

# ЗАДАЧИ.

1. **Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды  $SABC$  равна 6. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45 градусов. Найти боковое ребро.**
2. **Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 12, а высота  $\sqrt{94}$ . Найти сторону основания пирамиды.**



3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$ ,  $Q$ -середина  $AB$ ,  $S$ -вершина,  $BC = 7$ , а площадь боковой поверхности пирамиды 42. Найти  $SQ$ .

4. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ ,  $O$ - центр основания,  $S$ - вершина,  $SO=8$ ,  $BD=30$ . Найти  $SC$ .



**3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна 4, объём пирамиды равен 6. Найти  $SO$ .**



**4. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 куб.м. и погрузили в воду деталь. Уровень воды поднялся с 20 см до 22 см. Найти объём детали.**

**5. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 9. Боковые рёбра  $1\sqrt{2}$ . Найти объём цилиндра, описанного около призмы.**



- 6. Диагональ куба равна 3. Найти площадь его поверхности.**
- 7. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящий из одной вершины равны 4, 6, 9. Найти ребро равновеликого куба.**
- 8. Найти объём правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равны 1, а боковые рёбра  $\sqrt{3}$ .**



9. Прямая призма, в основании ромб  $ABCD$  с острым углом  $B$   $30$  градусов. Сторона ромба равна высоте призмы.  $F$  середина  $BB_1$ ,  $M$  середина  $CC_1$ . Найти угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через  $AD$  и точки  $F, M$ .
10. В правильной шестиугольной призме  $AB\dots$  все рёбра  $2$ . Найти расстояние от  $B$  до прямой  $A_1F_1$ .



**11. В правильной четырёхугольной призме  $AB...$  сторона основания 2, а боковое ребро 3. Найти угол между прямыми  $AC_1$  и  $BA_1$ .**



**1. В правильной треугольной призме  $ABC...$**

**$AB = 6$ ,  $AA_1 = 4$ . Найти площадь сечения, проходящего через  $A, B$ , середину  $A_1C_1$ .**

**2. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$ , боковое ребро  $SA = 5$ ,  $AB = 4$ . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через  $AB$ , перпендикулярно  $SC$ .**

**3. В прав. шестиугольной пирамиде боковое ребро  $10$ , высота  $6$ , вписана сфера. Найти площадь сферы.**





- 1. Радиус основания конуса 5, высота 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. найти расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.**
- 2. В кубе  $ABCD\dots$  все рёбра 1. Найти расстояние от точки  $C$  до  $BD_1$ .**
- 3. В правильном тетраэдре  $ABCD$  найти угол между высотой тетраэдра  $DO$  и медианой  $BM$  боковой грани  $BSC$ .**



- ▣ В прямоугольном параллелепипеде известны рёбра  $AB=5, AD=4, AA_1=9$ . Точка  $O$  принадлежит ребру  $BB_1$  и делит его в отношении  $4:5$ , считая от вершины. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки  $A, O$  и  $C_1$ .
- В правил. шестиугольной призме  $ABCDEF\dots$  все рёбра  $2$ . Найти расстояние от точки  $B$  до прямой  $A_1F_1$ .



- 1 вариант. Боковое ребро  $MA$  пирамиды  $MBC$  перпендикулярно плоскости основания и равно 13. угол  $BAC = 90^\circ$ .  $AB = 39$ .  $AC = 52$ . Найти расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BMC$ .
- 2 вариант. Основание прямой призмы  $ABC_1D_1$ ... ромб  $ABCD$ , в котором  $AB = 10$ ,  $AC = 6\sqrt{7}$ . Боковое ребро  $AA_1 = 3\sqrt{21}$ . Найти расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ .



1. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , сторона основания 4,  $K$ -середина ребра  $SB$ . Тангенс угла между  $СК$  и  $SD$  равен  $2\sqrt{\frac{2}{17}}$ . Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Все боковые грани прав. четырёхугольной пирамиды правильные треугольники. Расстояние от центра боковой грани до плоскости основания пирамиды равно « $b$ ». Определить объём пирамиды.



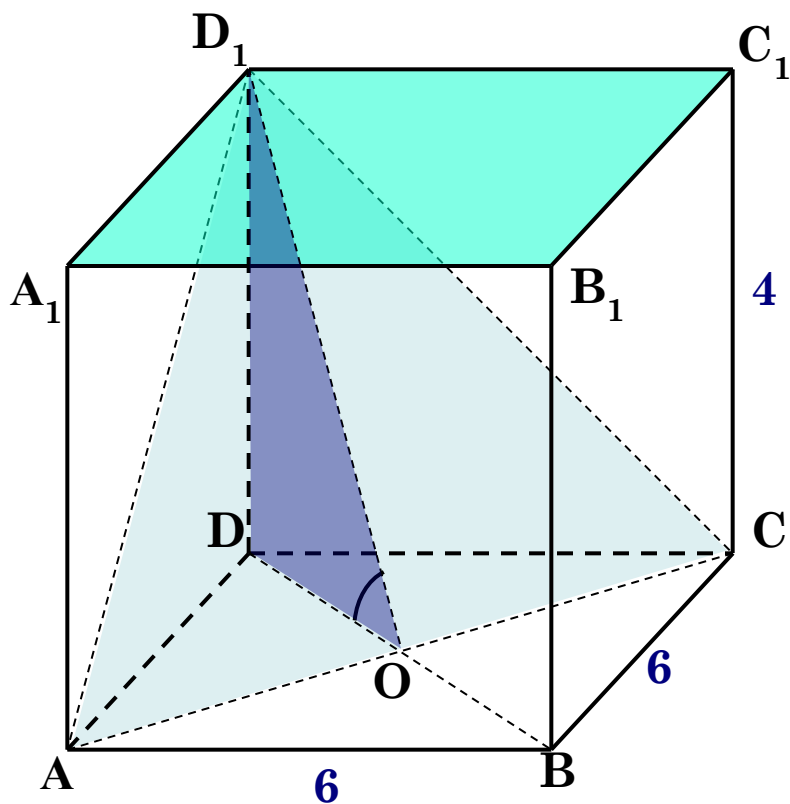
**3. Отрезок  $AC$  – диаметр основания конуса.  
Отрезок  $AP$  – образующая,  $AP=AC$ . Хорда  
основания  $BC$  составляет с  $AC$  угол  $60$  градусов.  
Через  $AP$  проведено сечение конуса плоскостью  
параллельно прямой  $BC$ . Найти расстояние от  
центра основания конуса  $O$  до плоскости сечения,  
если радиус основания конуса равен  $1$ .**



№  
2

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , у которого  $AB = 6$ ,  $BC = 6$ ,  $CC_1 = 4$ , найдите тангенс угла между плоскостями  $ACD_1$  и  $A_1 B_1 C_1$ .

Решение.



Ответ:  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

1) Построим плоскость  $ACD_1$ .

2) Вместо плоскости  $A_1 B_1 C_1$  возьмем параллельную ей плоскость  $ABC$ .

3)  $ABCD$  – квадрат, диагонали  $AC \cap BD$  в точке  $O$ ,  $O$  – середина  $AC$ ,  $DO \perp AC$ .

$$DO = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AD^2 + DC^2} = 3\sqrt{2}.$$

4)  $D_1 O \perp AC$ , так как  $\triangle AD_1 C$  – равнобедренный,  $AD_1 = D_1 C$ .

5) Значит,  $\angle D_1 O D$  – линейный угол искомого угла.

6)  $\triangle D_1 D O$  – прямоугольный, тогда

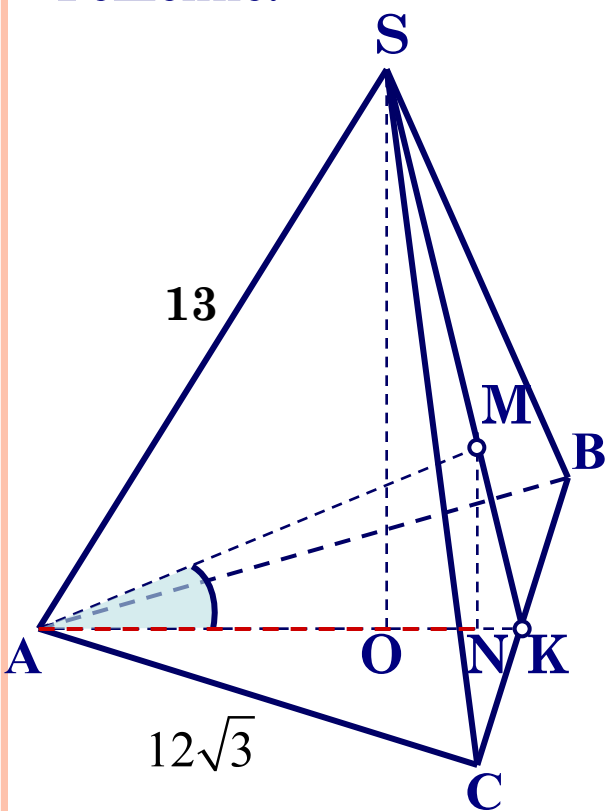
$$\operatorname{tg}(\angle D O D_1) = \frac{DD_1}{DO} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



№  
1

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  известны ребра:  $AB = 12\sqrt{3}$ ,  $SC = 13$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой  $AM$ , где  $M$  точка пересечения медиан грани  $SBC$ .

Решение.



Пусть  $K$  – середина ребра  $BC$ .

Прямая  $SK$  – апофема.

Прямая  $SO$  – высота пирамиды.

$M$  – точка пересечения медиан грани  $SBC$ , поэтому  $SM:MK = 2:1$ .

Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MN$ , тогда отрезок  $AN$  – проекция отрезка  $AM$  на плоскость основания.

Угол  $MAN$  – искомый.

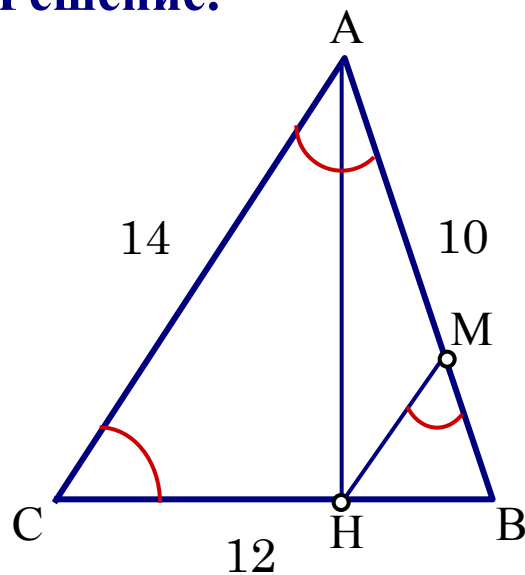
Его можно найти из прямоугольного треугольника  $MAN$ .



№  
2

Точка  $H$  – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку  $H$  проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке  $M$ . Найдите  $HM$ .

**Решение.**



Пусть  $AB = 10$ ,  $BC = 12$ ,  $AC = 14$ .

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{100 + 144 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{5}.$$

$\triangle ABH$  – прямоугольный,  $BH = AB \cdot \cos B = 2$ .

По условию  $\triangle ABC \sim \triangle HBM$ , и имеют общий угол  $B$ , значит возможны два случая.

**1 случай.**  $\angle BMH = \angle BAC$ ;  $k = \frac{BH}{BC} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ ,

значит,  $HM = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 14 = \frac{7}{3}$ .

$k = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ , значит,  $HM = \frac{1}{5} \cdot AC = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$ .

**2 случай.**  $\angle BMH = \angle ACB$ ;

**Ответ:**  $\frac{7}{3}$  или  $\frac{14}{5}$ .



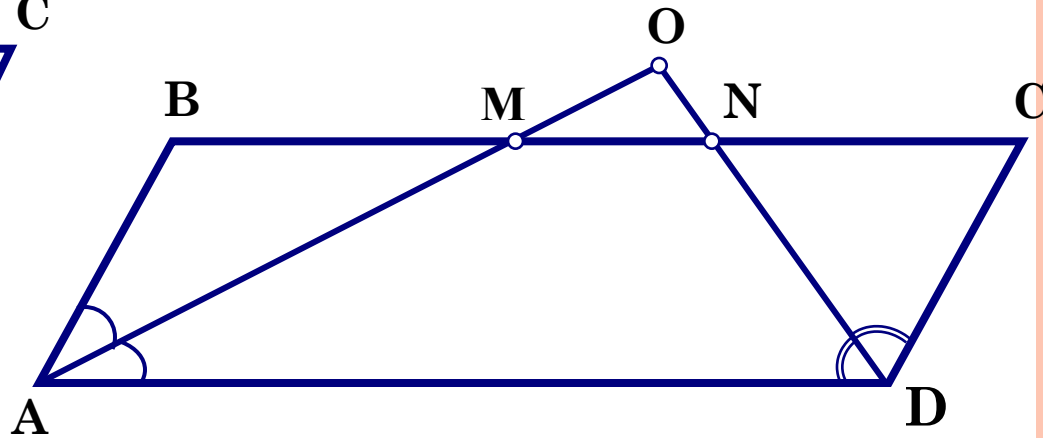
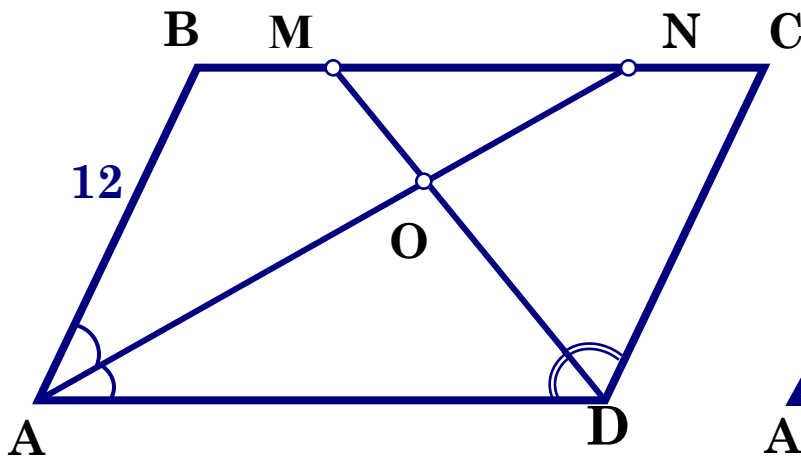


№  
4

В параллелограмме  $ABCD$   $AB=12$ , биссектрисы углов при стороне  $AD$  делят сторону  $BC$  точками  $M$  и  $N$ , так что  $BM:MN=1:7$ . Найдите  $BC$ .

**Решение.** Пусть  $O$  – точка пересечения биссектрис.

По условию  $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$ , значит  $M$  лежит между точками  $B$  и  $N$ .



Возможны два случая.

- 1) точка  $O$  – лежит внутри параллелограмма;
- 2) точка  $O$  – лежит вне параллелограмма.

Рассмотрим первый случай.

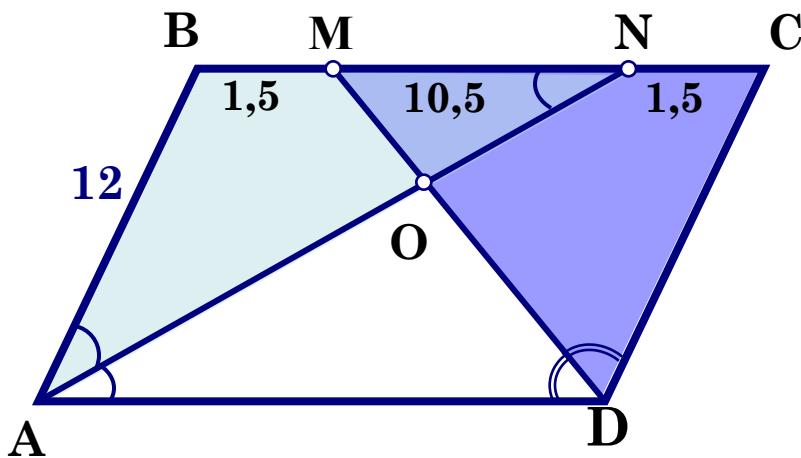


№  
4

В параллелограмме  $ABCD$   $AB=12$ , биссектрисы углов при стороне  $AD$  делят сторону  $BC$  точками  $M$  и  $N$ , так что  $BM:MN=1:7$ . Найдите  $BC$ .

**Решение.** Пусть  $O$  – точка пересечения биссектрис.

По условию  $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$ , значит  $M$  лежит между точками  $B$  и  $N$ .



1)  $\triangle ABN$  – равнобедренный, т.к.

$\angle BNA = \angle NAD$  – накрест лежащие;

$AN$  – биссектриса  $\angle A$ ,

значит  $\angle BNA = \angle BAN$  и

$AB = BN = 12$ ,  
тогда  $BM = \frac{1}{8} BN = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1,5$ .

Найдем  $MN = BN - BM = 12 - 1,5 = 10,5$ .

2) Аналогично,  $\triangle DMC$  – равнобедренный,  $MC = DC = 12$ .

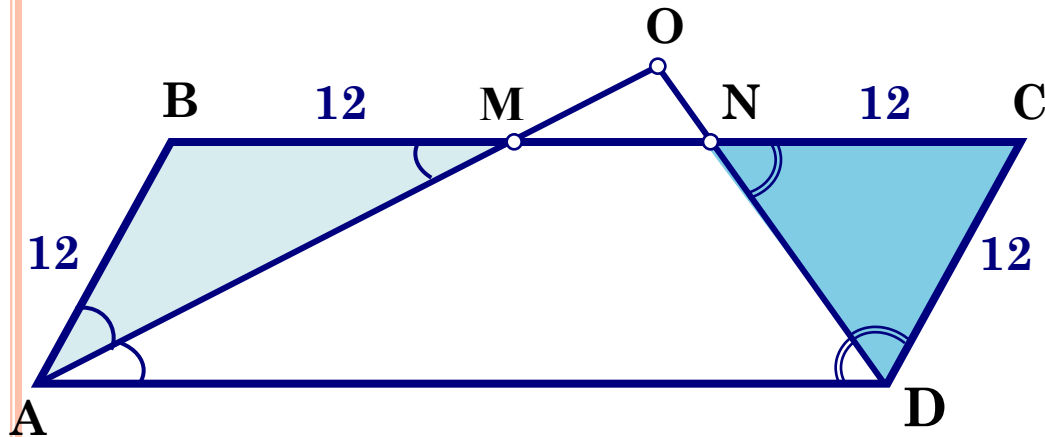
Тогда  $NC = MC - MN = 12 - 10,5 = 1,5$ .

3) В итоге,  $BC = BM + MN + NC = 13,5$ .

№  
4

В параллелограмме  $ABCD$   $AB=12$ , биссектрисы углов при стороне  $AD$  делят сторону  $BC$  точками  $M$  и  $N$ , так что  $BM:MN=1:7$ . Найдите  $BC$ .

**Решение.** Рассмотрим второй случай:  
точка  $O$  – лежит вне параллелограмма.



1)  $\triangle ABM$  – равнобедренный, т.к.  
 $\angle BMA = \angle MAD$  – накрест лежащие;  
 $AM$  – биссектриса  $\angle A$ ,  
значит  $\angle BMA = \angle BAM$ .  
Тогда  $AB = BM = 12$ .

По условию  $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7}$ , значит  $BM = \frac{1}{8}BN, \Rightarrow BN = 8 \cdot 12 = 96$ .

2) Аналогично  $\triangle DNC$  – равнобедренный, тогда  $NC = DC = 12$ .

3) Значит,  $BC = BN + NC = 96 + 12 = 108$ .

**Ответ: 13,5 или 108.**

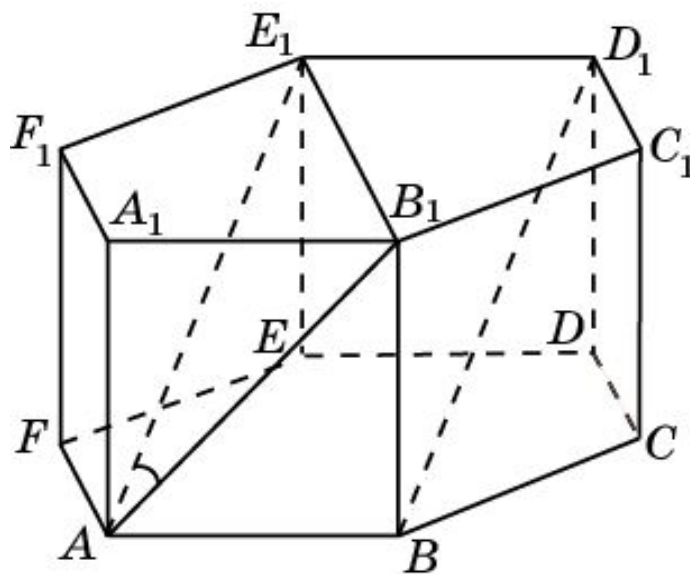




**Решение 1.** Прямая  $AE_1$  параллельна прямой  $BD_1$ . Угол  $\varphi$  между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$  равен углу  $B_1AE_1$ . В треугольнике  $B_1AE_1$  имеем:  $AB_1 = \sqrt{3}$ ,  $AE_1 = \sqrt{2}$ ,  $B_1E_1 = \sqrt{2}$ .

Применяя теорему косинусов, получим

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



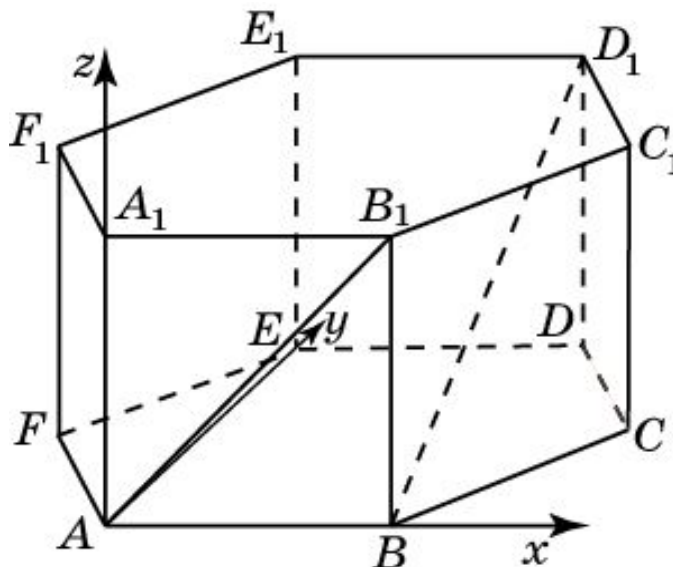
**Решение 2.** Введем систему координат, считая началом координат точку  $A$ , точка  $B$  имеет координаты  $(1, 0, 0)$ , точка  $A_1$  имеет координаты  $(0, 0, 1)$ . Тогда точка  $D_1$  имеет координаты  $(1, 1, 1)$ . Вектор  $\vec{AB}_1$  имеет координаты  $(1, 0, 1)$ , вектор  $\vec{BD}_1$  имеет координаты  $(0, 1, 1)$ . Воспользуемся формулой

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

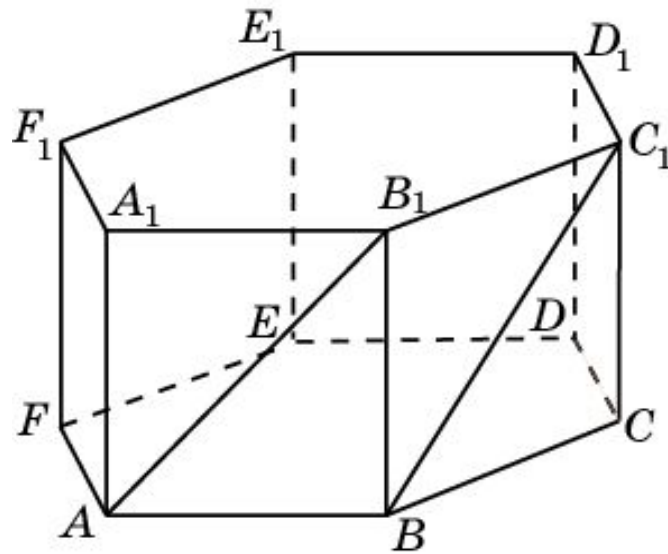
выражающий косинус угла между векторами через их скалярное произведение и длины. Имеем  $\vec{AB}_1 \cdot \vec{BC}_1 = 1$  следовательно, косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен

$$|\vec{BD}_1| = 2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$



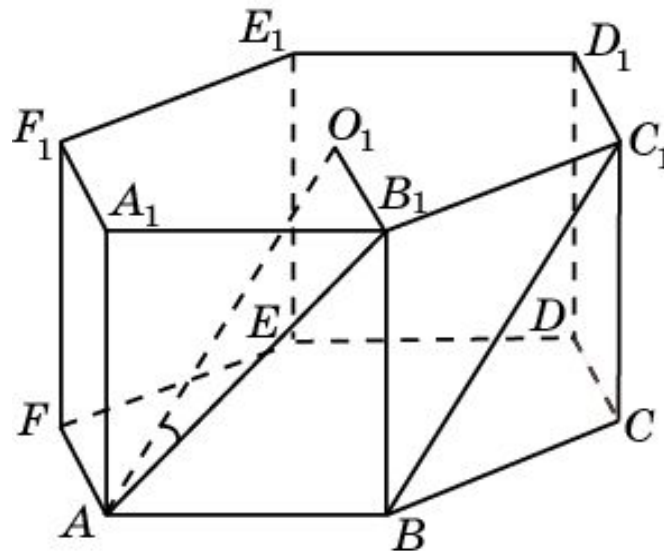
**Задача 1.** В правильной шестиугольной призме  $A \dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .



**Решение 1.** Пусть  $O_1$  – центр правильного шестиугольника  $A_1 \dots F_1$ . Тогда прямая  $AO_1$  параллельна прямой  $BC_1$ , и искомый угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  равен углу  $B_1AO_1$ . В равнобедренном треугольнике  $B_1AO_1$  имеем:  $O_1B_1 = 1$ ;  $AB_1 = AO_1 =$

$\sqrt{3}$ . Применяя теорему косинусов, получим .

$$\cos \varphi = \frac{3}{4}$$





# В 1.

- 1. С.А. купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 42 мили в час? Ответ округлите до целого числа.**
- 2. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 3 рубля 08 копеек. 1 ноября счётчик показывал 32544 к/час, а 1 декабря 32726 к/час. Сколько надо заплатить за ноябрь?**



- 3. В обменном пункте 1 украинская гривна стоит 3 рубля 70 копеек. Отдыхающие обменяли рубли на гривны и купили 3 кг помидоров по цене 4 гривны за 1 кг. Во сколько рублей обошлась им эта покупка? Ответ округлите до целого числа.**
- 4. Клиент взял в банке кредит 48000 рублей под 14% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?**



**5. Среди 40000 жителей города 60% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 80% смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?**

**6. В июне 1 кг помидоров стоил 80 рублей. В июле цена понизилась на 40%, а в августе ещё на 50%. Сколько рублей стоил 1 кг в августе?**



**7. Чтобы связать свитер нужно 800 гр шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по 60 рублей за 100 гр, а можно купить неокрашенную по цене 50 рублей за 100 гр и окрасить её. Один пакетик краски стоит 50 рублей и рассчитан на 400 гр пряжи. Какой вариант дешевле? В ответе сколько рублей.**



- 1. В детском саду на каждого ребёнка полагается 40 гр сахара в день. В саду 121 ребёнок. Сколько килограммовых упаковок сахара понадобится на 7 дней?**
- 2. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 14 дней. В одной упаковке 20 таблеток по 0,5 г. Какое наименьшее количество упаковок надо?**
- 3. Даша отправила SMS- сообщения своим 16 друзьям. Стоимость 1 сообщения 1 рубль 30 копеек. Перед отправкой на счёте оставалось 30 рублей. Ск рублей останется...?**



- 4. Магазин закупает учебники по оптовой цене 110 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%.  
Какое наибольшее число таких учебников можно купить на 1200 рублей?**
- 5. Рубашка стоила 440 рублей. После снижения цены она стала стоить 396 рублей. На сколько процентов была снижена цена?**
- 6. Пирожок стоит 12 рублей. При покупке более 30 пирожков скидка 5% от стоимости всей покупки. Купили 40 пирожков. Сколько заплатили за покупку?**



# В - 13

- ❏ 1. Зависимость температуры от времени для нагревательного элемента была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур даётся выражением  $T(t) = T_0 + at + bt^2$ , где  $T_0 = 520 \text{ К}$ ,  $a = 22 \text{ К/мин}$ ,  $b = -0,2 \text{ К/мин}$ . Известно, что при нагревании выше  $1000 \text{ К}$  прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор.



**2. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна  $P = m(\frac{v^2}{L} - g)$ , где  $m$  – масса воды в кг,  $v$  – скорость движения ведёрка в м/с,  $L$  – длина верёвки в метрах,  $g = 10 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 0,4 м?**





3. Мяч бросили под острым углом  $\alpha$  к плоскости горизонта. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком наименьшем значении угла  $\alpha$  (градусах) время полёта будет не меньше 1,7 с, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 17$  м/с?  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



4. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий  $\nu = 2$  моля воздуха при давлении  $p_1 = 1,5$  атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая при сжатии воздуха, определяется выражением  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$  (Дж), где  $\alpha = 5,75$  – постоянная.  $T = 300$  К – температура воздуха,  $p_1$  – начальное давление, а  $p_2$  – конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления  $p_2$  можно сжать воздух в колоколе. Если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж?



5. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону  $H(t) = 5 - 1,6t + 0,128t^2$ , где  $t$  – время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

