

Чисельні методи

ЛЕКЦІЯ 2

«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК»

Елементи теорії похибок

Абсолютна та відносна похибки. Значуща цифра, число вірних знаків

Основні джерела похибок:

1. Похибки математичної моделі.

Будь-яка задача є модель якогось явища. Будь-яка модель - це об'єкт більш простий, ніж реальний. Модель - наближений опис реального об'єкта, тобто містить похибки.

2. Похибки вихідних даних.

Дані можуть виявитися неточними.

3. Похибки методу рішення.

Чисельні методи замінюють завдання на близьку. Наприклад, замість інтегрування - підсумовування, замість диференціювання - обчислення звичайно різницевого ставлення і т. д. В результаті замість точного розв'язку вихідної задачі отримуємо наближене рішення отриманої задачі.

4. Похибки округлень при виконанні арифметичних операцій.

В рамках чисельних методів похибки 1 та 2 вважаються непереборні.

Визначення 1. Абсолютна похибка

- Величина $\Delta(X) = |X - X^*| = |\varepsilon_x|$ називається **абсолютною похибкою** представлення числа X за допомогою числа X^* .
 - Максимально можливе значення ΔX , тобто число $\overline{\Delta X}$, яке задовольняє нерівності $\Delta X \leq \overline{\Delta X}$, називається **максимальною, або граничною, абсолютною похибкою**.
-

Визначення 2. Відносна похибка

- Величина, яка дорівнює

$$\delta(X) = \frac{|X - X^*|}{|X^*|} = \frac{\Delta(X)}{|X^*|}$$

називається **відносною похибкою** представлення числа X числом X^*

- Якщо $\delta(X) \leq \overline{\delta(X)}$, то число $\overline{\delta(X)}$ називається **максимальною граничною відносною похибкою**.
-

Похибки округлення при арифметичних операціях

- Приклад 1.
Абсолютна похибка суми

Нехай $X = X^* + \varepsilon_x$ $Y = Y^* + \varepsilon_y$.

Тоді $Z = X + Y = (X^* + Y^*) + (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$,

де $X^* + Y^* = Z^*$

Оскільки $\Delta(Z^*) = |\varepsilon_x + \varepsilon_y| \leq |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|$, то

$$\overline{\Delta(Z^*)} = \overline{\Delta(X^*)} + \overline{\Delta(Y^*)}$$

тобто граничні абсолютні помилки складаються.

Те ж саме для різниці. Граничні максимальні абсолютні похибки аналогічно складаються

Похибки округлення при арифметичних операціях

□ Відносні похибки добутку

де

$$Z = XY = (X^* + \varepsilon_x)(Y^* + \varepsilon_y) = X^*Y^* + X^*\varepsilon_y + Y^*\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y$$

$$Z^* = X^*Y^*$$

$$\frac{|Z - Z^*|}{Z^*} = \frac{|X^*\varepsilon_y + Y^*\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y|}{|X^*Y^*|} = \left| \frac{\varepsilon_y}{Y^*} + \frac{\varepsilon_x}{X^*} + \frac{\varepsilon_x\varepsilon_y}{X^*Y^*} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_y}{Y^*} \right| + \left| \frac{\varepsilon_x}{X^*} \right| + \left| \frac{\varepsilon_x}{X^*} \right| \left| \frac{\varepsilon_y}{Y^*} \right|$$

$$\left| \frac{\varepsilon_x}{X^*} \right| \left| \frac{\varepsilon_y}{Y^*} \right| \approx 0$$

Похибки округлення при арифметичних операціях

Вважаємо, що останнє доданок має другий порядок малості порівняно з першими двома, і їм нехтуємо.

$$|\varepsilon_x| \ll X^* \quad |\varepsilon_y| \ll Y^*$$

тоді отримуємо:

$$\overline{\delta(Z^*)} = \overline{\delta(X^*)} + \overline{\delta(Y^*)}$$

тобто

$$\delta(Z^*) \leq \overline{\delta(X^*)} + \overline{\delta(Y^*)}$$

При множенні відносні максимальні помилки наближення складаються

При поділі відносні максимальні помилки також складаються.