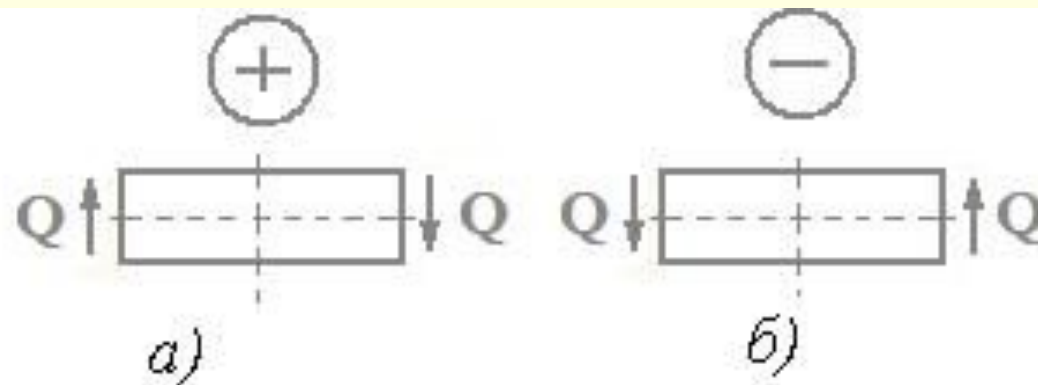
Правило знаков изгибающие моменты

Изгибающий момент считается положительным, если он изгибает горизонтально расположенный стержень (балку) выпуклостью вниз (рис. а), и отрицательным, если изгибает балку выпуклостью вверх (рис. б).



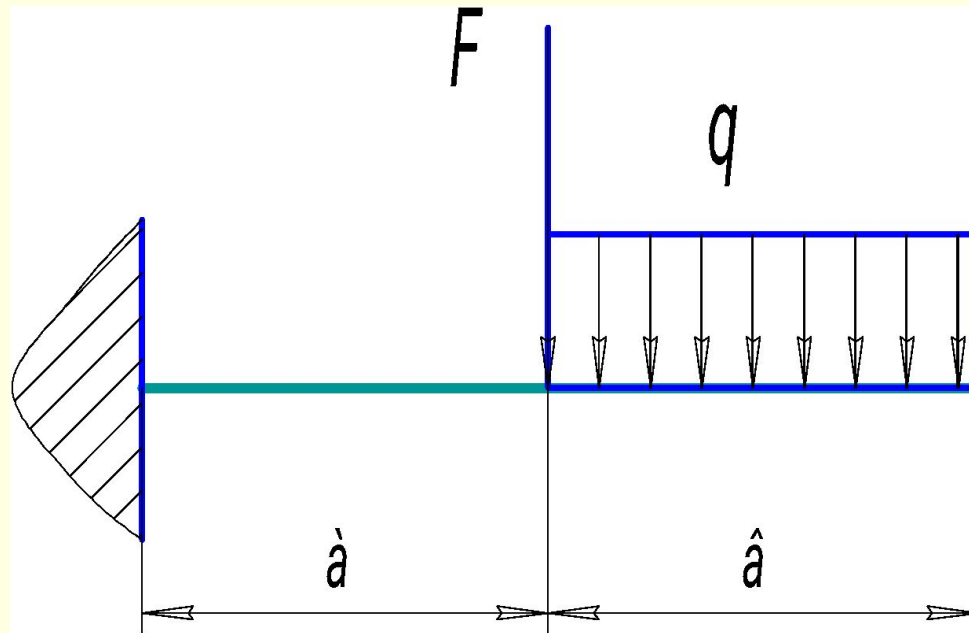
Правило знаков поперечные силы

- Поперечная сила считается положительной, если для левой части балки она направлена вверх, а для правой – вниз, и отрицательной, если для левой части балки она направлена вниз, а для правой – вверх.



Решение задач на тему «Изгиб»

- Для заданной балки – (поперечное сечение – двутавр) построить эпюры M и Q и подобрать сечение $a = 1$ м; $b = 4$ м; $F = 15$ кН; $q = 10$ кН/м, $[\sigma] = 160$ МПа

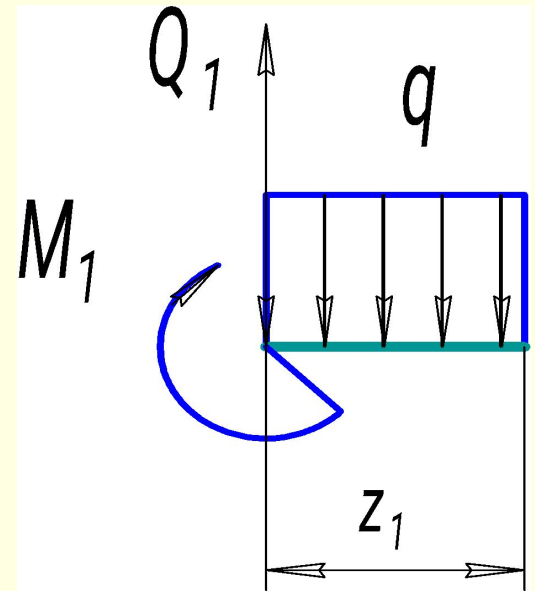


Решение задач на тему «Изгиб»

- Заданная балка имеет два участка нагружения, границы которых совпадают с точками приложения внешних сил.
- Будем считать, что внешняя сила, стремящаяся повернуть оставшуюся часть балки по ходу часовой стрелки, вызывает положительную поперечную силу.
- Ордината положительных поперечных сил откладывается вверх от оси балки.
- Изгибающий момент считается положительным, если балка изгибается выпуклостью вниз.

Решение задач на тему «Изгиб»

- Участок 1; $0 \leq z_1 \leq 4$ м
- $Q_1 = q \cdot z_1$;
- $z_1 = 0$; $Q_1 = 0$ кН;
- $z_1 = b = 4$ м; $Q_1 = 10 \cdot 4 = 40$ кН;



- $z_1 = 0$;

$$M_1 = -\frac{q \cdot z_1^2}{2} = -\frac{10 \cdot 0^2}{2} = -0 \text{ кН}$$

- $z_1 = b = 4$ м;

$$M_1 = -\frac{q \cdot z_1^2}{2} = -\frac{10 \cdot 4^2}{2} = -80 \text{ кН}$$

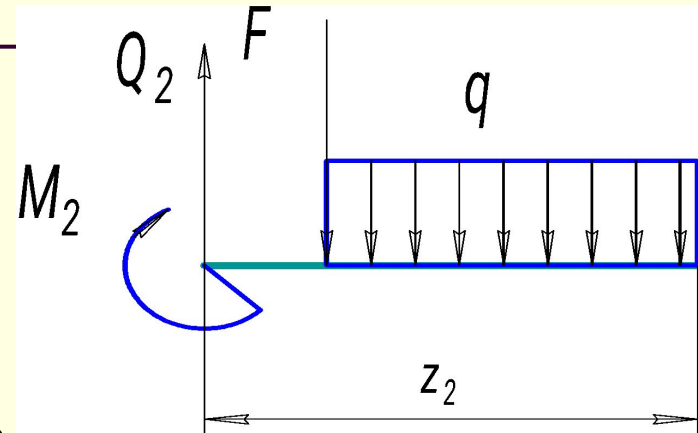
Решение задач на тему «Изгиб»

- Участок 2; $4 \leq z_1 \leq 5$ м
- $Q_2 = q \cdot b + F_1 = 10 \cdot 4 + 15 = 55$ кН

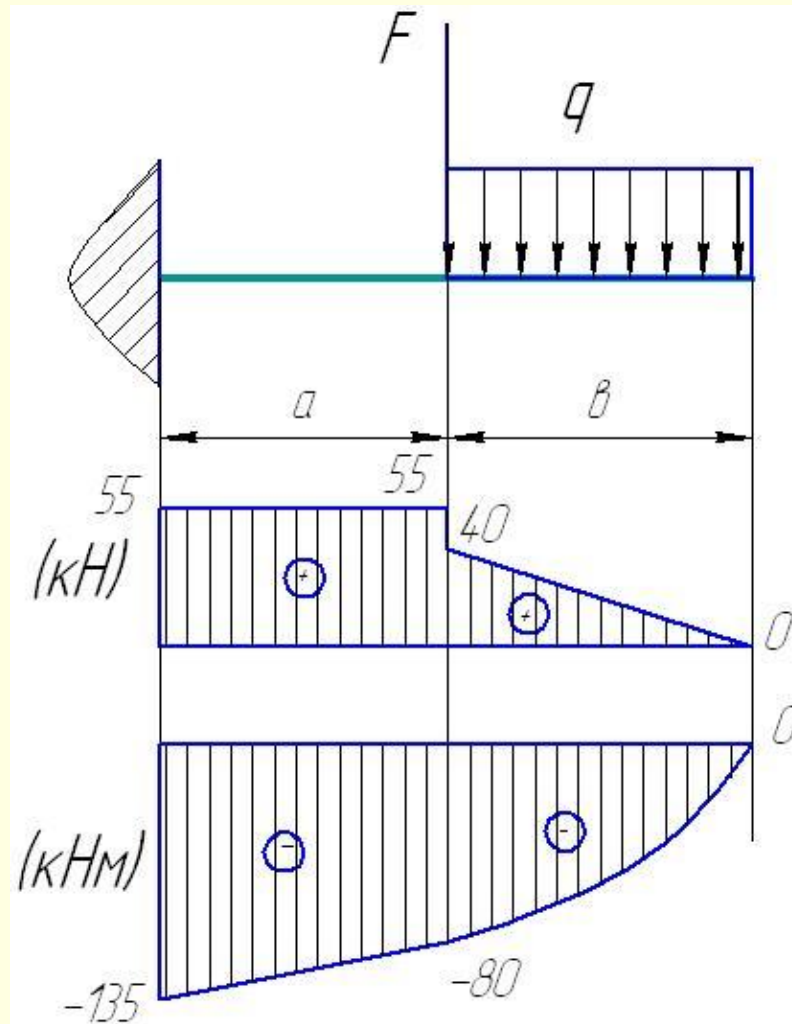
$$M_2 = -\frac{q \cdot b \cdot (z_2 - b/2)}{2} - F \cdot (z_2 - b)$$

- $z_2 = b = 4$ м; $M_2 = -10 \cdot 4 \cdot \left(4 - \frac{4}{2}\right) - 15 \cdot (4 - 4) = -80$ кНм

- $z_2 = a + b = 5$ м; $M_2 = -10 \cdot 4 \cdot \left(5 - \frac{4}{2}\right) - 15 \cdot (5 - 4) = -135$ кНм



Решение задач на тему «Изгиб»

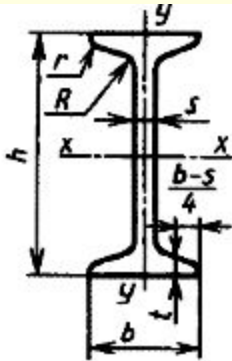


Решение задач на тему «Изгиб»

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{120 * 10^3}{160 * 10^6} = 7.5 * 10^{-4} \text{ м}^3$$

- Принимаем двутавр № 36, $W_x = 745 \text{ см}^3$,

Решение задач на тему «Изгиб»



Обозначения:

- h - высота балки;
- b - ширина полки;
- s - толщина стенки;
- t - средняя толщина полки;
- R - радиус внутреннего закругления;
- r - радиус закругления полки;
- J - момент инерции;
- W - момент сопротивления;
- S - статический момент полусечения;
- i - радиус инерции

ГОСТ предусматривает также номера балок 45 - 60. Размеры двутавров 18а, 20а, 22а, 24а, 30а не стандартизованы. Двутавры от № 24 до № 60 не рекомендуются применять в новых разработках.

Номер двутавра	Масса 1 м. кг	h	b	s	t	R	r	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей						
									x - x				y - y		
									J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63

Решение задач на тему «Изгиб»

- $$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{120 * 10^3}{7,45 * 10^{-4}} = 161 * 10^6 \text{ Па}$$

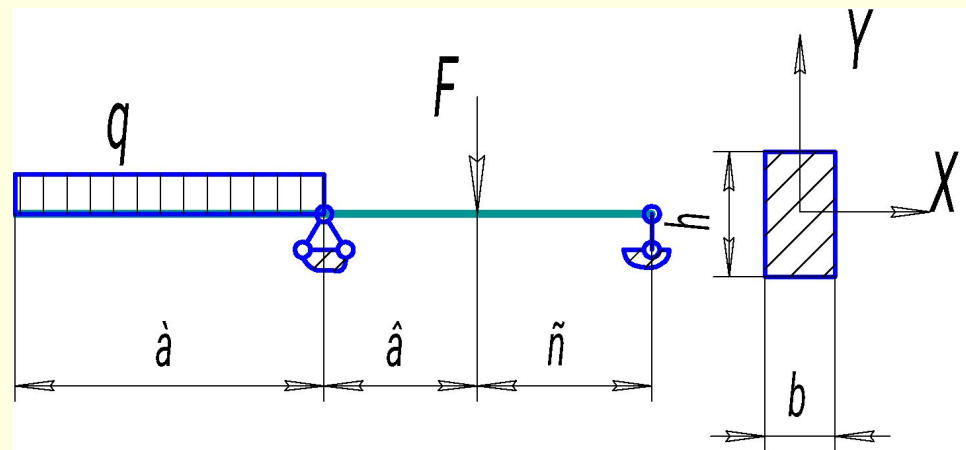
- Перенапряжение составляет

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} * 100\% = \frac{161 - 160}{160} * 100\% = 0,6\% \leq 5\%$$

- Что допустимо.

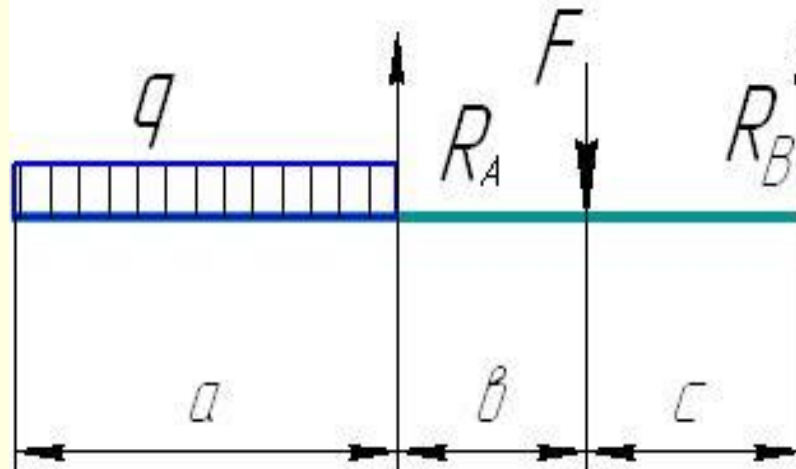
Решение задач на тему «Изгиб»

- Для заданной балки (поперечное сечение – прямоугольник со сторонами $h/b = 2$) построить эпюры M и Q и подобрать сечение $a = 5$ м; $b = 2$ м; $c = 3$ м;
- $F = 25$ кН; $q = 15$ кН/м, $[\sigma] = 160$ МПа



Решение задач на тему «Изгиб»

- Определяем опорные реакции, приравнивая к нулю моменты всех внешних сил, относительно точек A и B , которыми обозначены опоры. Действие опор на балку заменяем реакциями опор R_A и R_B .



Решение задач на тему «Изгиб»

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \quad -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot b - R_B (b + c) = 0$$

$$R_B = \frac{F \cdot b - q \cdot a \cdot a/2}{(b + c)} = \frac{25 \cdot 2 - 15 \cdot 5 \cdot 2.5}{5} = -27.5 \text{ кН}$$

- знак минус говорит о том, что первоначальное направление реакции R_B выбрано неверно.

Решение задач на тему «Изгиб»

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad -q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c\right) - F \cdot c + R_A(b + c) = 0$$

$$R_A - \frac{F \cdot c + q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + b + c\right)}{(b + c)} = \frac{25 \cdot 3 - 15 \cdot 5 \cdot (2.5 + 2 + 3)}{5} = 127.5 \text{ кН}$$

■ Проверка $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$

$$-q \cdot a + R_B + R_A - F = 15 \cdot 5 + 127,5 - 27,5 - 25 = 0$$

- Реакции определены верно.

Решение задач на тему «Изгиб»

- Заданная балка имеет три участка нагружения, границы которых совпадают с точками приложения внешних сил

- Участок 1 $0 \leq z_1 \leq 5$ м

$$Q_1 = q \cdot z_1$$

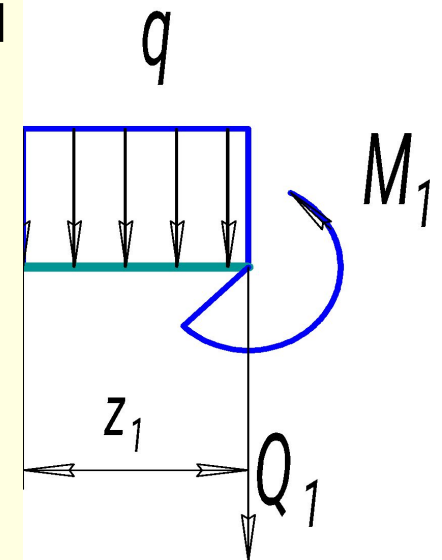
- $z_1 = 0$; $Q_1 = 0$ кН;

- $z_1 = a = 5$ м; $Q_1 = -15 \cdot 5 = -75$ кН

- $z_1 = 0$; $M_1 = 0$ кНм;

- $z_1 = b = 5$ м;

$$M_1 = -\frac{15 \cdot 5^2}{2} = 187.5 \text{ кНм}$$

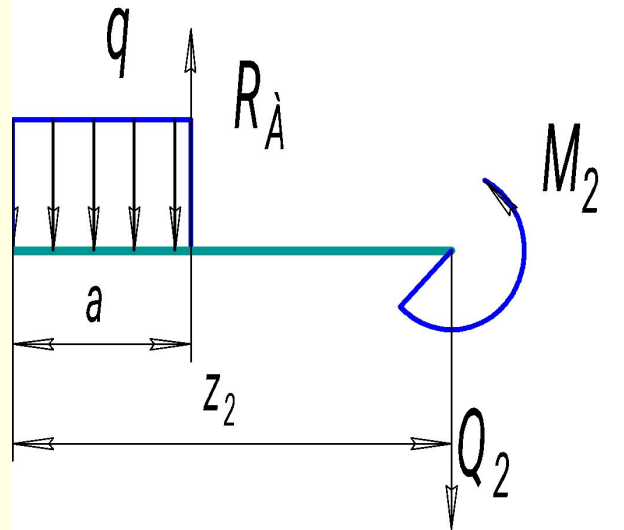


Решение задач на тему «Изгиб»

- Участок 2 $5 \leq z_1 \leq 7$ м

$$Q_2 = -q \cdot a + R_A = -15 \cdot 5 + 127,5 = 52,5 \text{ кН}$$

$$M_2 = -q \cdot a \cdot (z_2 - a/2) + R_A \cdot (z_2 - a)$$



Решение задач на тему «Изгиб»

$$M_2 = -q * a(z_2 - a/2) + R_A * (z_2 - a)$$

- $z_2 = a = 5\text{м}; M_2 = -15 \cdot 5 \cdot (5 - \frac{5}{2}) + 127,5 \cdot 0 = -187,5 \text{ кНм}$
- $z_2 = a + b = 7\text{м};$
- $M_2 = -15 \cdot 5 \cdot (7 - \frac{5}{2}) + 127,5 \cdot 2 = -82,5 \text{ кНм}$
-
-

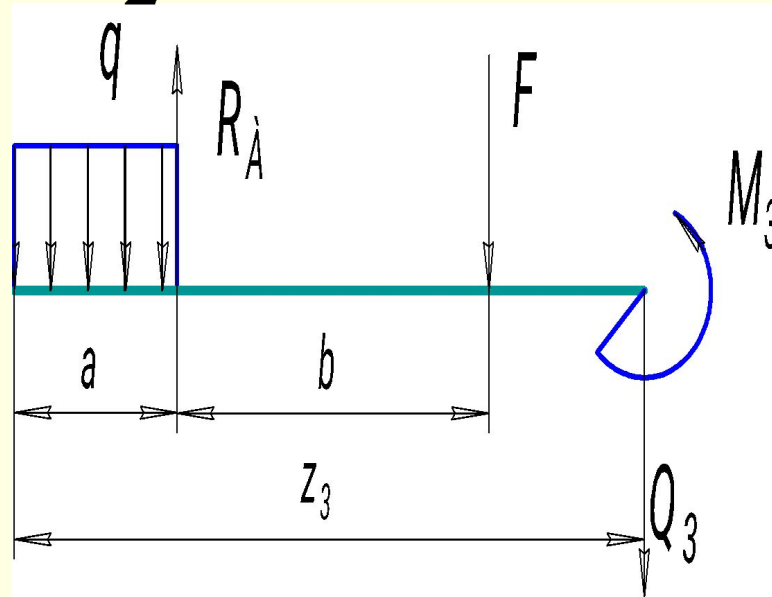
Решение задач на тему «Изгиб»

■ Участок 3

$$7 \leq z_1 \leq 10 \text{ м}$$

$$Q_3 = -q \cdot a + R_A - F = -15 \cdot 5 + 127,5 - 25 = 27,5 \text{ кН}$$

$$M_3 = -q \cdot a \cdot \left(z_3 - \frac{a}{2}\right) + R_A \cdot (z_3 - a) - F \cdot (z_3 - (a + b))$$



Решение задач на тему «Изгиб»

$$M_3 = -q \cdot a(z_2 - a/2) + R_A \cdot (z_2 - a) - F(z_3 - (a + b))$$

$$z_3 = a + b = 7 \text{ м};$$

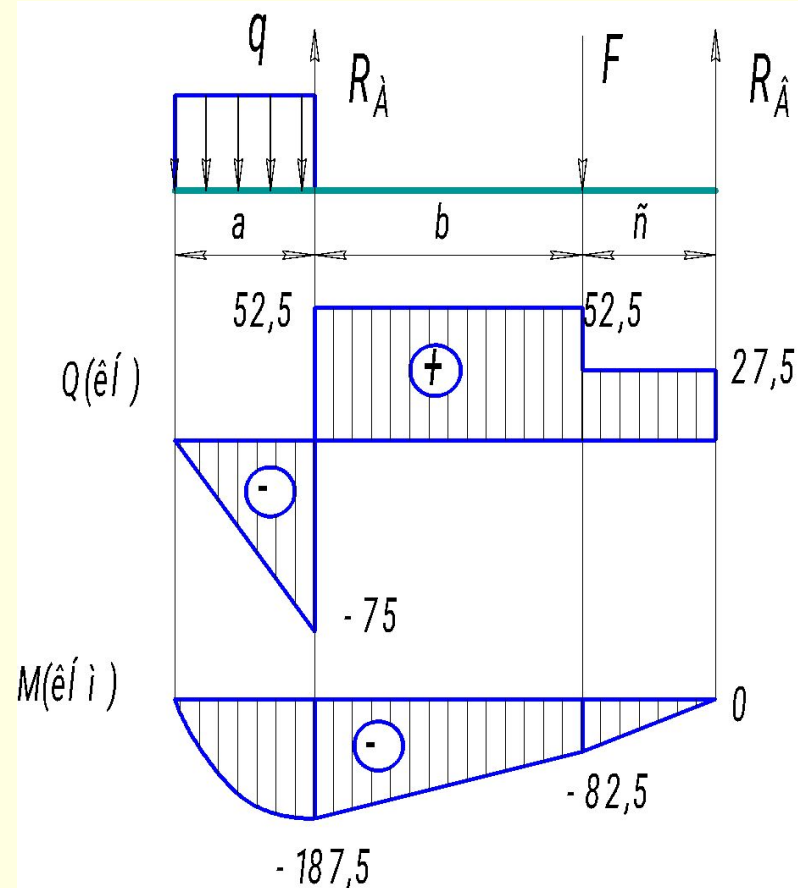
$$M_3 = -15 \cdot 5 \cdot \left(7 - \frac{5}{2}\right) + 127,5 \cdot 2 - 25 \cdot 0 = -82,5 \quad \text{кНм}$$

$$z_3 = a + b + c = 10 \text{ м};$$

$$M_3 = -15 \cdot 5 \cdot \left(10 - \frac{5}{2}\right) + 127,5 \cdot 5 - 25 \cdot 3 = 0 \quad \text{кНм}$$

Решение задач на тему «Изгиб»

- Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов



Решение задач на тему «Изгиб»

$$W_x = \frac{b * h^2}{6} = \frac{h}{2} * \frac{h^2}{6} = \frac{h^3}{12}$$

- Требуемый момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{187.5 * 10^3}{160 * 10^6} = 1.17 * 10^{-3} \text{ м}^3 = 1170 \text{ см}^3$$

Решение задач на тему «Изгиб»

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{187.5 * 10^3}{160 * 10^6} = 1.17 * 10^{-3} \text{ м}^3 = 1170 \text{ см}^3$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot W_x} = \sqrt[3]{12 \cdot 1170} = 24.124 \text{ см} = 240 \text{ мм}$$

- $b = 240/2 = 120 \text{ мм}$

$$W_x = \frac{h^3}{12} = \frac{240^3}{12} = 1.152 * 10^6 \text{ мм}^3 = 1.152 * 10^{-3} \text{ м}^3$$

Решение задач на тему «Изгиб»

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{187,5 * 10^3}{1,152 * 10^{-3}} = 162,76 * 10^6$$

- Перенапряжение составит:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{162,76 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,72\% \leq 5\%$$

- что допустимо