Дробный Факторный Эксперимент

Метод перевала

Построение матрицы дробных факторных экспериментов

- Пусть необходимо найти коэффициенты полинома
- $y=b_o+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$
- Если использовать ПФЭ, то при наличии трех факторов число опытов равно $2^3=8$, но в тоже время для определения 4-х коэффициентов достаточно выполнить 5 опытов. Чтобы сократить число опытов по сравнению с ПФЭ используют дробный факторный эксперимент ДФЭ.
- Матрица ДФЭ предоставляет собой основу матрицы ПФЭ, но с меньшим числом факторов планируемого эксперимента. Остальные факторы, не вошедшие в основу плана, определяются в виде произведения факторов основы плана.

Построение матрицы дробных факторных экспериментов

	Уровни факторов		
	x_1	x_2	x_3
1	-	-	+
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	+

$$x_3 = x_1 x_2$$

Число опытов в ДФЭ

- Произведение факторов, определяющие уровни факторов не вошедшие в основу плана называют генерирующим соотношением или генератором ДФЭ.
- Матрицы позволяют дробными репликами.
- Если один фактор определяется с помощью генератора, то число опытов сокращается в 2 раза, если два фактора - то в 4 раза. В общем случае число опытов сокращается в 2^m раз, где m – число факторов определяемых с помощью генераторов.
- Число опытов в ДФЭ $n=2^{k-m}$, k- общее число опытов.

Выбор генераторов для дробных реплик x_4=?????

$x_4=x_1x_2$ $x_4=x_2x_3$ $x_4=x_1x_3$ $x_4=x_1x_2x_3$

Номер опыта	Уровни факторов			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	+	+	+	+
2	-	+	+	-
3	+	-	+	-
4	-	-	+	+
5	+	+	-	-
6	-	+	-	+
7	+	-	-	+
8	-	-	-	-

Свойства ПФЭ и ДФЭ

- Симметричность относительно центра эксперимента, т.е. алгебраическая сумма элементов вектора столбца равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0$$

- Условие нормировки: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N$$

- Ортогональность: сумма почленных произведений любых двух векторов столбцов матрицы равна нулю

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \cdot x_{iu} = 0$$

- Ротатабельность: точки в матрице планирования подбираются так, чтобы точность предсказания значений параметра оптимизации была одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависела от направления.

Обозначение дробных реплик

Число факторов	Дробная реплика	Обозначения	Дробный факторный эксперимент	Число опытов ПФЭ
3	½ реп. 2^3	2^{3-1}	4	8
4	½ реп. 2^4	2^{4-1}	8	16
5	¼ реп. 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8 реп. 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16 реп. 2^7	2^{7-4}	8	128
5	½ реп. 2^5	2^{5-1}	16	32
6	¼ реп. 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8 реп. 2^7	2^{7-3}	16	128
12	1/256 реп. 2^{12}	2^{12-8}	16	4096
15	1/2048 реп. 2^{15}	2^{15-11}	16	32768

Принцип создания дробной реплики

- Рассмотрим модель без третьего фактора:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

- Если мы считаем, что уравнение линейно, то , а вектор столбец можно использовать для нового фактора . Однако в данном случае не будет раздельных оценок, которые были в полном факторном эксперименте. Оценки будут смешиваться следующим образом:

$$b_1 \to (\beta_1 + \beta_{23})$$
$$b_2 \to (\beta_2 + \beta_{13})$$
$$b_3 \to (\beta_3 + \beta_{12})$$

- В том случае, если предположение о линейности верно, то $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23} \to 0$ Таким образом можно поставить четыре опыта для оценки влияния трех факторов. Для оценки смешивания мы воспользовались половиной полного факторного эксперимента, 2^3 или полу репликой. Если бы мы приравняли $x_3 = -x_1 x_2$, то получили бы вторую половину полного факторного эксперимента. В этом случае:

$$b_1 \to (\beta_1 - \beta_{23})$$
$$b_2 \to (\beta_2 - \beta_{13})$$
$$b_3 \to (\beta_3 - \beta_{12})$$

- При реализации обеих полу реплик можно получать раздельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия.

ГЕНЕРИРУЮЩЕЕ СООТНОШЕНИЕ

- При построении полу реплики 2^{3-1} x^3 можно прировнять $+(x_1x_2)$ или $-(x_1x_2)$. Тогда для произведения трех столбцов матрицы будет выполняться следующее:

$$\left.\begin{aligned} +1 &= x_1x_2x_3 \\ -1 &= x_1x_2x_3 \end{aligned}\right\}$$

- Это - определяющий контраст или символическое обозначение произведения столбцов, равное ±1.
- Получаем из

$$x_3 = x_1x_2 \qquad 1 = x_3^2 \qquad 1 = x_1x_2x_3$$

Обобщающий определяющий контраст

- Соотношение, показывающее с каким из эффектов смешан данный эффект называется *генерирующим соотношением*.
- Эффективность реплики зависит от системы смешивания. Реплики, у которых линейные эффекты смешены с взаимодействиями высшего порядка, являются более эффективными, т.к. обладают максимальной разрешающей способностью.
- С ростом числа факторов быстро увеличивается число реплик различной дробности. Эти реплики характеризуются *обобщающими определяющими контрастами*, которые получаются перемножением по два, по три исходных определяющих контраста.

Эксперимент 2^{4-1}

- Определелим систему смешения x_4
- Пусть определяющий контраст $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$
- Тогда система смешения факторов

$$x_1 = x_2 x_3 x_4 \qquad (x_1^2 = 1)$$
$$x_2 = x_1 x_3 x_4$$
$$x_3 = x_1 x_2 x_4$$
$$x_4 = x_1 x_2 x_3$$

Таким образом:

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{234}$$
$$b_2 \to \beta_2 + \beta_{134}$$
$$b_3 \to \beta_3 + \beta_{124}$$
$$b_4 \to \beta_4 + \beta_{123}$$

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 \qquad b_{12} \to \beta_{12} + \beta_{34}$$
$$x_1 x_3 = x_2 x_4 \qquad b_{13} \to \beta_{13} + \beta_{24}$$
$$x_1 x_4 = x_2 x_3 \qquad b_{14} \to \beta_{14} + \beta_{23}$$

Эксперимент 2^{5-1}

- Возможны 22 решения для выбора определяющего контраста
- определяющий контраст. $1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

$$x_1 = x_2 x_3 x_4 x_5 \qquad b_1 \to \beta_1 + \beta_{2345}$$

$$x_2 = x_1 x_3 x_4 x_5 \qquad b_2 \to \beta_2 + \beta_{1345}$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_4 x_5 \qquad b_3 \to \beta_3 + \beta_{1245}$$

$$x_4 = x_1 x_2 x_3 x_5 \qquad b_4 \to \beta_4 + \beta_{1235}$$

$$x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 \qquad b_5 \to \beta_5 + \beta_{1234}$$

План 2^{5-2} (достаточно 16 опытов)

- Пусть $x_4=x_1x_3$, $x_5=x_1x_2x_3$, тогда определяющие контрасты будут:
$1 = x_1x_3x_4$ и $1 = x_1x_2x_3x_5$ Перемножив получим $1 = x_2x_4x_5$

- Чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность реплики, необходимо записать *обобщающий определяющий контраст*: $1 = x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5$

- Система смешивания определяется умножением обобщающего определяющего контраста на и т.д.

$$x_1 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5 \qquad b_1 \to \beta_1 + \beta_{34} + \beta_{1245} + \beta_{235}$$
$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_5 \qquad b_2 \to \beta_2 + \beta_{1234} + \beta_{45} + \beta_{135}$$
$$x_3 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5 \qquad b_3 \to \beta_3 + \beta_{14} + \beta_{2345} + \beta_{125}$$
$$x_4 = x_1x_3 = x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 \qquad b_4 \to \beta_4 + \beta_{13} + \beta_{25} + \beta_{12345}$$
$$x_5 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4 = x_1x_2x_3 \qquad b_5 \to \beta_5 + \beta_{1345} + \beta_{24} + \beta_{123}$$

- Если получилось, что $b_{12} \neq 0$ $\qquad b_{12} \to \beta_{12} + \beta_{234} + \beta_{145} + \beta_{35}$

Метод перевала

- Если возникают сомнения: можно ли пренебрегать парными взаимодействиями, тогда следует поставить вторую серию опытов и выбрать другую ¼ реплики.
- При этом можно воспользоваться методом перевала. Смысл этого метода заключается в том, что вторая четверть реплики получается из первой путем изменения всех знаков матрицы на обратные.

1). $x_4 = -x_1x_3 \qquad x_5 = x_1x_2x_3$

$$1 = -x_1x_3x_4 = x_1x_2x_3x_5 = -x_2x_4x_5$$

$$x_1 = -x_3x_4 = x_2x_3x_5 = -x_1x_2x_4x_5$$

$$b_1 \to \beta_1 - \beta_{34} + \beta_{235} - \beta_{1245}$$

$$b_1^{\Sigma} \to \beta_1 + \beta_{235}$$

$$x_2 = -x_1x_2x_3x_4 = x_1x_3x_5 = -x_4x_5$$

$$b_2 \to \beta_2 - \beta_{123} + \beta_{135} - \beta_{45}$$

$$b_2^{\Sigma} \to \beta_2 + \beta_{135} \ ,$$

2). $x_4 = x_1x_3 \qquad x_5 = -x_1x_2x_3$

$$1 = x_1x_3x_4 = -x_1x_2x_3x_5 = -x_2x_4x_5$$

$$x_1 = x_3x_4 = -x_2x_3x_5 = -x_1x_2x_4x_5$$

$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = -x_1x_3x_5 = -x_4x_5$$

$$x_3 = x_1x_4 = -x_1x_2x_5 = -x_2x_3x_4x_5$$

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{34} - \beta_{235} - \beta_{1245}$$

$$b_1^{\Sigma} \to \beta_1 + \beta_{34}$$

$$b_2^{\Sigma} \to \beta_2 + \beta_{1234}$$

$$b_3^{\Sigma} \to \beta_3 + \beta_{14}$$

$$b_4^{\Sigma} \to \beta_4 + \beta_{13}$$

$$b_5^{\Sigma} \to \beta_5 + \beta_{1345}$$