Логические основы построения компьютера

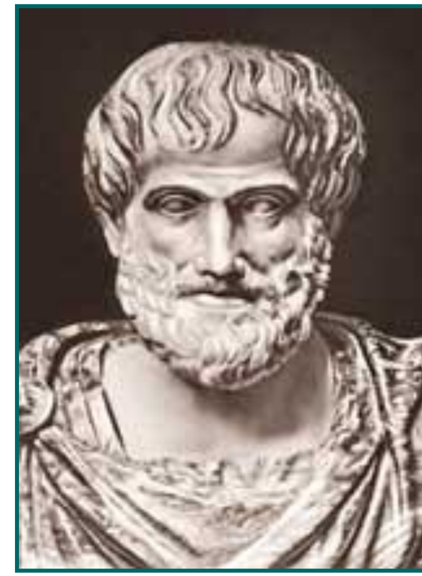
Сумина О. В.
МОУ гимназия №69 г. Липецка

Основные понятия алгебры логики

Процессор выполняет арифметические и **логические** операции над двоичными кодами. Поэтому для получения представления об устройстве компьютера, необходимо познакомиться с основными логическими элементами, лежащими в основе его построения. Для понимания принципа работы таких элементов начнем это знакомство с основных начальных понятий **алгебры логики.**

Логика (др.греч. *λογικος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий. Первые учения о формах и способах мышления возникли в Древнем Китае и Индии. Основоположником формальной логики является **Аристотель** (384-322 гг. до н. э.) – древнегреческий философ, который впервые отделил логические формы мышления от его содержания.



Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

Сейчас идет дождь.	**ДА**
Жирафы летят на север.	**ДА**
У квадрата – 10 сторон и все разные.	**ДА**
Красиво!	**НЕТ**
В городе N живут 2 миллиона человек.	**НЕТ**
Который час?	**НЕТ**
История – интересный предмет.	**НЕТ**

- Солнце есть спутник Земли.
- 2+3>4
- Сегодня отличная погода.
- Санкт-Петербург расположен на Неве.
- Музыка Баха слишком сложна.
- Первая космическая скорость равна 7.8 км/сек.
- Железо — металл.
- Если один угол в треугольнике прямой, то треугольник будет тупоугольным.
- Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то он прямоугольный.

Алгебра логики **– это математический аппарат, который позволяет выполнять действия над высказываниями.**

Алгебру логики называют булевой алгеброй, по имени английского математика Джорджа Буля (1815-1864), разработавшего в XIXв. её основные положения.

Обозначение высказываний

Высказывания обозначают латинскими буквами: A, B, X, Y.

A = Париж – столица Англии.

B = Число 11 является простым.

Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если … то**», «**тогда и только тогда**» и др.

- На улице хорошая погода, и дети пошли гулять.
- Петя расскажет стихотворение, или Серёжа пойдет к доске.

Логические выражения и логические операции

Действия, которые производятся над высказываниями, записываются в виде логических выражений.

Простое логическое выражение состоит из одного высказывания и не содержит логических операций, в противном случае оно является сложным.

Основные логические операции

Название	Обозначение	Математическое обозначение
Логическое умножение, конъюнкция	и	&,•,/\
Логическое сложение, дизъюнкция	или	+,\/
Логическое отрицание, инверсия	не	▯ ,¬
Импликация, следование	если, то	→ , ⇒
Эквивалентность, равносильность	**тогда и только тогда**	≡, ⇔ , ↔ ,~

Таблицы истинности

Все операции алгебры логики определяются **таблицами истинности значений**.

Таблица истинности определяет значение сложного высказывания при всех возможных значениях, входящих в него простых высказываний.

Количество строк в таблице истинности будет зависеть от количества высказываний в логическом выражении (если число высказываний в логическом выражении N, то в таблице будет 2^N строк).

От лат. inversio - переворачиваю

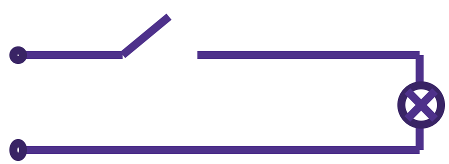
Инверсия - логическое отрицание

Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.

A	не A
0	1
1	0

$\overline{A}$ ¬A

A= Земля вращается вокруг Солнца. (истина)
¬A = Земля не вращается вокруг Солнца. (ложь)



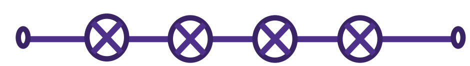
От лат. conjunctio - связываю

Конъюнкция - логическое умножение

Результат логического умножения является истинным тогда и только тогда, когда истинны все входящие в него простые высказывания.

A	B	A и B
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

A·B, A ∧ B



C= A & B
Учитель должен быть умным и справедливым.
A= Учитель должен быть умным.
B= Учитель должен быть справедливым.

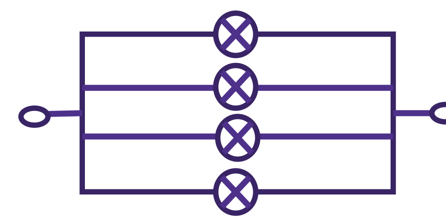
От лат. disjunctio – различаю

Дизъюнкция - логическое сложение

Результат логического сложения является истинным тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

A	B	A или B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

A+B, A V B



C= A + B

В библиотеке можно взять книгу или встретить знакомого.

A= В библиотеке можно взять книгу.

B= В библиотеке можно встретить знакомого.

От лат. implicatio – тесно связывать

Импликация - логическое следование

Результат логического следования является ложным тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

A	B	Если A, то B
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

$A \to B$

Если идёт дождь, то на улице сыро.
A= Идет дождь.
B= На улице сыро.

От лат. aeguivalens – равноценное

Эквивалентность - логическое равенство

Результат логического равенства является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо истинны, либо ложны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

А тогда и только тогда, когда В

День сменяет ночь тогда и только тогда, когда солнце скрывается за горизонтом.

Домашнее задание

Выучить пять таблиц истинности с определениями логических операций.

Составление таблиц истинности по логической формуле

Постройте таблицу истинности для логического выражения

A·¬B

A	**B**	**¬B**	**A·¬B**
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	0

Составление таблиц истинности по логической формуле

Постройте таблицу истинности для логического выражения

(A+¬B)·C

A	B	C	¬B	A+¬B	(A+¬B)·C
0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ПО ТАБЛИЦЕ ИСТИННОСТИ

Условимся называть задачу построения таблицы истинности по формуле сложного высказывания – прямой задачей. Тогда обратная задача – построение логической формулы по таблице истинности. Полученную формулу будем записывать в виде логической функции.

Приведена таблица истинности для аргументов А, В, по которой надо составить логическое выражение F(A,B).

A	**B**	**F(A,B)**
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Алгоритм нахождения искомой формулы:

A	B	F(A,B)	Отмечаем	Записываем
0	0	1	✔	$\neg A \cdot \neg B$
0	1	0		
1	0	1	✔	$A \cdot \neg B$
1	1	0		

1. Выделить в таблице истинности строки, в которых выражение истинно (1);

2. Соединить операцией И (умножение) содержимое столбцов аргумента для выбранных строк. При этом если в таблице «0», пишем входной сигнал с отрицанием, а если в таблице «1», то без отрицания.

3. Соединить операцией ИЛИ (сложение) полученные выражения.

$$F(A,B) = \neg A \cdot \neg B + A \cdot \neg B$$

4. Упростить искомую формулу (по возможности).

Пример 2.

A	B	C	F(A,B,C)	Отмечаем	Записываем
0	0	0	1	✔	**¬A·¬B·¬C**
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	0		
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	0		
1	1	1	1	✔	**A·B·C**

$$F(A, B, C) = \neg A \cdot \neg B \cdot \neg C + A \cdot B \cdot C$$

Пример 3.

A	B	F(A,B,C)	Отмечаем	Записываем
0	0	0		
0	1	1	✔	**$\neg A \cdot B$**
1	0	1	✔	**$A \cdot \neg B$**
1	1	1	✔	**$A \cdot B$**

$$F(A, B) = \neg A \cdot B + A \cdot \neg B + A \cdot B$$

Пример 4.

A	B	C	F(A,B,C)	Отмечаем
0	0	0	1	✔
0	0	1	0	
0	1	0	1	✔
0	1	1	0	
1	0	0	1	✔
1	0	1	0	
1	1	0	1	✔
1	1	1	0	

$F(A, B, C) = \neg C$

Пример 5.

A	B	F(A,B,C)	Отмечаем
0	0	0	
0	1	0	
1	0	1	✔
1	1	1	✔

F(A, B) = A

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ЗАДАНИЯ ИЗ ГИА

Задания из ГИА

1. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X<3)\ \&\ ((X<2)\ V\ (X>2))$?

1) 1 2) 2 3)3 4)4

2. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X<4)\ \&\ (X>2)\ \&\ (X<>2)$?

1) 1 2) 2 3)3 4)4

3. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X>4)\ \&\ (X<7)\ \&\ (X<6)$?

1) 5 2)6 3)3 4)4

4. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X>1)\ \&\ (X>2)\ \&\ (X\neq 3)$?

1) 1 2) 2 3)3 4)4

5. Для какого из указанных значений числа X ложно выражение $(X > 2)$ ИЛИ НЕ $(X > 1)$?

1) 1 2) 2 3)3 4)4

6. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X < 3)\ \&\ \neg(X < 2)$?

1) 1 2) 2 3)3 4)4

7. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $(X > 2)\ \&\ (\ (X < 4) \vee (X > 4))$?

1) 1 2) 2 3)3 4)4

Пример 5.10. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X < 2)$ & $(X < 3)$?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

Пример 5.11. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X > 2) \vee (X > 6)$?

1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

Пример 5.12. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X > 5)$ & $\neg(X < 2)$?

1) 0
2) 1
3) 3
4) 6

Пример 5.13. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg((X - 2 > 6) \vee (X - 4 > 8))$ & $\neg(X \cdot 3 > 25)$?

1) 7
2) 9
3) 11
4) 12

Пример 5.14. Для какого из указанных значений числа X истинно выражение $\neg(X : 2 < 5)$ & $\neg(X + 17 > 30)$ & $(X \cdot 3 < 39)$?

1) 8
2) 9
3) 12
4) 13

Пример 5.5. Таблица истинности логической функции $F = A \,\&\, B \vee \neg A \,\&\, \neg B$ имеет вид

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1)

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3)

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

4)

Пример 5.6. Таблица истинности логической функции $F = \neg A \,\&\, B \,\&\, \neg A \,\&\, \neg B$ имеет вид

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1)

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3)

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4)

Пример 5.7. Таблица истинности логической функции $F = \neg A \,\&\, \neg B \vee A \,\&\, \neg B$ имеет вид

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

1)

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

Пример 5.8. Таблица истинности логической функции $F = \neg A \,\&\, B \vee \neg A \,\&\, \neg B$ имеет вид

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

1)

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

Пример 5.9. Таблица истинности логической функции $F = (A \,\&\, B) \,\&\, \neg A \,\&\, \neg B$ имеет вид

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1)

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

A	*B*	*F*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

3)

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4)

Логические элементы и логические схемы компьютера.

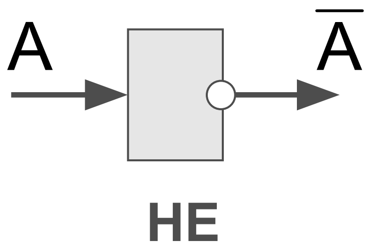
Как при строительстве дома применяют различного рода типовые блоки: кирпичи, рамы, двери и т. п., так и при разработке компьютера используют типовые электронные схемы. Каждая схема состоит из определенного набора типовых электронных элементов.

Электронным элементом называется соединение различных деталей – в первую очередь, диодов и транзисторов, а также резисторов, конденсаторов, - в виде электрической схемы, выполняющей некоторую простейшую функцию.

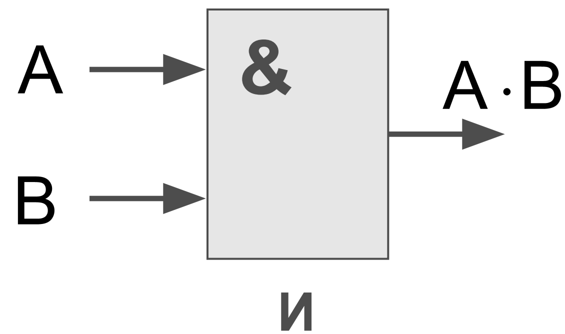
Электронный элемент, реализующий логическую функцию, называется логическим вентилем.

Логические элементы компьютера

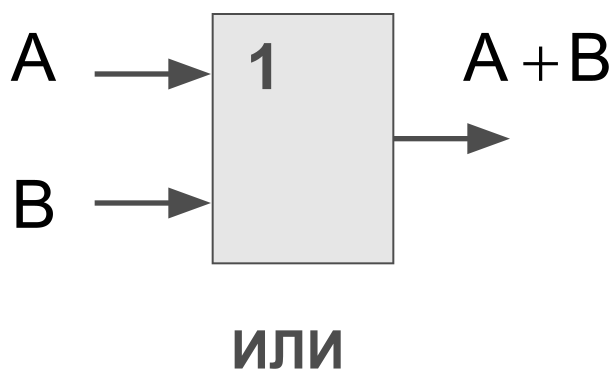
Инвертор



Конъюнктор



Дизъюнктор



Тысячи микроскопических электронных переключателей в кристалле интегральной схемы сгруппированы в системы, выполняющие логические операции, т. е. операции с предсказуемыми результатами и арифметические операции над двоичными числами. Соединенные в различные комбинации, логические вентили дают возможность компьютеру решать задачи, используя язык двоичных кодов.

Электронным элементом называется соединение различных деталей – в первую очередь, диодов и транзисторов, а также резисторов, конденсаторов, - в виде электрической схемы, выполняющей некоторую простейшую функцию.

Электронный элемент, реализующий логическую функцию, называется логическим вентилем.

Построение логических схем

1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество базовых логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей вентиль.
4. Соединить вентили в порядке выполнения логических операций.

Пример 1

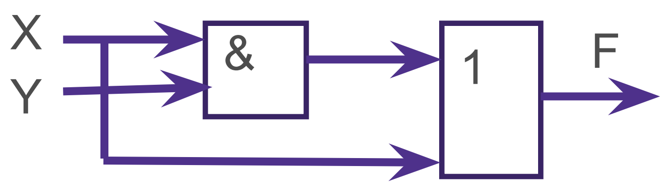
Пусть X = истина, Y = ложь. Составить логическую схему для следующего логического выражения:

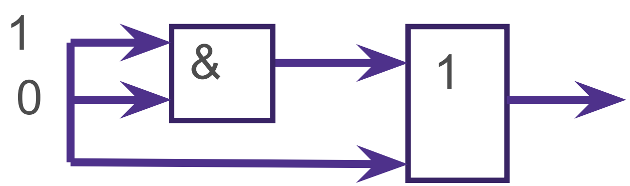
$$F = X+Y*X$$

1. Две переменные: X и У.

2   1

2. Две логические операции: X+Y*X.
3. Строим схему:

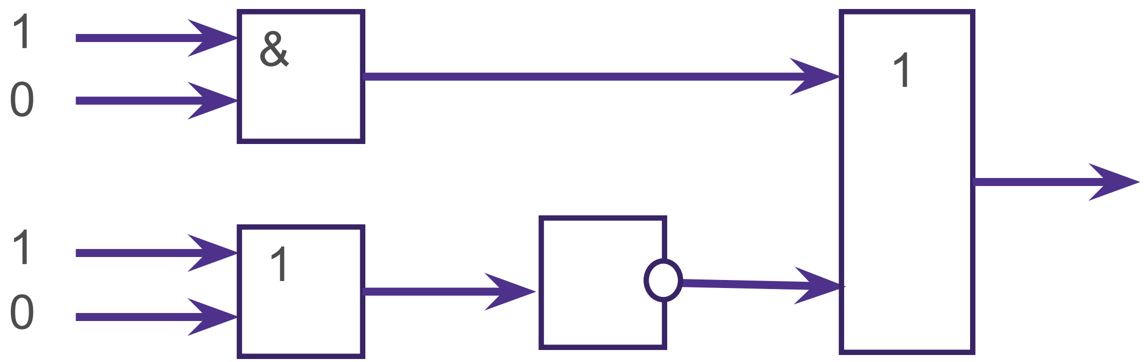




Ответ: 1+0*1=1.

Пример 2

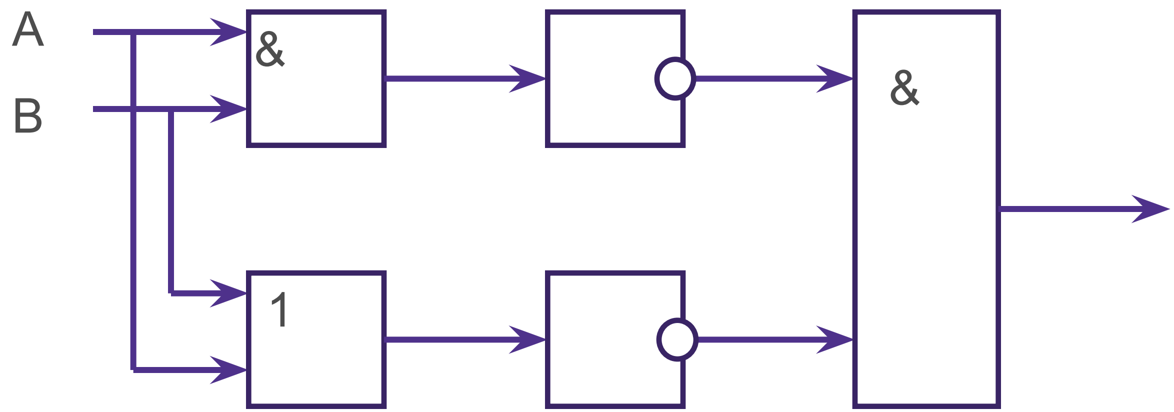
Постройте логическую схему, соответствующую логическому выражению $F = X*Y+\neg(Y+X)$. Вычислить значения выражения для $X=1$, $Y=0$.

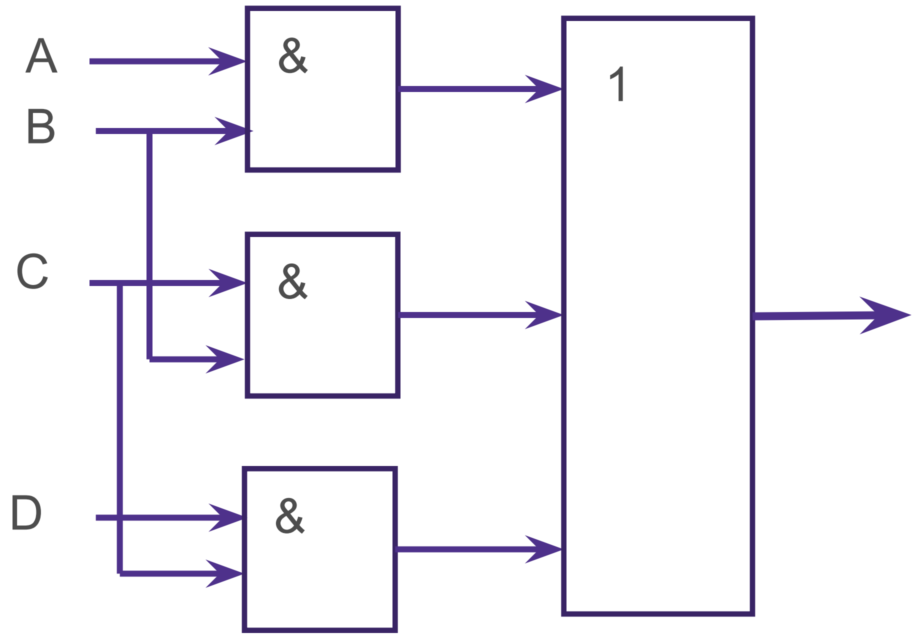


Постройте логические схемы:

1. $F = A*(B+C)$
2. $F = \neg B*(\neg A*B+A)$
3. $F = D+A*B*C*(\neg B+\neg C)$
4. $F = (C*\neg A)+\neg(A*B+B*C)$
5. $F = A+B*\neg C$, если $A=1$, $B=1$, $C=1$ 1
6. $F = \neg(A+B*C)$, если $A=0$, $B=1$, $C=1$ 1
7. $F= \neg A+B*C$, если $A=1$, $B=0$, $C=1$ 0
8. $F = (A+B)*(C+B)$, если $A=0$, $B=1$, $C=0$ 1
9. $F = \neg(A*B*C)$, если $A=0$, $B=0$, $C=1$ 1
10. $F = \neg(A*B*C)+(B*C+ \neg A)$, если $A=1$, $B=1$, $C=0$ 1
11. $F = B* \neg A+ \neg B*A$, ЕСЛИ $A=0$, $B=0$ 0

Постройте логическое выражение к логическим схемам:





Триггер – логическая схема, способная сохранять одно из 2 состояний до подачи нового сигнала на вход. Это, по сути, разряд памяти, способный хранить 1 бит информации.

Регистр – устройство , состоящее из последовательности триггеров. Регистр предназначен для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым можно представлять и адрес, и команду, и данные.