Основные понятия теории графов

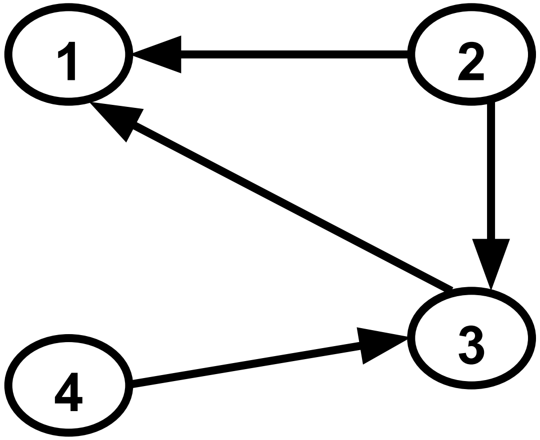
§1. Виды и способы задания графов. Матрицы графов

Граф G(V,E) – комбинаторный объект, состоящий из 2 конечных множеств: V – называемого множеством вершин и множества пар элементов из V, т.е. $E \subseteq V \times V$, называемого множеством рёбер, если пары неупорядочены, и множеством дуг, если пары упорядочены.

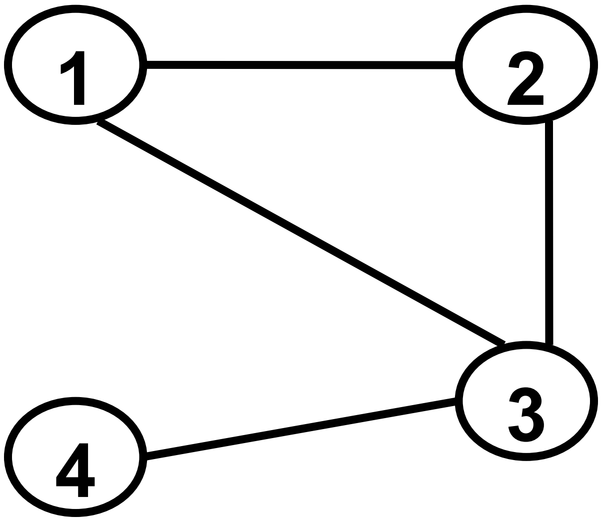
В первом случае граф G(V,E) называется **неориентированным**, во втором – **ориентированным**.

Примеры:

1. Ориентированный граф



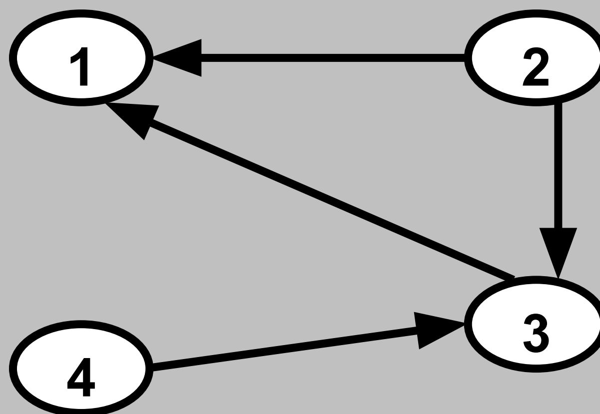
2. Неориентированный граф



Если $e=(v_1,v_2)$, $e \in E$, то говорят, что ребро e соединяет вершины v_1 и v_2.

Если $v_1=$ …
петлёй.

Две … я
смежными … ее
их ребро … из
вершин … й
соответст…



1 и 2 , 2 и 3, 1 и 3, 4 и 3 – смежные вершины

Все рёбра (дуги), принадлежащие одной вершине будут смежными.

Два разли… жны, если … ни
имеют общую вершину.

Способы задания графа.

1. **<u>Граф как алгебраическая система</u>:**

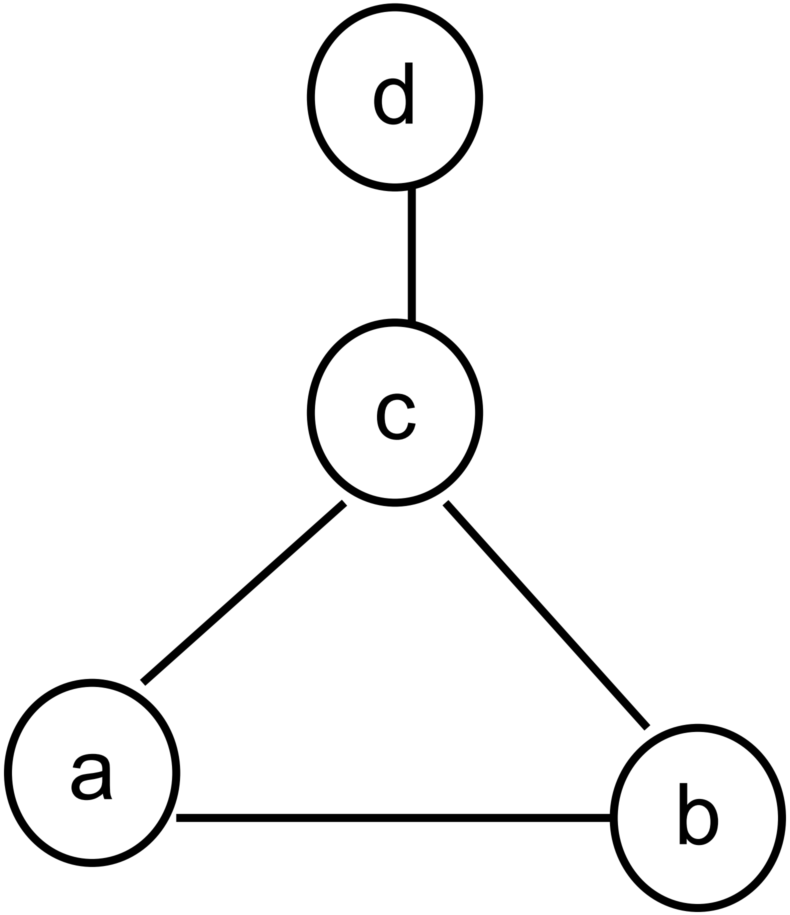
модель, носителем которой является множество вершин, а отношение – бинарное отношение смежности вершин.

< {*a*,*b*,*c*,*d*}; - множество вершин

{(*a*,*b*),(*b*,*a*),(*b*,*c*),(*c*,*b*),(*a*,*c*),(*c*,*a*),(*c*,*d*),(*d*,*c*)} – множество рёбер >.

2. <u>Геометрический</u>

Получается путём расположения различных точек на плоскости для каждой вершины $v \in V$, причём если $(v_1, v_2) \in E$, то проводится ребро (дуга) из v_1 в v_2.



3. Матрица смежности:

Пусть дан граф G, его **матрица смежности** $A = [a_{ij}]$ определяется следующим образом:

$a_{ij} = 1$ если в G существует дуга (x_i, x_j)

$a_{ij} = 0$ если в G нет дуги (x_i, x_j)

Сумма всех элементов строки x_i матрицы - полустепень исхода вершины x_i.

Сумма элементов столбца x_i – полустепень захода вершины x_i.

Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i, есть множество конечных вершин дуг, для которых x_i является началом.

4. Матрица инциденций

Пусть дан граф G с n вершинами и m дугами. **Матрица инциденций** графа G обозначается $B=[b_{ij}]$ и является матрицей размерности $n \times m$, определяемой следующим образом:

$\mathbf{b_{ij} = 1,}$ x_i - начальная вершина дуги a_j

$\mathbf{b_{ij} = -1,}$ x_i - конечная вершина дуги a_j

$\mathbf{b_{ij} = 0,}$ x_i не является концевой вершиной дуги a_j или, если a_j является петлёй

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один – равный –1, либо все элементы столбца равны 0.

Если G – неориентированный граф, то его матрица инциденций определяется также как и выше, за исключением того, что все элементы, равные –1, заменяются на +1.

Степени вершины

Степенью (deg v) или **валентностью** вершины v неориентированного графа G называется число рёбер, инцидентных вершине v.

Вершина степени 0 называется **изолированной**.

Вершина степени 1 называется **концевой** или **висячей**.

Пусть G – ориентированный граф.

Полустепенью захода ($\deg^{-} v$) вершины v называется число дуг, входящих в вершину v.

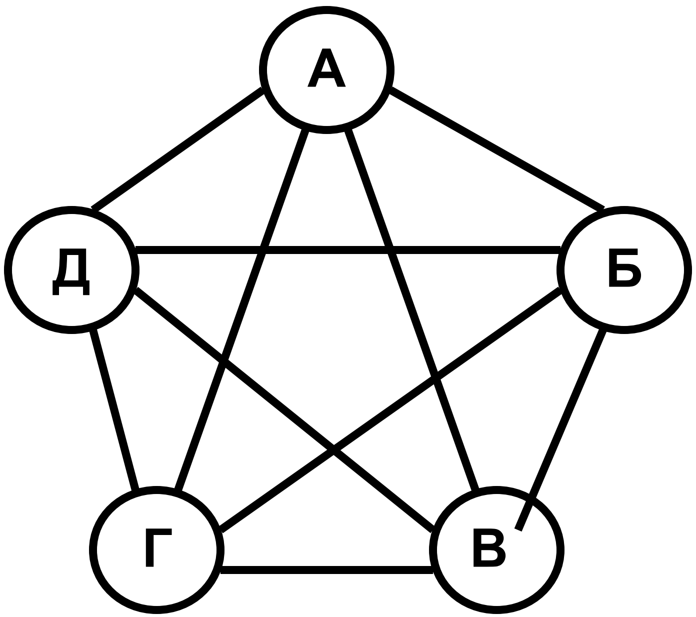
Полустепенью исхода ($\deg^{+} v$) вершины v называется число дуг, выходящих из вершины v.

Справедливо соотношение:

$$\deg v = \deg^{+} v + \deg^{-} v$$

Лемма (о рукопожатиях):

Сумма степеней всех вершин графа является чётным числом и равна удвоенному числу рёбер.



Deg А = 4

Deg Б = 4

Deg В = 4

Deg Г = 4

Deg Д = 4

Deg А + Deg Б + Deg В +
+Deg Г + Deg Д = 20

§2 Виды графов

Пусть $\Gamma_1 = [A_1, B_1], \Gamma_2 = [A_2, B_2]$ - два графа. Предположим, что существует такое отображение множеств вершин $f : A_1 \to A_2$ что выполнены следующие четыре условия:

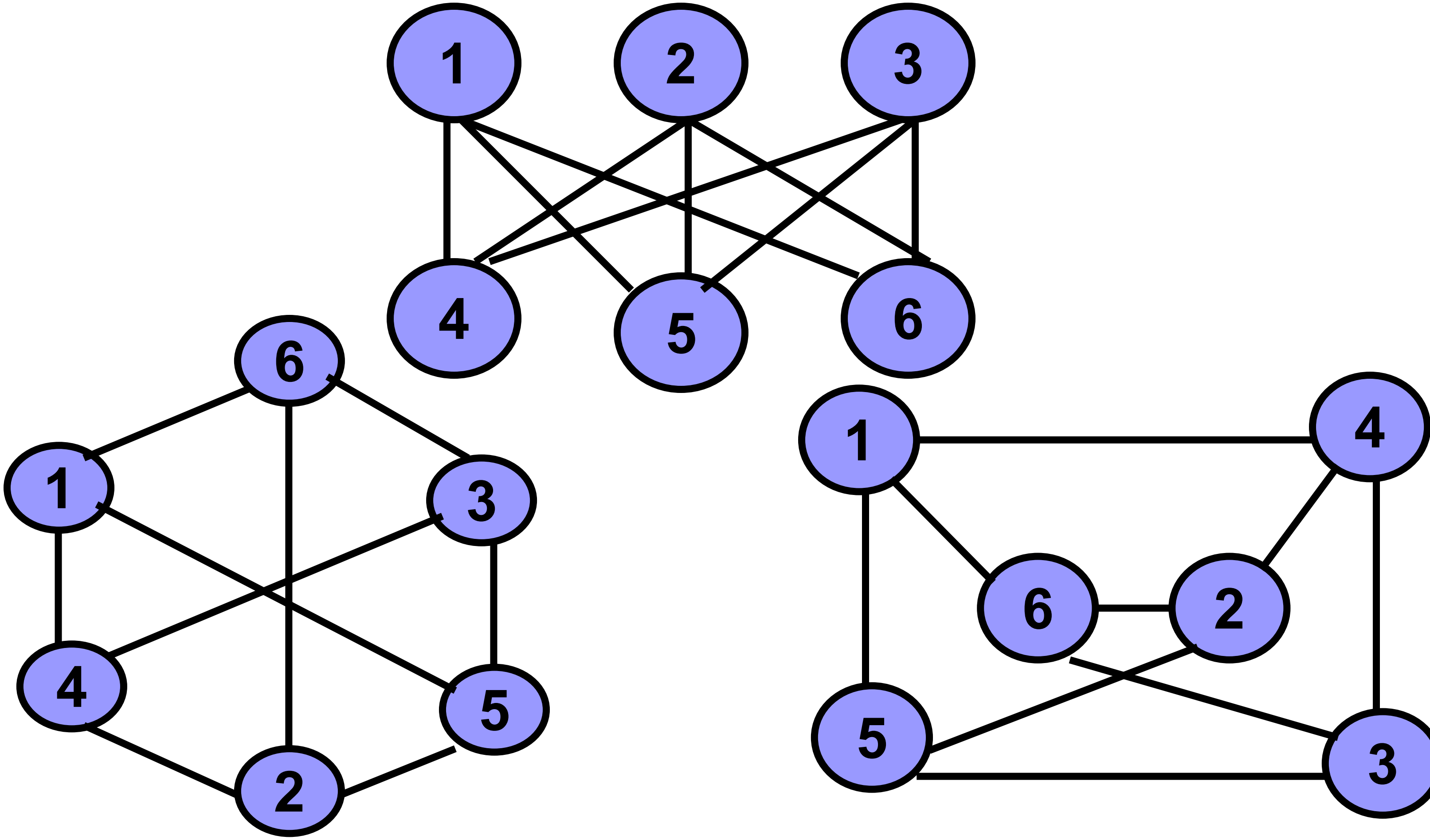
1. Если $x, y \in A_1,\ x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$
2. Для всякого $y \in A_2$ существует $x \in A_1$ такой, что
$$f(x) = y$$

3. Если $(x, y) \in B_1$, то $(f(x), f(y)) \in B_2$

4. Для всякого $(u, v) \in B_2$ существует такое $(x, y) \in B_1$, что $u = f(x)$ и $v = f(y)$.

Тогда отображение f называется **изоморфизмом** графов Γ_1, Γ_2, а сами эти графы называются **изоморфными**.

ПРИМЕР: данные 3 графа изоморфны



Графы изоморфны, если ∃ биекция $h:V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая смежность.

Теорема:

Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов. (т.е. Одновременно с перестановкой i-ой и j-ой строк переставляются i-ый и j-ый столбец.)

При необходимости дополнительной информации о вершинах и рёбрах, используются взвешенные графы.

Четвёрка <V,E,f,g> называется **взвешенным графом**, когда для вершины v элемент f(v) – вес вершины, а для ребра e элемент g(e) – вес ребра.

Информацию о весах рёбер во взвешенном графе представляют с помощью матрицы весов $W=w_{ij}$,

где $\mathbf{w_{ij}} = \begin{cases} w_{ij} - \text{вес ребра}(e_i, e_j) \\ 0 \text{ или } \infty, \text{если ребра не существуе} \end{cases}$

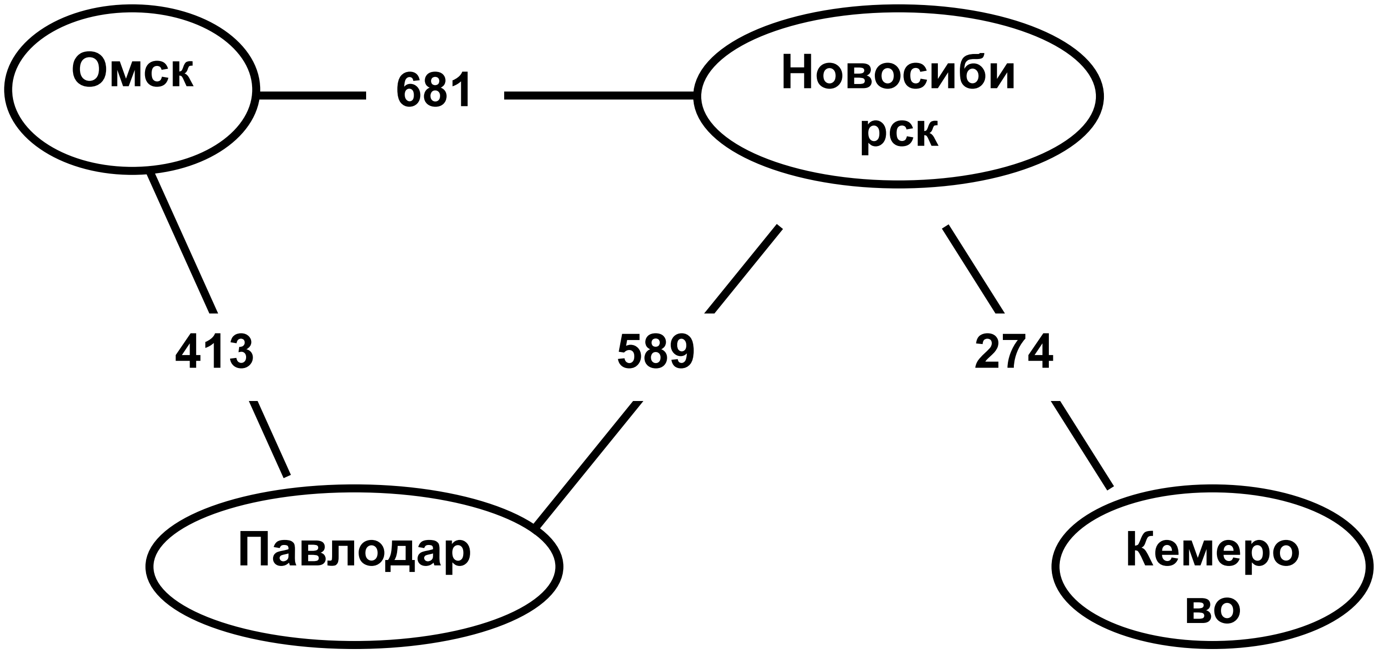


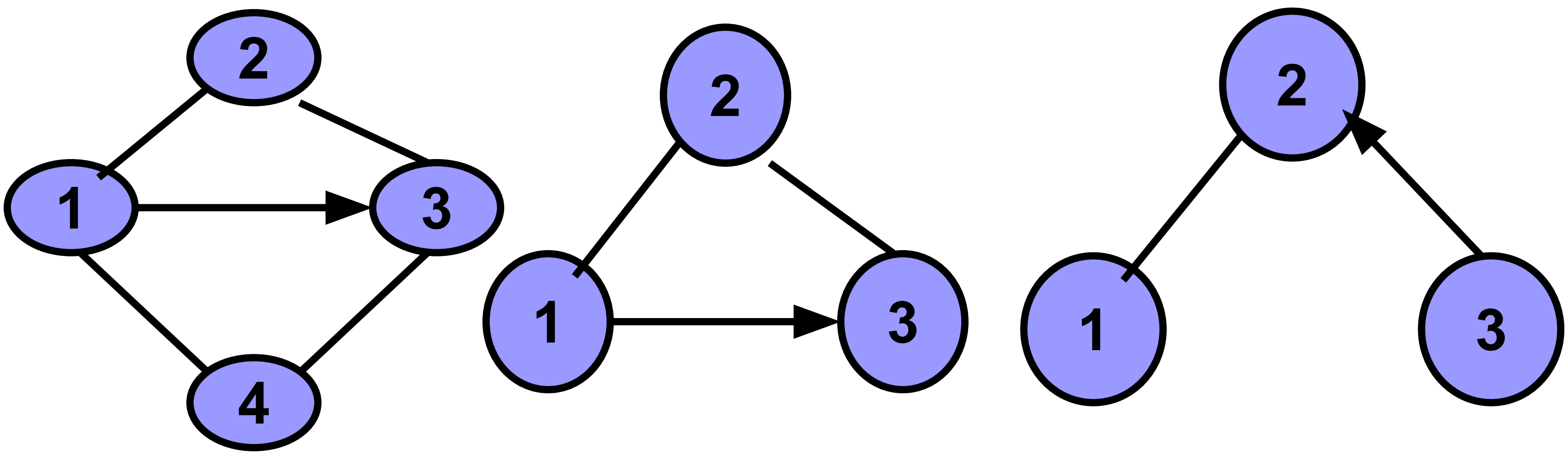
Схема автомобильных дорог с указанием их протяжённости

Будет описана матрицей весов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 681 & 413 & \infty \\ 681 & 0 & 589 & 274 \\ 413 & 589 & 0 & \infty \\ \infty & 274 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

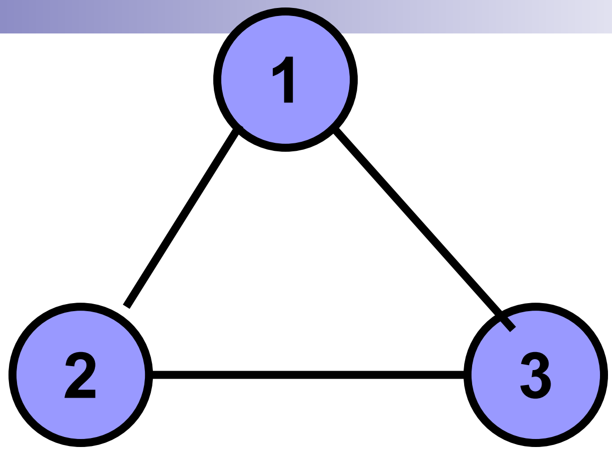
Граф $G'(V', E')$ называется **подграфом** графа $G(V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' = E \cap (V')^2$.

Граф $G'(V', E')$ называется **частью графа** $G(V, E)$, если если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E \cap (V')^2$.

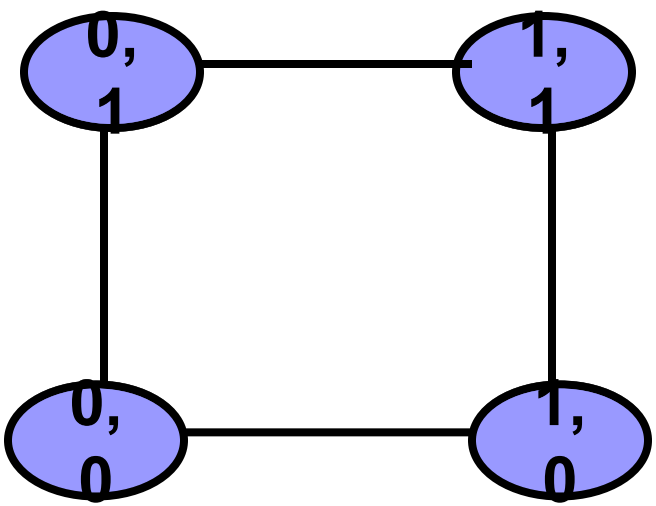


граф подграф часть графа

Полный граф K_n – это граф на n вершинах, у которого смежны любые 2 различные вершины.



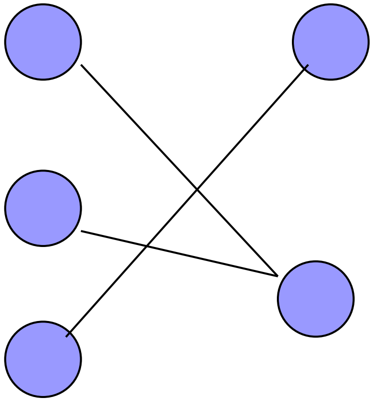
Граф единичного n-мерного куба B_n. Вершины графа - n-мерные двоичные наборы. Рёбра соединяют вершины, отличающиеся одной координатой.

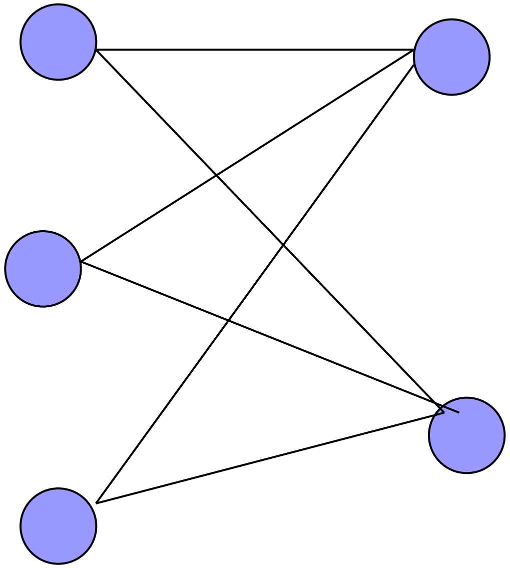


Регулярным или **однородным** называется граф, у которого все вершины имеют одинаковую степень.

Граф называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его вершин на 2 класса (доли), при котором концы каждого ребра лежат в разных классах.

Если в двудольном графе всякие две вершины из разных классов смежные, то такой граф называется **полным двудольным**. Полный двудольный граф, у которого одному классу принадлежат m вершин, а другому – n вершин, обозначают $K_{m,n}$.





двудольный   полный двудольный

§3. Реберная и вершинная связность

Маршрут – это последовательность рёбер $e_1,..,e_m$ такая, что e_i,e_{i+1} имеют общую вершину.

Число рёбер называется **длиной маршрута**.

Пусть G –неориентированный граф.

Маршрут называется **цепью**, если все рёбра в нём различны.

Если ни одна из вершин не появляется более 1 раза, то маршрут называется **простой цепью**.

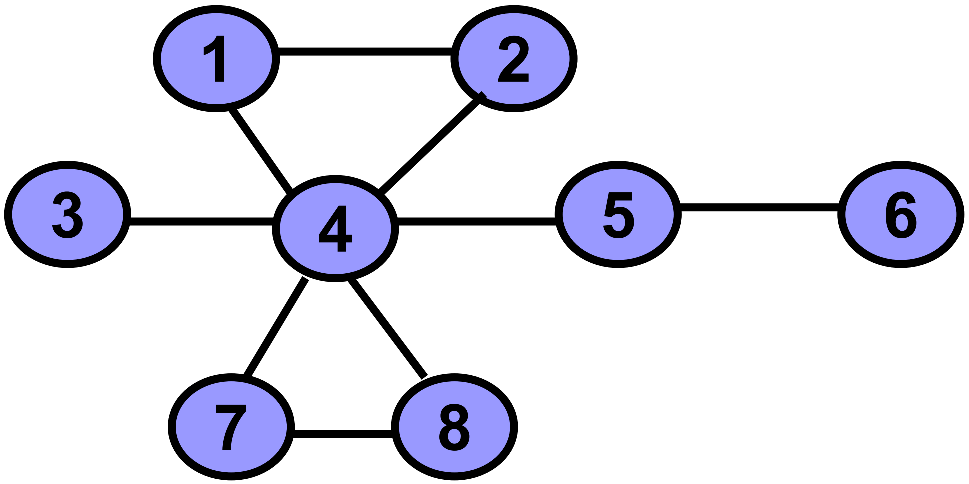
Маршрут называется **циклическим**, если первая вершина в нём равна последней.

Циклическая цепь называется **циклом**, а циклическая простая цепь – **простым циклом**.

Неориентированный граф без циклов называется **ациклическим**.

Минимальная из длин циклов неориентированного графа называется **обхватом**.

ПРИМЕР:



(1,2), (1,2,4,7), (3,4,5,6) – простые цепи

(1,2,4,7,8,4) – цепь не простая

(1,2,4,7,8,4,2) – маршрут, не являющийся цепью

(1,2,4,7,8,4,1) – цикл не простой

(1,2,4,1) – простой цикл

Обхват графа = 3

Пусть G – ориентированный граф.

Путь – маршрут, у которого все дуги различны.

Ориентированной цепью называется такой путь, в котором каждая дуга используется не более одного раза.

Простой ориентированной цепью называется такой путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза.

Если в цикле каждая вершина, кроме первой и последней, встречается не более одного раза – то такой цикл называется **контуром**.

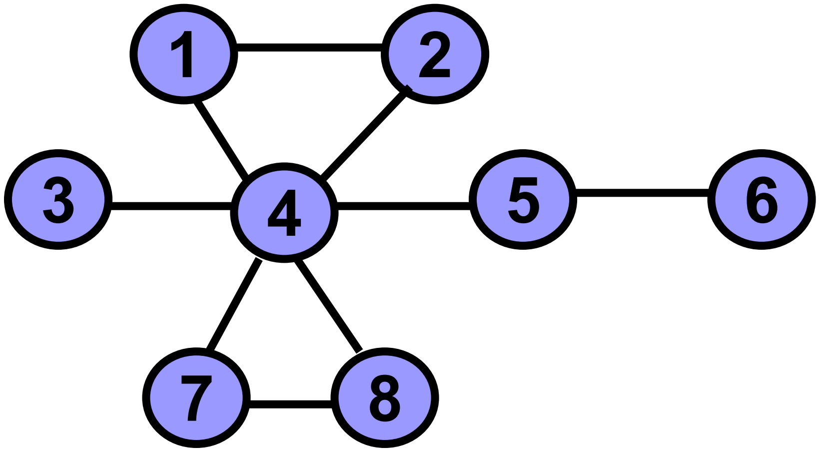
Неориентированный граф называется **связным**, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Орграф называется **связным**, если соответствующий ему неорграф тоже является связным.

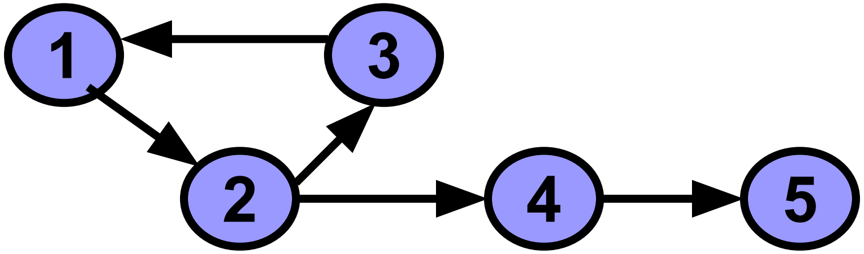
Орграф называется **сильно связным**, если для каждой пары различных вершин a и b существуют (a,b)-путь и (b,a) – путь.

Любой связный неорграф является сильно связным.

ПРИМЕР:



Связный граф



Связный, но не сильно связный

Вершина b называется **достижимой** из вершины a, если существует (a,b)-путь.

Матрица достижимости

Рассмотрим степени матрицы смежностей ориентированного графа G=(V,E). Единица в i-й строке и j-м столбце матрицы смежностей A указывает на наличие дуги (v_i,v_j), т.е. на наличие пути длины 1 из вершины v_i в вершину v_j.

Пусть A - матрица смежностей ориентированного графа G.

Элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{A}^{n}$ *равен количеству путей длины n из i-й вершины в j-ю вершину*.

Получив матрицу $B^n=A+A^2+\ldots+A^n$, можно определить *количество путей* из v_i в v_j длины, меньшей или равной n.

Пусть G=(V,E) - ориентированный граф, содержащий n вершин. Матрица P размерности n x n, элементы которой задаются выражением

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } b_{ij} \in B^n \quad b_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{противном случае} \end{cases}$$

называется **матрицей достижимости** (путевой матрицей) графа G.

Матрица контрдостижимостей $Q=[q_{ij}]$ определяется как матрица, элементы которой определяются так:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } v_i \textit{ достижима из } v_j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

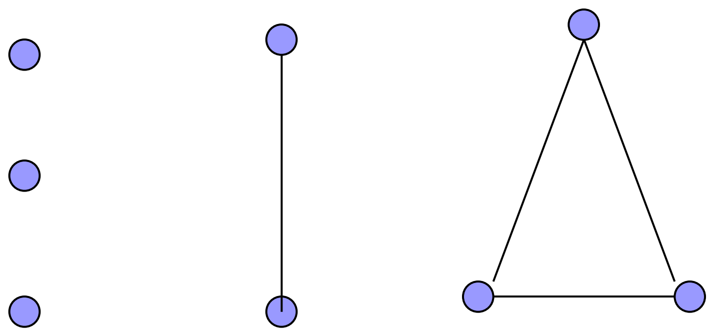
Из определения следует, что $Q=P^T$, где P^T - матрица, транспонированная к матрице достижимости P.

§4 Реберная и вершинная связность. Неравенства Уитни - Харари.

Связностью (вершинной) графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу.

Рёберная связность графа определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Максимальный связный подграф графа G называется **компонентой связности**.



граф с 5 компонентами связности

Пусть G – граф с n вершинами и k компонентами связности. Если граф связный, то число рёбер в нём минимально, когда он ациклический, и максимально, когда он полный.

Тогда имеет место следующая оценка для числа рёбер связного графа:

$$n-1 \le |E| \le n \cdot (n-1)/2$$

<u>Теорема (неравенство Уитни-Харари):</u>

Пусть G - граф с n вершинами и k компонентами связности. Тогда число m его рёбер удовлетворяет неравенству:

$$n-k \le m \le (n-k)\cdot(n-k+1)/2$$

<u>Доказательство:</u> нижняя оценка доказывается методом мат. индукции.

$$n-k \le m$$

Если G полностью несвязный граф, то неравенство справедливо: $k=n$, $m=0$ и $0 \geq n-k=0$.

Пусть G имеет минимальное число рёбер, например $m^{/}$, тогда удаление одного ребра приводит к увеличению числа компонент связности на 1. То есть, полученный граф имеет n вершин, $k+1$ компоненту связности и $m^{/}-1$ ребро.

В силу индуктивного предположения имеем

$m^{/}-1 \geq n-(k+1)$ или $m^{/} \geq n-k$, что и следовало доказать.

При доказательстве справедливости верхней оценки можно считать, что каждая компонента связности графа G является полным графом.

Предположим, что C_i и C_j – компоненты связности соответственно с n_i и n_j вершинами, где $n_i \geq n_j > 1$.

Если заменить C_i и C_j на полные графы с n_i +1 и n_j -1 вершинами, то общее количество вершин не изменится, а число рёбер увеличится на некоторую положительную величину:

$$1/2\cdot\{(n_i+1)\cdot n_i - n_i\cdot(n_i-1) - (n_j-1)\cdot n_j + (n_j-1)\cdot(n_j-2)\ \} =$$

$$1/2\cdot\{n_i^2+n_i-n_i^2+n_i-n_j^2+n_j+n_j^2-3n_j+2\} =$$

$$1/2\cdot(2n_i-2n_j+2) = n_i - n_j + 1$$

Следовательно, для того, чтобы число рёбер в графе G было максимальным при данных n и k, граф G должен состоять из k-1 изолированной вершины и полного графа с n-k+1 вершиной.

Отсюда получаем требуемое неравенство. ♦

Данный факт обычно используется для решения вопроса о числе рёбер связного графа.

ПРИМЕР:

Дан граф на 5 вершинах с 1 компонентой связности. Чему равно минимальное и максимальное число рёбер в таком графе?

$$n-k \le m \le (n-k)\cdot(n-k+1)/2$$

$$\Downarrow$$

$$5-1 \le m \le (5-1)\cdot(5-1+1)/2 \Rightarrow$$

$$4 \le m \le 10$$

Имеем: минимальное = 4

максимальное = 10