ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ НА ТЕМУ: «ИЗУЧЕНИЕ НАУЧНЫХ ПРОБЛЕМ, РЕШЕННЫХ ВЕЛИКИМ ШВЕЙЦАРСКИМ МАТЕМАТИКОМ ЛЕОНАРДОМ ЭЙЛЕРОМ»

Работу выполнил студент 1 курса

Группы 21-СПО-ИСиП-04

Широкобородов Григорий Вячеславович

РУКОВОДИТЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ПРОЕКТА:

Веденяпина Евгения Ивановка

Целью написания индивидуального проекта является найти и показать проблемы решенные великим швейцарским математиком Леонардом Эйлером

Задачи работы:

- Изучить работы Эйлера

-Узнать о его способе обобщения Теоремы Ферма

-Узнать Формулу Эйлера

-Посмотреть на способ решения задачи о семи Кёнигсбергских мостах

-Проанализировать полученные результаты; сделать выводы по работе.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

- Этот великий ученый несомненно являлся центральной фигурой в науке XVIII столетия
- Научная деятельность Эйлера продолжалась без перерыва почти шестьдесят лет. С 1726 г. по 1783 г. он вел исследования во всех областях математики и механики XVIII в., а кроме того, во многих отделах астрономии, физики и техники. Его перу принадлежит около 850 научных трудов, среди них примерно два десятка объемистых монографий в одном двух и трех томах.
- В задачах практики рождались стимулы и для многих теоретических исследований Эйлера, которые составляли главный предмет его неустанных размышлений.
- Частью еще в Базеле, но главным образом в первые годы жизни в Петербурге Эйлер наметил обширную программу исследований по математике и механике, которую успешно осуществлял, постоянно ее дополняя, до самых последних дней. Открытия его, печатавшиеся в академических «Записках» со второго их тома за 1727 г. (1729) и нередко получавшие известность еще до публикации благодаря его научной переписке, вскоре привлекли внимание ученого мира Европы.

Задача о колебаниях струны

- Уже через год после появления первых работ Даламбера о струне Эйлер опубликовал статью «О колебании струны» (Sur la vibration descordes. Mem. Ac. Berlin, (1748) 1750), существенно углубившую анализ проблемы, о чем будет сказано далее.

- В только что названной статье Эйлер сначала выводит уравнение
- У(t,x) = φ (t + x) + ψ(t - x) (1) колебания струны. Затем он формулирует требование отыскания общего решения этого уравнения при произвольно заданной фигуре струны. О начальной скорости струны прямо не говорится, но из дальнейших выкладок вытекает, что она считается равной нулю. При этих условиях Эйлер нашел решение, которое, по его собственному признанию, по форме существенно не отличается от решения Даламбера. Эйлер решил уравнение (1) при любом постоянном a, и потому его решение имеет вид
  y = φ (x + at) + ψ(x - at), (2)
  где φ и ψ - функции, определяемые из граничных и начальных условий задачи так же, как это сделано у Даламбера.
- В 1766 г. Эйлер предложил новый метод решения уравнения колебании струны, вошедший затем в третий том его «Интегрального исчисления» (1770), а позднее - во все учебники по дифференциальным уравнениям. Вводя новые координаты:
- u= x + at, v = x - at,
  он преобразовал уравнение (1) колебания струны к легко интегрируемому виду

ОБОБЩЕНИЕ ЭЙЛЕРОМ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

В последней статье Эйлер обобщил теорему Ферма, установив (в обозначениях, ведущих свое происхождение от Гаусса), что

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$,

где φ(m) есть число чисел, взаимно простых с m и меньших m. Встречающееся здесь число φ (m), которое по предложению Гаусса называют теперь «функцией Эйлера», последний представил в той же работе в виде

$\varphi(m)=m(1-1/p)(1-1/p')\ldots$,

где p, p′,… - простые делители числа m. Если m само есть простое число, то числа 1, 2, 3,..., (p - 1) будут с ним взаимно простыми, и получается важная теорема, высказанная Дж. Вильсоном и опубликованная в 1770 Варингом в его «Алгебраических размышлениях». Теорема эта гласит, что величина 1*2*3... (p-1)+1 делится без остатка на p, где p, как и всюду здесь, - простое число. Эта теорема, как и теорема Ферма, заключается в установленном Лагранжем общем сравнении

$x^{p-1} - 1 \equiv (x + 1)(x + 2)\ldots(x + p - 1) \pmod{p}$

при x = 0. Она была также доказана Эйлером («Аналитические сочинения», I, 1783) и Гауссом («Арифметические исследования», 1801). Упрощенное доказательство теоремы Ферма дал еще И.Г. Ламберт, охотно занимавшийся и теорией чисел

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА НАЗВАНА В ЧЕСТЬ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА, КОТОРЫЙ ЕЁ ВВЁЛ, И СВЯЗЫВАЕТ КОМПЛЕКСНУЮ ЭКСПОНЕНТУ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА УТВЕРЖДАЕТ, ЧТО ДЛЯ ЛЮБОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА X ВЫПОЛНЕНО СЛЕДУЮЩЕЕ РАВЕНСТВО:

$$e^{ix} = \cos x + i*\sin x$$

где e - основание натурального логарифма, i - мнимая единица.

Тривиально доказывается с использованием ряда Маклорена из начала данной работы:

Но

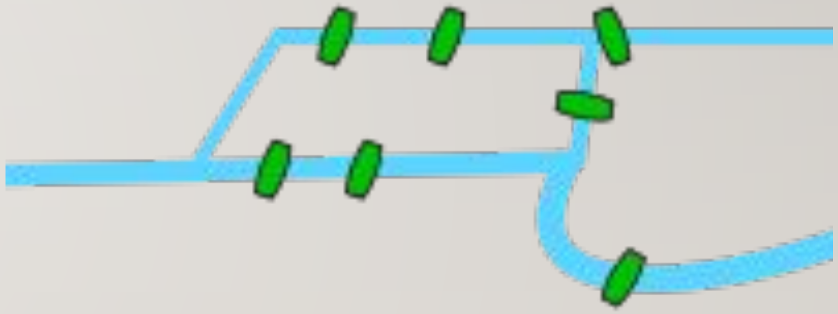
Откуда $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, что и требовалось доказать

Формула Эйлера впервые была приведена в книге «Гармония мер» английского математика, помощника Ньютона, Роджера Котса (1722 год, издана посмертно). Котс открыл формулу около 1714 года и выразил её в логарифмической форме:

$\ln(\cos x + i\sin x) = ix$

ЗАДАЧА О СЕМИ КЁНИГСБЕРГСКИХ МОСТАХ

Задача о семи кёнигсбергских моста-старинная математическая задача, в которой спрашивалось, как можно пройти по всем семи мостам центра старого Кёнигсберга, не проходя ни по одному из них дважды. Впервые была решена в статье, датированной 1736 годом, математиком Леонардом Эйлером, который доказал, что это невозможно, и по ходу доказательства изобрёл эйлеровы циклы. Решение Эйлером задачи о кёнигсбергских мостах явилось первым в истории применением теории графов, но без использования термина «граф» и без рисования диаграмм графов.



ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Центр старого Кёнигсберга с рекой и семью мостами без лишних деталей Задача о кёнигсбергских мостах разными авторами формулируется по-разному.

- 1. Маршрут произвольный

В связи с этими мостами был поставлен вопрос, можно ли совершить по ним прогулку так, чтобы пройти по каждому из этих мостов, причём ровно по одному разу.

- 2. Маршрут должен быть замкнутым

Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырёх частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту.

- 3. Замкнутые маршруты должны начинаться в каждой части города

Фактически требуется найти четыре маршрута обхода кёнигсбергских мостов, начинающиеся в четырёх частях города.

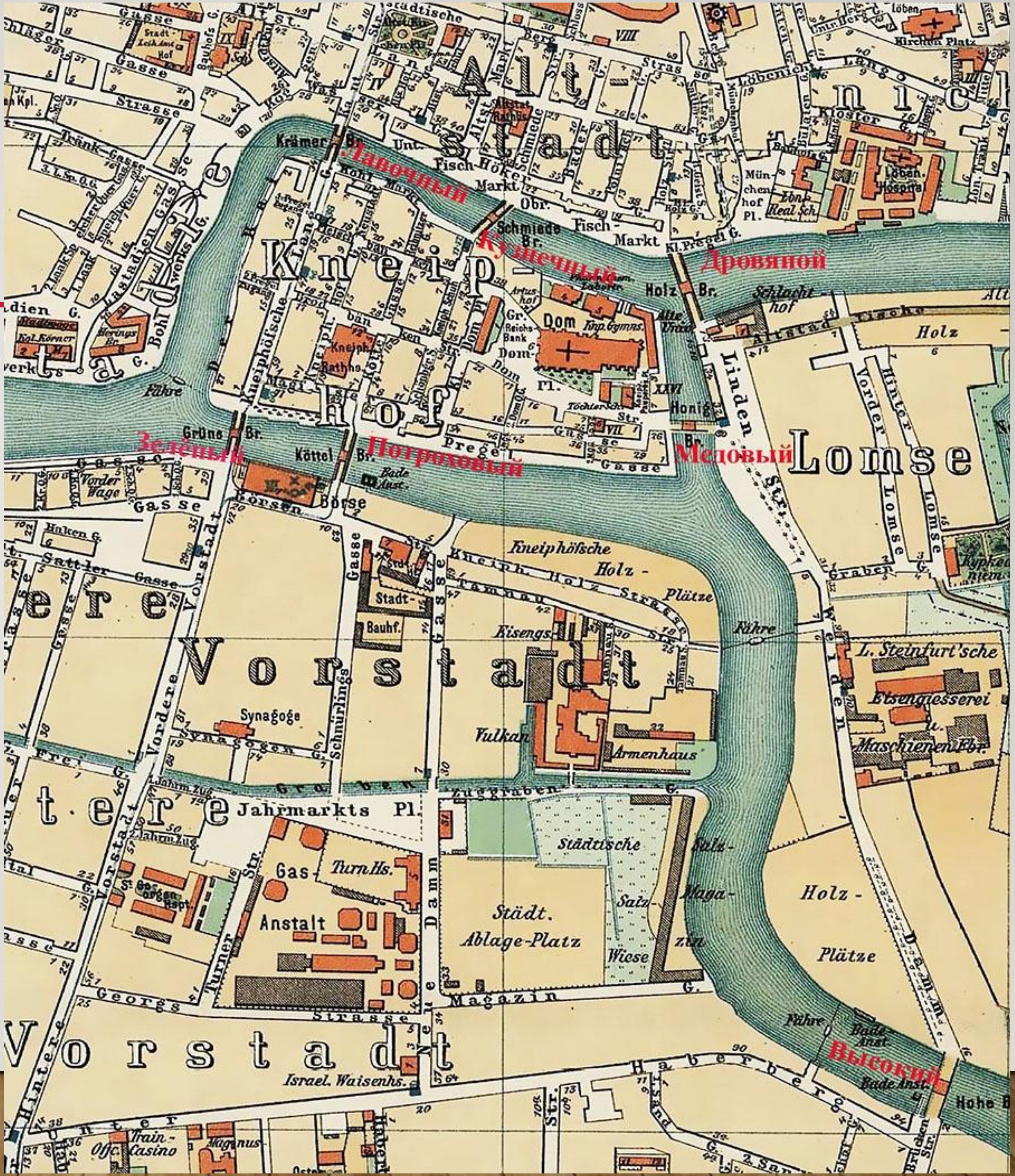
ЗНАЧИТ В КАЖДОМ ВОЗМОЖНОМ СЛУЧАЕ СЛЕДУЮЩЕЕ ПРАВИЛО ПОЗВОЛЯЕТ НЕПОСРЕДСТВЕННО И БЕЗ ТРУДА ВЫЯСНИТЬ, МОЖНО ЛИ ОСУЩЕСТВИТЬ ПРОГУЛКУ ПО ВСЕМ МОСТАМ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ:

ЕСЛИ ИМЕЕТСЯ БОЛЕЕ ДВУХ ОБЛАСТЕЙ, В КОТОРЫЕ ВЕДЕТ НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО МОСТОВ, МОЖНО ЗАЯВИТЬ С УВЕРЕННОСТЬЮ, ЧТО ТАКАЯ ПРОГУЛКА НЕВОЗМОЖНА.

ЕСЛИ, ОДНАКО, ИМЕЮТСЯ ТОЛЬКО ДВЕ ОБЛАСТИ, В КОТОРЫЕ ВЕДЕТ НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО МОСТОВ, ТО ПРОГУЛКА ОСУЩЕСТВИМА ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ОНА НАЧИНАЕТСЯ В ОДНОЙ ИЗ ЭТИХ ДВУХ ОБЛАСТЕЙ.

ЕСЛИ, НАКОНЕЦ, НЕТ НИ ОДНОЙ ОБЛАСТИ, В КОТОРУЮ ВЕДЕТ НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО МОСТОВ, ПРОГУЛКА С ТРЕБУЕМЫМИ УСЛОВИЯМИ ОСУЩЕСТВИМА, ПРИЧЁМ НАЧИНАТЬСЯ ОНА МОЖЕТ В ЛЮБОЙ ОБЛАСТИ.

СЛЕДОВАТЕЛЬНО, С ПОМОЩЬЮ ЭТОГО ПРАВИЛА ПОСТАВЛЕННАЯ ЗАДАЧА



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Л. ЭЙЛЕР ПРИНАДЛЕЖИТ К ЧИСЛУ ГЕНИЕВ, ЧЬЁ ТВОРЧЕСТВО СТАЛО ДОСТОЯНИЕМ ВСЕГО ЧЕЛОВЕЧЕСТВА. ДО СИХ ПОР ШКОЛЬНИКИ ВСЕХ СТРАН ИЗУЧАЮТ ТРИГОНОМЕТРИЮ И ЛОГАРИФМЫ В ТОМ ВИДЕ, КАКОЙ ПРИДАЛ ИМ ЭЙЛЕР. СТУДЕНТЫ ПРОХОДЯТ ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ ПО РУКОВОДСТВАМ, ПЕРВЫМИ ОБРАЗЦАМИ КОТОРЫХ ЯВИЛИСЬ КЛАССИЧЕСКИЕ МОНОГРАФИИ ЭЙЛЕРА. ОН БЫЛ ПРЕЖДЕ ВСЕГО МАТЕМАТИКОМ, НО ОН ЗНАЛ, ЧТО ПОЧВОЙ, НА КОТОРОЙ РАСЦВЕТАЕТ МАТЕМАТИКА, ЯВЛЯЕТСЯ ПРАКТИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ. ИЗУЧЕНИЕ ВКЛАДА ЭЙЛЕРА В МАТЕМАТИКУ ПРОДОЛЖАЕТСЯ, И ПО МЕРЕ ПОЯВЛЕНИЯ НОВЫХ ОТ

ВО