Решение геометрических задач ГИА №26

Характеристика задания

26 задание представляет собой планиметрическую задачу на вычисление, более сложную по сравнению с задачей 24.

Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 26. Значительная часть задач связана с окружностью.

Теория

Свойства вписанных углов:

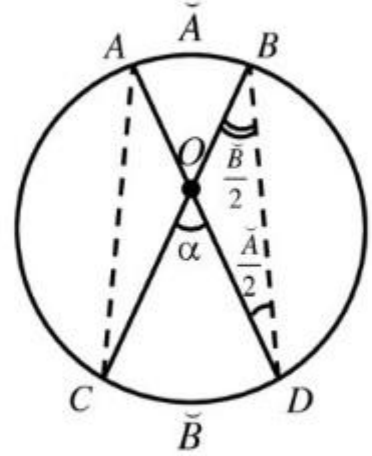
- Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр – прямой
- Равные дуги окружности стягиваются равными хордами

Теорема (угол между пересекающимися

хордами). Угол между двумя пересекающими

хордами равен по каемых ими д

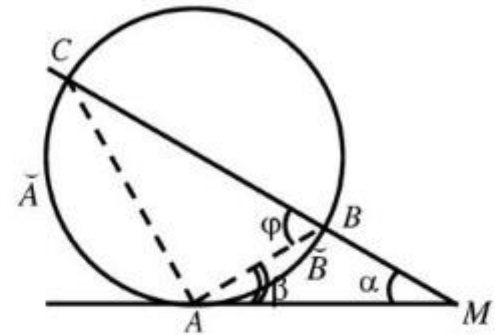
$$\alpha = \frac{\breve{B} + \breve{A}}{2}$$



Теория

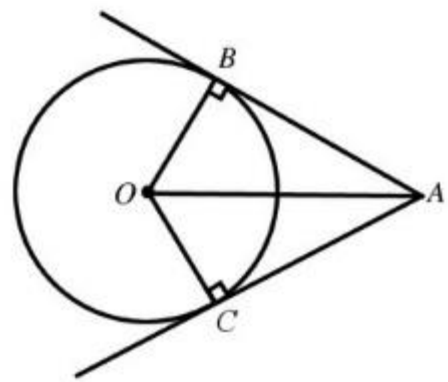
Теорема (угол между касательной и секущей). Угол между касательной и секущей равен полуразности высекаемых ими дуг.

$$\alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$$



Теорема . Отрезки касательных к окружностям, проведенным из одной точки, равны.

AB=AC



Теория

Свойства вписанной окружности:

- В любой треугольник можно вписать окружность
- Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов многоугольника
- Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению его площади к полупериметру
- Чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, он должен быть выпуклым
- В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны.

Теория

Свойства описанной окружности:

- Вокруг любого треугольника можно описать окружность
- В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы
- Радиус R окружности, описанной около тре ка, равен отношению произведения сторон a, $R = \frac{abc}{4S}$ c треугольника к его учетверенной площади
- Радиус окружности, описанной около треугольника, равен отношению стороны треугольника к удвоенному синусу противолежащего угла

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{BC}{2\sin\angle A}$$

Теория

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \bullet \cos\alpha$$

Теория

Свойства трапеции:

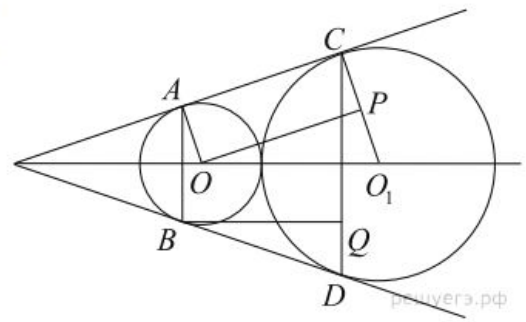
- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен половине разности оснований и лежит на средней линии.
- Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений её боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.
- Треугольники, образованные при пересечении диагоналей и лежащие на основаниях трапеции, подобные.
- Треугольники, образованные при пересечении диагоналей и лежащие на боковых сторонах трапеции, равновеликие

Примеры решения задач

Окружности радиусов 36 и 45 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение.

Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т. е. 81. Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда



$$O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 45 - 36 = 9.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что

$$OP = \sqrt{OO_1^2 - O_1P^2} = 36\sqrt{5}.$$

Опустим перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD. Прямоугольный треугольник BQD подобен прямоугольному треугольнику OPO_1 по двум углам, поэтому $\frac{BQ}{BD} = \frac{OP}{OO_1}$. Следовательно.

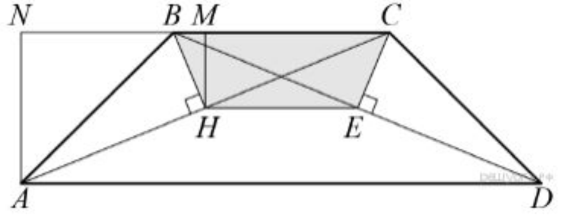
$$BQ = \frac{OP \cdot BD}{OO_1} = \frac{36\sqrt{5} \cdot 36\sqrt{5}}{81} = 80.$$

Ответ: 80.

Примеры решения задач

В равнобедренной трапеции $ABCD$ боковые стороны равны меньшему основанию BC. К диагоналям трапеции провели перпендикуляры BH и CE. Найдите площадь четырёхугольника $BCEH$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 36 .

Решение.



По свойству равнобедренной трапеции $AC = BD$, следовательно, треугольники ABC и DCB равны. Так как $AB = BC = CD$, треугольники ABC и DCB равнобедренные, следовательно, BH и CE — соответствующие медианы этих треугольников. Значит, $AH = HC = BE = ED$. Отрезок HE соединяет середины диагоналей трапеции, следовательно, $HE = \frac{AD - BC}{2}$, и прямые HE, AD и BC параллельны, поэтому, $BCEH$ — трапеция. Проведём HM — высоту трапеции $BCEH$ и AN — высоту трапеции $ABCD$. Прямоугольные треугольники ANC и HMC подобны, значит,

$$HM = AN \cdot \frac{HC}{AC} = AN \cdot \frac{HC}{2HC} = \frac{AN}{2}.$$

Площадь трапеции: $ABCD$ $S_1 = \frac{1}{2} AN \cdot (AD + BC)$.

Площадь трапеции: $BCEH$

$$S = \frac{1}{2} HM \cdot (BC + HE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AN \cdot \left(BC + \frac{AD - BC}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{8} AN \cdot (AD + BC) = \frac{1}{4} S_1 = 9.$$

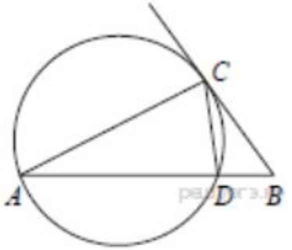
Ответ: 9.

Примеры решения задач

На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 40$, $BC = 34$ и $CD = 20$.

Решение.

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что $\angle\ BCD = \angle CAD = \angle CAB$, значит, треугольник ABC подобен треугольнику CBD по двум углам, причём коэффициент подобия равен $\dfrac{AC}{CD} = 2$ (см. рисунок). Тогда



$$AB = 2BC = 2 \cdot 34 = 68; \quad BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17.$$

Следовательно,

$$AD = AB - BD = 68 - 17 = 51.$$

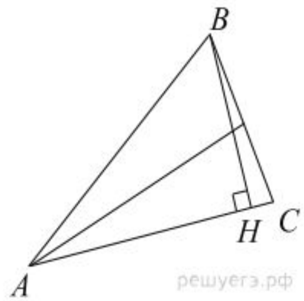
Ответ: 51.

Примеры решения задач

В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 6$.

Решение.

Обозначим BH высоту, проведённую из вершины B. Биссектриса, проведённая из угла A, делит высоту в отношении, равному отношению AB и AH. Значит $\cos\angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$, поэтому $\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$. По теореме синусов радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{6}{2\cdot 3}\cdot 5 = 5.$



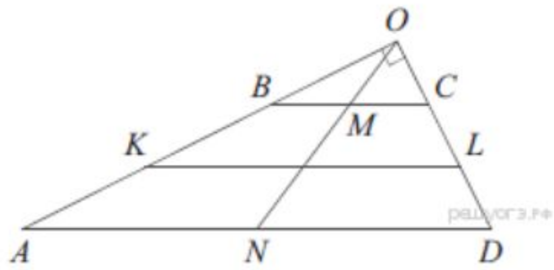
Ответ: 5.

Примеры решения задач

Углы при одном из оснований трапеции равны 47° и 43°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 16 и 14. Найдите основания трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$— данная трапеция, AD— большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна (47° + 43°) = 90°, так что это большее основание AD. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рис.). Легко видеть, что $\angle AOD = 180° - (47° + 43°) = 90°$.



Пусть N — середина основания AD. Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD. Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD и параллельный стороне AD, она пересекает основание BC также в его середине M.

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем, что $AD = MN + KL = 14 + 16 = 30;\ BC = KL - MN = 16 - 14 = 2.$

Ответ: 30; 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.
2. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 и 35, а основание BC равно 7. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.
3. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 36$, $AC = 48$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторо ну AC в точке D. Найдите CD.

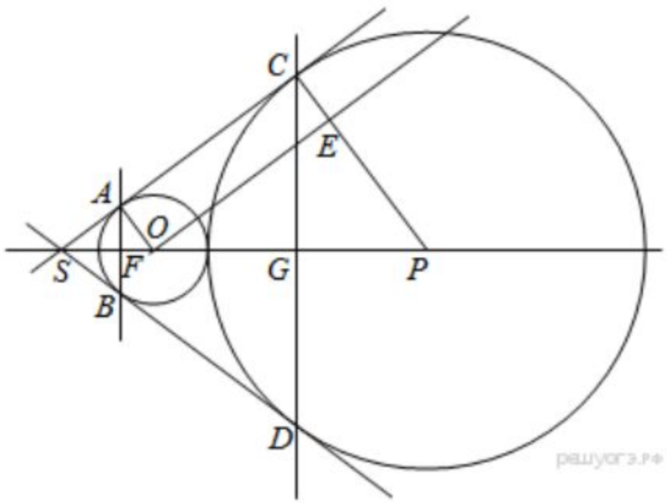
Задачи для самостоятельного решения

4. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5:3, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=8.

5. Углы при одном из оснований трапеции равны 39° и 51°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 19 и 3. Найдите основания трапеции.

Решение задачи №1

Введём обозначения как показано на рисунке. Проведём прямую OE, параллельную AC. Прямая AC — касательная к обеим окружностям поэтому радиусы OA и CP перпендикулярны прямой AC, откуда заключаем, что $AO \parallel CP$, откуда $EP \perp OE$. Рассмотрим четырёхугольник $ACEO$: $AO \parallel CP$, $AC \parallel OE$, следовательно, $ACEO$ — параллелограмм, откуда $AC = OE$, $AO = CE = 25$. Значит, $EP = CP - CE = 100 - 25 = 75$. Также заметим, что $OP = 25 + 100 = 125$. Углы SOA и SPC равны, как соответственные углы при параллельных прямых. Из треугольника OEP:



$$\cos\angle SPC = \frac{EP}{OP} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5}.$$

Из треугольника AFO: $FO = AO\cos\angle SOA = 25 \cdot \frac{3}{5} = 15.$

Из треугольника CPG: $GP = CP\cos\angle SPC = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60.$ Таким образом, получаем, что искомое расстояние:

$$FG = FP - GP = FO + OP - GP = 15 + 125 - 60 = 80.$$

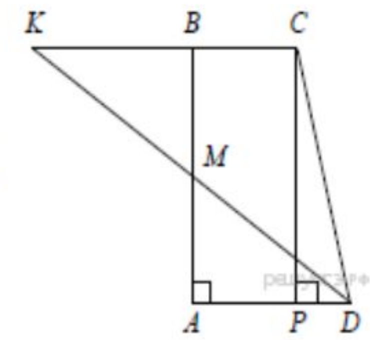
Ответ: 80.

Решение задачи №2

Пусть M — середина AB (см. рис.). Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K. Поскольку $\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK$, треугольник KCD равнобедренный, $KC = CD = 35$. Тогда $KB = KC - BC = 35 - 7 = 28$.

Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что $AD = BK = 28$. Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P. Треугольник CPD прямоугольный, так как $CD^2 = 35^2 = 28^2 + 21^2 = PC^2 + PD^2$.

Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

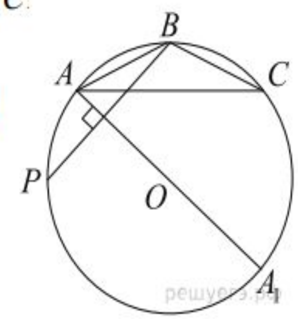


$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = 490.$$

Ответ: 490.

Решение задачи №3

Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна диаметру AA_1 этой окружности. Значит, точка A — середина дуги BP , не содержащей вершину C. Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий).



Следовательно,

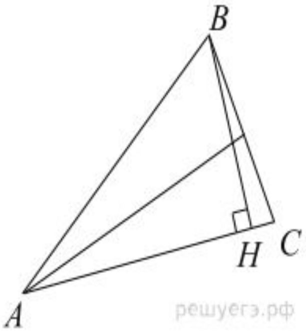
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \text{ откуда } AD = \frac{AB^2}{AC} = 27 \text{ и } CD = AC - AD = 48 - 27 = 21.$$

Ответ: 21.

Решение задачи №4

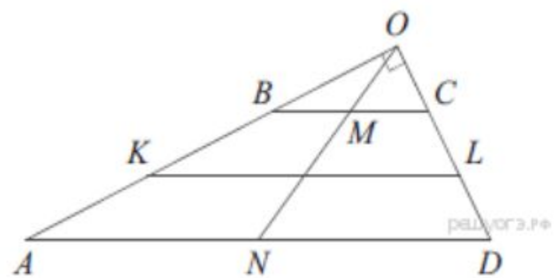
Обозначим BH высоту, проведённую из вершины B. Биссектриса, проведённая из угла A, делит высоту в отношении, равному отношению AB и AH. Значит $\cos\angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$, поэтому $\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$. По теореме синусов радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{6}{2\cdot 3}\cdot 5 = 5.$

Ответ: 5.



Решение задачи №5

Пусть $ABCD$— данная трапеция, AD— большее основание, K и L — середины сторон ABи CDсоответственно. Сумма углов при одном из оснований равна (39° + 51°) = 90°, так что это большее основание AD. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рис.). Легко видеть, что $\angle AOD = 180° - (39° + 51°) = 90°$.



Пусть N — середина основания AD. Тогда ON = — медиана прямоугольного треугольника AOD. Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DOтреугольника AODи параллельный стороне AD, она пересекает основание BC также в его середине M.

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем, что $AD = MN + KL = 3 + 19 = 22;\ BC = KL - MN = 19 - 3 = 16.$

Ответ: 22; 16.