Урок 6

Задание 8: стереометрия

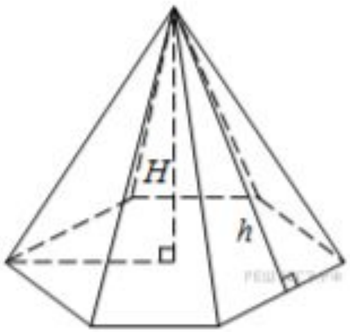
Задание 8, тип 7: пирамида

Пусть вне плоскости многоугольника $A_1A_2...A_n$ задана точка P. Тогда фигура, образованная треугольниками A_1PA_2, A_2PA_3 ... и многоугольником $A_1A_2...A_n$ вместе с их внутренними областями называется пирамидой (n-угольной пирамидой).

Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а основание ее высоты — центр этого многоугольника.

Соотношения для правильной пирамиды

Пусть H — высота правильной пирамиды, h — ее апофема, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем правильной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:



$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}}h,$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}},$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H.$$

Задание 8, тип 7: пирамида

- **1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S* биссектрисы треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*. Площадь треугольника *ABC* равна 2; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка *OS*.**

- **2. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O – центр основания, S – вершина, SO=15, BD=16, Найдите боковое ребро SA**

Задание 8, тип 7: пирамида

- 3. В правильной треугольной пирамиде *SABC* точка *M* – середина ребра *AB*, *S* – вершина. Известно, что *BC* = 3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка *SM*.

- 4. Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

- 5. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.

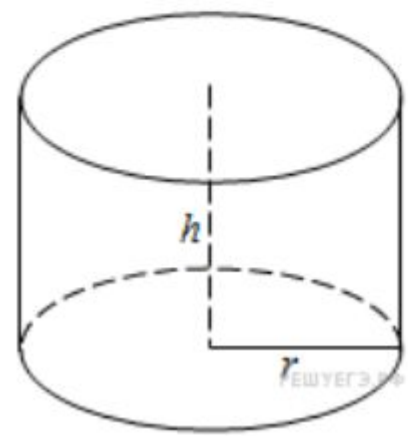
Задание 8, тип 8: Цилиндр

- Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Соотношения для цилиндра

Пусть h — высота цилиндра, r — радиус основания, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности, $S_{полн}$ — площадь полной поверхности, V — объем цилиндра. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{бок} = 2\pi rh, \quad S_{полн} = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \quad V = S_{осн}h = \pi r^2 \cdot$$



Задание 8, тип 8: Цилиндр

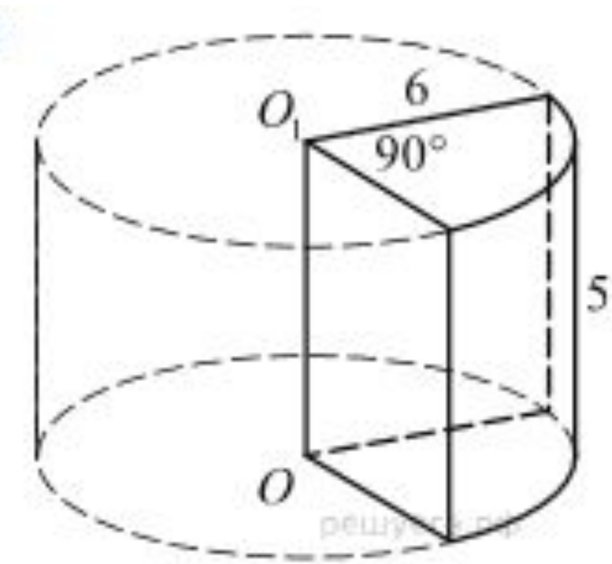
- 1. Объем первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

- 2. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π

Задание 8, тип 8: Цилиндр

- 3. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в раза больше первого? Ответ выразите в см.

- 4. Найдите объем *V* части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π



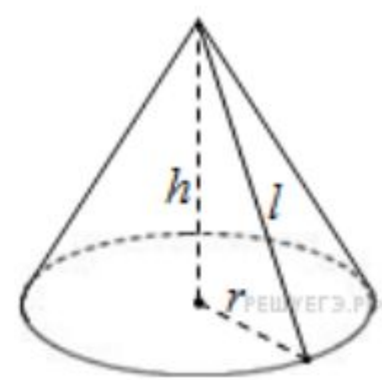
Задание 8, тип 9: Конус

- Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.

Пусть h — высота конуса, r — радиус основания, l — образующая, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем конуса. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h^2 + r^2 = l^2, \;\; S_{\text{бок}} = \pi r l, \;\; S_{\text{полн}} = \pi r^2 + \pi r l,$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



Задание 8, тип 9: Конус

- 1. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

- 2. Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите V/π

Задание 8, тип 9: Конус

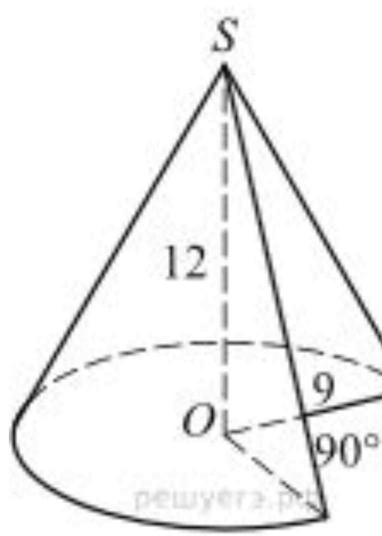
- 3. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?

- 4. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Задание 8, тип 9: Конус

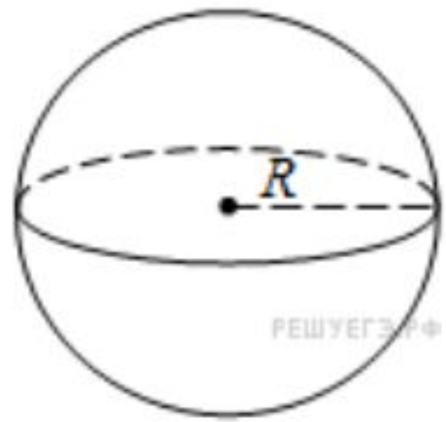
- 5. Диаметр основания конуса равен 24, а длина образующей — 13. Найдите высоту конуса.

- 6.Найдите объем части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π



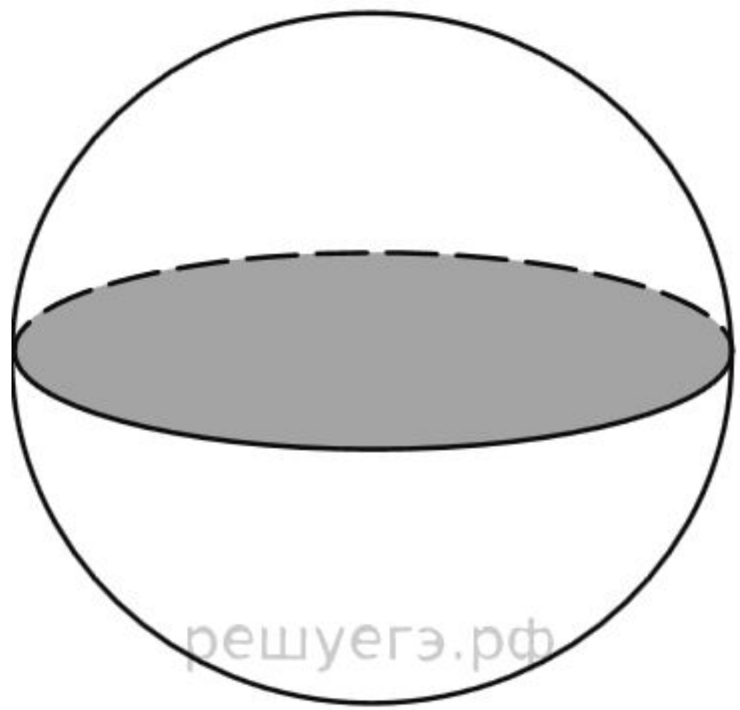
Задание 8, тип 10: Шар

Шаром называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. Сферой называется поверхность шара. Пусть R — радиус шара, S — площадь сферы, V — объем шара. Тогда имеют место следующие соотношения:



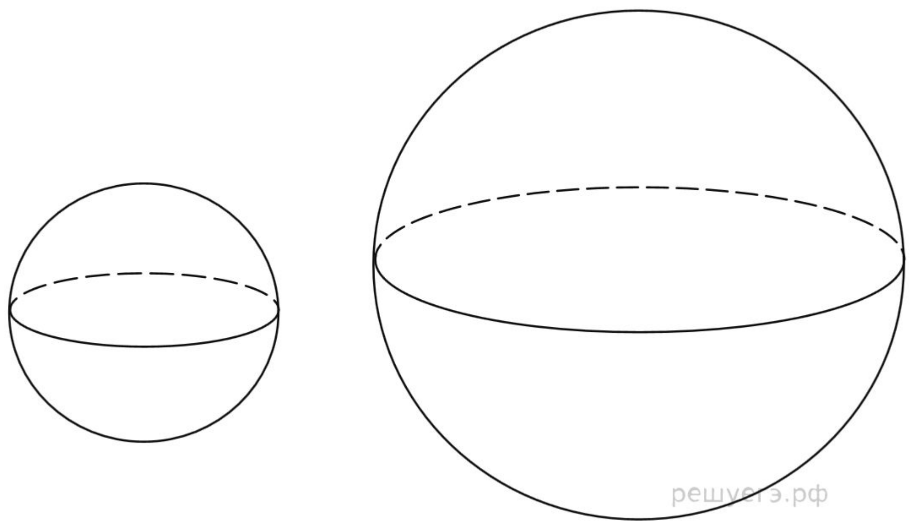
Задание 8, тип 10: Шар

- 1. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.



Задание 8, тип 10: Шар

- 2. Дано два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Задание 8, тип 11: комбинации тел

Задание 8, тип 11.1: Комбинации круглых тел. Вписанные сферы

Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается обоих оснований цилиндра и каждой его образующей.

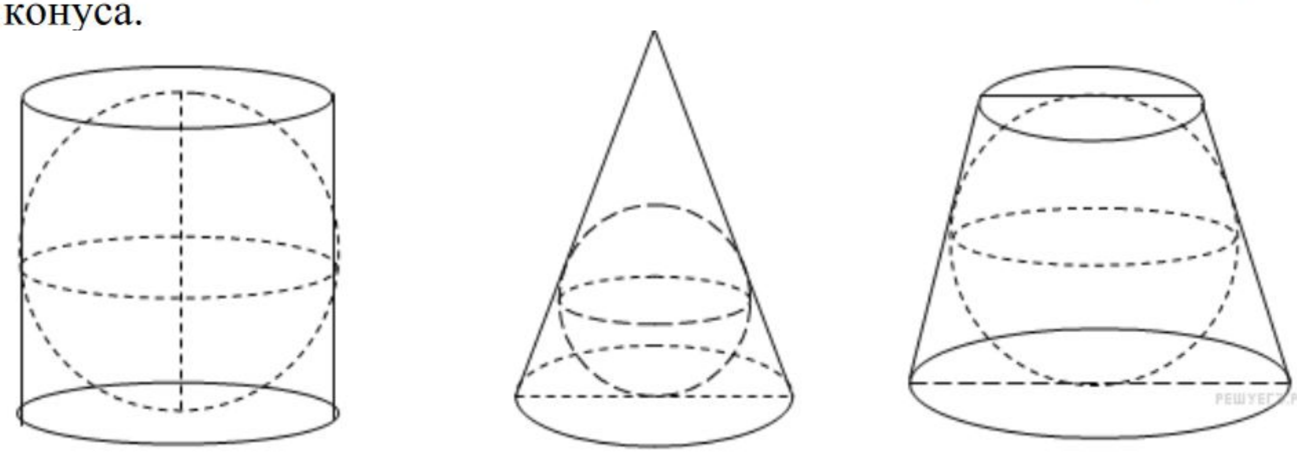
Сфера называется вписанной в конус, если она касается основания конуса и каждой его образующей.

Сфера называется вписанной в усечённый конус, если она касается обоих оснований конуса и всех его образующих.

Теорема 1: В прямой круговой цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру основания. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

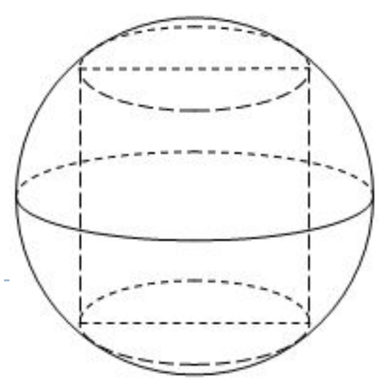
Теорема 2: В любой прямой круговой конус можно вписать сферу. Причём центр сферы есть точка пересечения оси конуса с биссектрисой угла наклона образующей конуса к плоскости его основания.

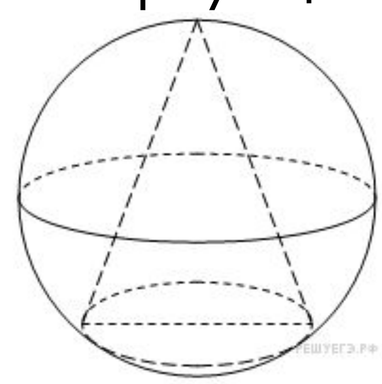
Теорема 3. В усечённый конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой, и длина его образующей равна сумме длин радиусов оснований. Причём центр сферы есть середина оси усечённого конуса.



Задание 8, тип 11.2: Комбинации круглых тел. Описанные сферы

- Сфера называется описанной около цилиндра, если окружности его оснований лежат на сфере.
- Сфера называется описанной около конуса, если вершина конуса и его основание лежат на сфере.
- Теорема 1: около цилиндра можно описать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.
- Теорема 2: около конуса можно описать сферу тогда и только тогда, когда он круговой. Причём центр сферы есть точка пересечения прямой, перпендикулярной к плоскости основания и проходящей через центр его, и плоскости, перпендикулярной какой-либо его образующей конуса и проходящей середину этой образующей.
- Следствие: сферу можно описать около любого прямого кругового конуса. В этом случае, центр сферы — точка пересечения прямой, содержащей высоту конуса с плоскостью, перпендикулярной какой-либо из его образующих и проходящей через ее середину.



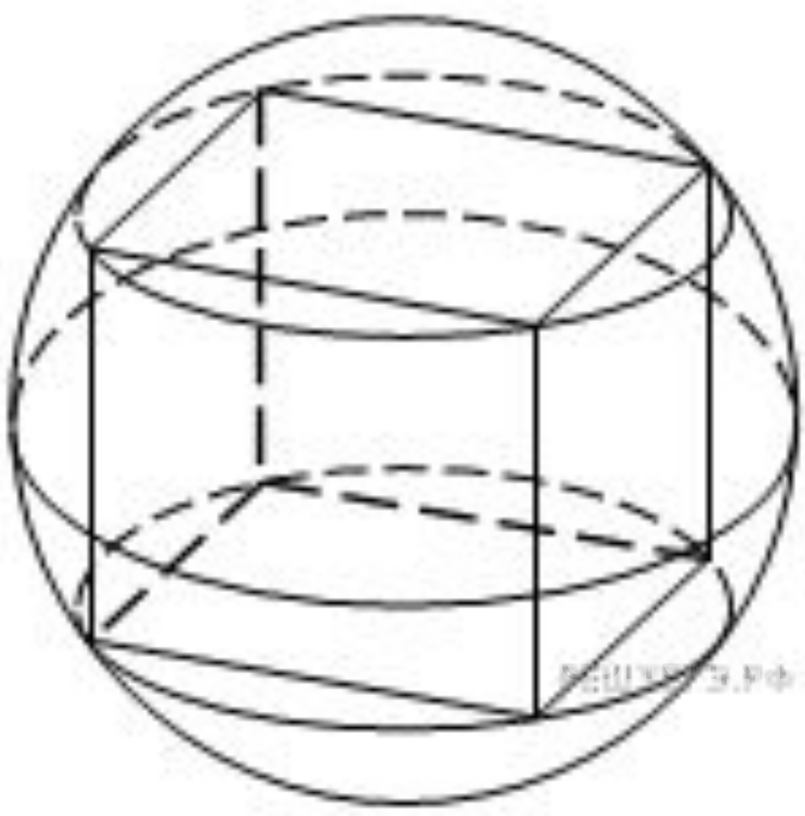


Задание 8, тип 11.3:Комбинации конуса и цилиндра

- Цилиндр называется вписанным в конус, если одно его основание лежит на основании конуса, а второе совпадает с сечением конуса плоскостью, параллельной основанию. Конус в этом случае называется описанным вокруг цилиндра.
- Цилиндр называется описанным вокруг конуса, если центр одного из оснований цилиндра является вершиной вершина конуса, а противоположное основание цилиндра совпадает с основанием конуса. Конус в этом случае называется вписанным в цилиндр.

Задание 8, тип 11.4: Комбинации многогранников и круглых тел. Описанные сферы

- Сфера называется описанной около многогранника, если все его вершины лежат на этой сфере. Многогранник называется в этом случае вписанным в сферу.
- Возможност ранника означает суш еры), равноудалён анника.
- Теорема 1: е о многогранни уляр на какое-либо из его пендикуляра разделит реб
- Теорема 2: е о многогранни уляр на какую-либо из его пендикуляра попадёт в це соответствующей грани.

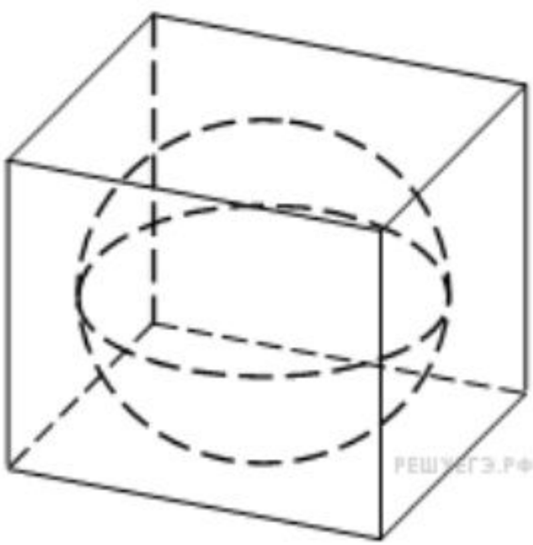


Задание 8, тип 11.5: Комбинации многогранников и круглых тел. Вписанные сферы

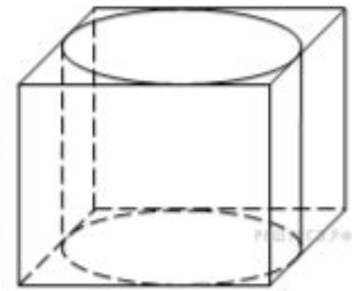
Сфера называется вписанной в многогранник, если все его грани касаются этой сферы. Многогранник называется в этом случае описанным около сферы.

Теорема: если в многогранник с площадью поверхности S и объёмом V вписан шар радиуса r, то справедливо соотношение:

$$r = \frac{3V}{S}.$$



Задание 8, тип 11.6: Комбинации конуса, цилиндра и многогранников



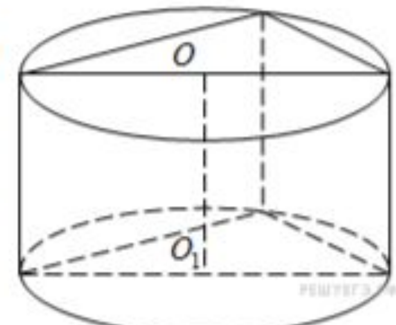
В условиях задач встречаются также следующие понятия, не входящие в школьные учебники, которые уточняются непосредственно в условиях задач. Приведем наиболее употребительные из них.

Цилиндр вписан в призму: основания цилиндра вписаны в основания призмы.

Цилиндр описан вокруг призмы: основания цилиндра описаны вокруг оснований призмы.

Цилиндр вписан в пирамиду: одно из основание цилиндра вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание цилиндра принадлежит основанию пирамиды.

Цилиндр описан вокруг пирамиды: вершина пирамиды принадлежит одному из оснований цилиндра, а другое его основание описано вокруг основания пирамиды.



Конус вписан в призму: основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса принадлежит противоположному основанию призмы.

Конус описан вокруг призмы: одно из оснований призмы вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание призмы вписано в основание конуса.

Конус вписан в пирамиду: их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды. Вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой.

Конус описан вокруг пирамиды: их вершины совпадают, а основание конуса описано вокруг основания пирамиды.

Задание 8, тип 11: комбинации тел

- 1. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.
- 2. В куб вписан шар радиуса 1. Найдите объем куба.
- 3. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны 5/π. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Задание 8, тип 11: комбинации тел

- 4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.
- 5. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса
- 6. Вершина A куба с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1. Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину S/π