

ВВЕДЕНИЕ

Гидрогазодинамика или *механика жидкости и газа* — это наука о движении жидкостей и газов, ее следует рассматривать как часть механики сплошных сред. Гидрогазодинамика изучает законы движения жидкостей и газов и на этой основе выявляет условия их взаимодействия с обтекаемыми твердыми телами или с твердыми поверхностями, ограничивающими движущуюся среду.

Жидкости и газы, кроме отмеченных выше свойств *сплошности* и *сжимаемости*, обладают также *вязкостью*, проявляющейся только в движении, когда между слоями среды, движущимися с различными скоростями, возникают касательные силы внутреннего трения.

Впервые уравнения движения жидкости в пограничном слое, ставшие основой теории сопротивления тел в жидкости, были получены Прандтлем в 1904 г. Большой вклад в теорию пограничного слоя внесли советские ученые Л.Г.Лойцянский, А.П.Мельников, К.К.Федяевский, А.А. Дородницын, Н.Е.Кочин, Е. М.Минский, Г.И.Петров, В.В.Струмминский и др.

Важное значение для развития гидрогазодинамики имеет *теория подобия и размерностей*. Первым, кто решил эту задачу применительно к исследованию сопротивления судов, был У. Фруд (1810—1879 гг.). Значительный вклад в разработку теории подобия осуществил О. Рейнольдс (1842-1912 гг.). Работы Фруда и Рейнольдса о физическом подобии явлений нашли широкое развитие и применение в экспериментальной аэродинамике.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

1.1. Предмет механики жидкости и газа

Механика жидкости и газа — наука о движении жидкостей и газов — является разделом механики сплошных сред. В отличие от твердых тел, в которых молекулярные силы сцепления весьма велики, жидкости, и в особенности газы, обладают относительно слабыми межмолекулярными связями. Эта особенность их физической природы проявляется в легкой подвижности, т.е. *текучести* или *деформируемости*: движение жидкостей и газов под действием внешних и внутренних сил сопровождается изменением формы, а в общем случае — и объема выделенной ее части.

Жидкость принимает форму сосуда, в который она заключена, но образует поверхность свободного уровня, отделяющую ее от других жидкостей или газов, имеющих иные физические свойства.

Газы целиком заполняют сосуд, в который они помещены, и не образуют поверхности свободного уровня.

Сжимаемость свойственна всем жидкостям и газам, однако ее количественное проявление будет различным в зависимости от физических свойств среды. Это послужило основанием объединить сплошные среды, обладающие общим свойством сплошности и легкой подвижности, под общим названием *жидкости*, выделяя по мере необходимости практически *несжимаемые (капельные)* и *сжимаемые (газообразные)* жидкости.

Все жидкости обладают *внутренним трением*, обусловленным вязкими свойствами сред.

Идеальная жидкость — это абстрактная жидкость, лишенная внутренних сил трения.

В теплотехнике широко используются *двухфазные среды* — физически однородные вещества, находящиеся в двух различных агрегатных состояниях.

1.2. Классификация сил, действующих в жидкости

В жидкости имеют место только распределенные силы. Приложение к жидкости сосредоточенных сил ведет к ее разрыву.

Обозначим вектор поверхностной силы, действующей на площадку ΔF с внешней нормалью n , символом p_n (рис.1.1,а) и вычислим предел отношения этого вектора к площадке ΔF :

$$p_n = \lim (p_n / \Delta F)$$

Эту величину называют *вектором напряжения поверхностной силы* в данной точке.

В общем случае p_n зависит не только от положения точки на поверхности (координат x, y, z) и времени t , но и от ориентации в пространстве площадки ΔF , т. е.

$$p_n = f(x, y, z, t, n)$$

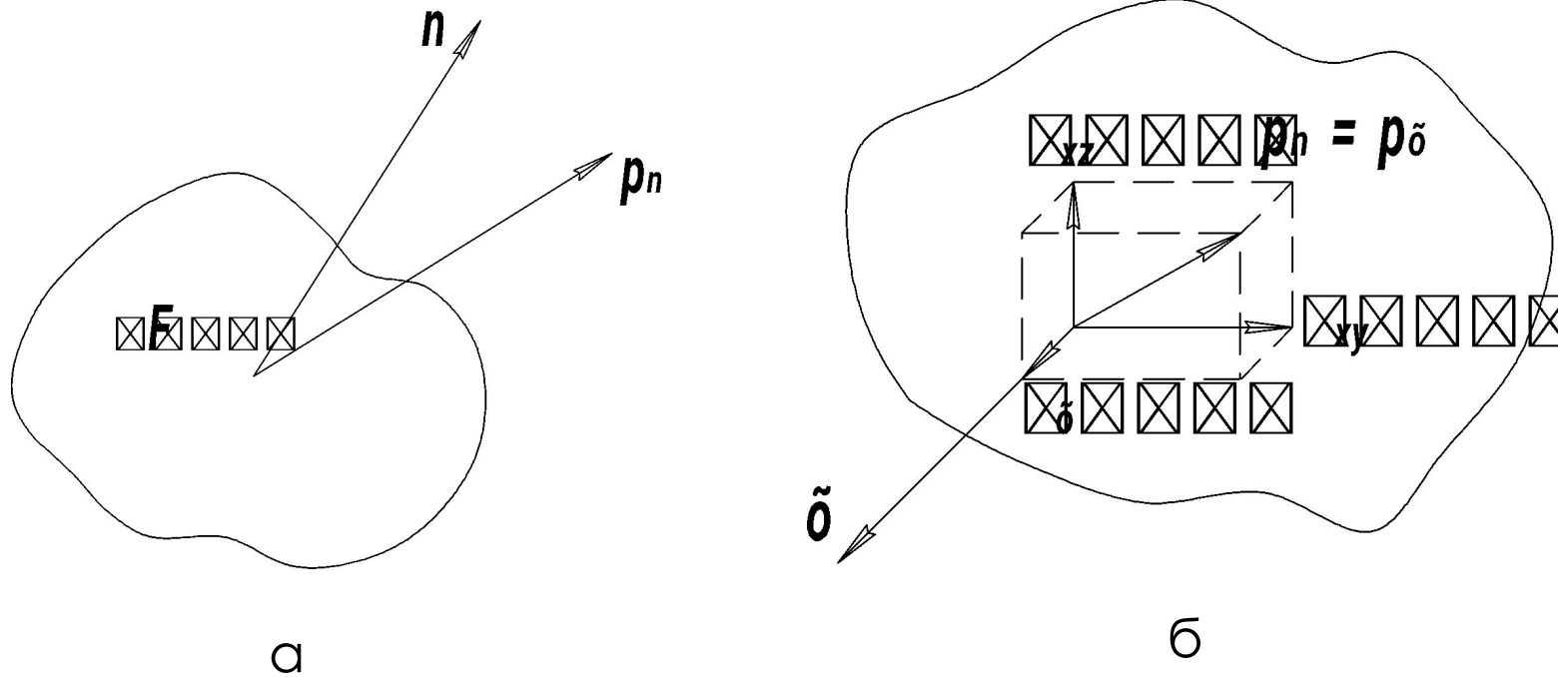


Рис. 1.1. К определению давления в точке

Вектор напряжения $p_n = p_x$ в общем случае не совпадает с направлением нормали (в данном случае с направлением оси x) и может быть разложен на нормальную σ_x и касательную τ_{xy}, τ_{xz} составляющие (рис.1.1,б):

$$\mathbf{p}_x = i\sigma_x + j\tau_{xy} + k\tau_{xz} \quad (1.1a)$$

Здесь i, j, k — единичные орты. Второй индекс у касательных напряжений указывает ось, в направлении которой проектируется напряжение p_x . Располагая площадки перпендикулярно к осям y и z , получаем еще два разложения напряжения:

$$\mathbf{p}_y = i\tau_{yx} + j\sigma_y + k\tau_{yz} \quad (1.1б)$$

$$\mathbf{p}_z = i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\sigma_z \quad (1.1в)$$

Проектируя p_n на координатные оси, получаем:

При произвольном расположении площадки с внешней нормалью n вектор p_n может быть выражен соотношением:

$$\begin{aligned} p_n &= n p_{nn} = \\ &= p_x \cos(nx) + p_y \cos(ny) + p_z \cos(nz) \end{aligned}$$

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz)$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz)$$

$$p_{nz} = \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz)$$

Физическую величину, характеризуемую в данной точке вектором p_n , который принимает различные значения в зависимости от ориентации площадки, называют тензором.

Давление в жидкости является примером поверхностной силы, и его гидродинамический смысл становится ясным из рассмотрения поверхностного напряжения p_n , определяемого нормальными и касательными напряжениями.

Возникновение в жидкости касательных напряжений обусловлено ее вязкостью и движением (относительным сдвигом). В неподвижной жидкости, а также в движущейся жидкости, лишенной вязкости (идеальная жидкость), касательные напряжения равны нулю ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) и поверхностные силы определяются только нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Для этого частного случая вместо зависимостей (1.1) и (1.2) получим:

$$p_x = i\sigma_x \quad p_y = j\sigma_y \quad p_z = k\sigma_z$$

$$p_n = n p_{nn} = i\sigma_x \cos(nx) + j\sigma_y \cos(ny) + k\sigma_z \cos(nz)$$

Рассмотрим далее в движущейся идеальной жидкости (или в неподвижной реальной жидкости) элементарную жидкую частицу в форме тетраэдра (рис. 1.2), площадь граней которого обозначим F_x , F_y , F_z и F_n .

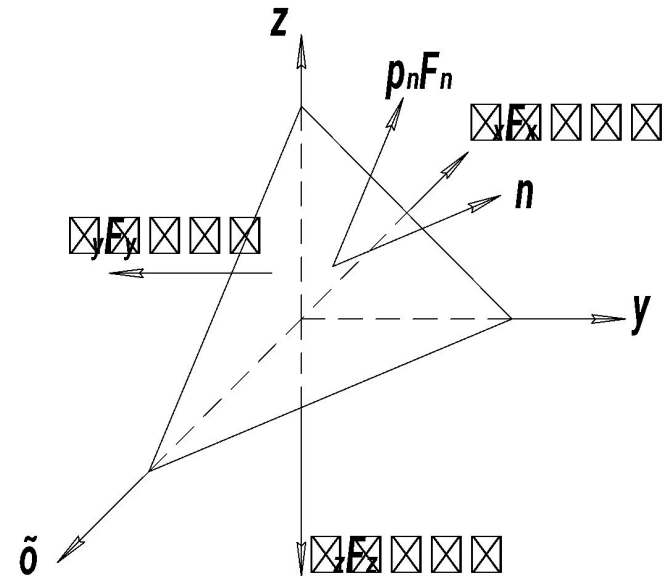


Рис.1.2. Схема сил, действующих на элементарный тетраэдр в потоке идеальной жидкости

На каждую грань действуют нормальные напряжения σ_x , σ_y и σ_z . Используя принцип Даламбера, запишем условие равновесия рассматриваемого жидкого элемента. Поскольку массовые силы (в том числе и силы инерции), пропорциональные объему $dV = dx dy dz$, имеют третий порядок малости, а поверхностные силы, пропорциональные площади, — малые второго порядка, условие равновесия всех действующих сил в проекциях на координатные оси дает следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}\sigma_x F_x &= p_{nn} F_n \cos(nx) + A_x \\ \sigma_y F_y &= p_{nn} F_n \cos(ny) + A_y \\ \sigma_z F_z &= p_{nn} F_n \cos(nz) + A_z\end{aligned}$$

где A_x , A_y , A_z — бесконечно малые третьего порядка.

Грани тетраэдра, имеющие площади поверхности F_x, F_y, F_z, F_n , ориентированы перпендикулярно к осям координат x, y, z и к нормали n . Поскольку $F_n \cos(nx) = F_x, F_n \cos(ny) = F_y, F_n \cos(nz) = F_z$ в пределе, стягивая рассматриваемый тетраэдр в точку, получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p_{nn}$$

Таким образом, если в жидкости отсутствуют касательные напряжения, то нормальные напряжения в данной точке не зависят от ориентации площадки. Этот вывод справедлив для неподвижной вязкой жидкости и при движении идеальной жидкости.

Величину p , равную любому нормальному напряжению с обратным знаком, называют *напряжением давления* или просто *давлением*.

$$p = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z = -p_{nn}$$

В соответствии со сказанным выше гидродинамическое давление p не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует, и является только функцией координат и времени:
 $p=f(x,y,z,t)$.

Кроме поверхностных сил в любой точке выделенного объема действуют силы, пропорциональные массе жидкости, заключенной в элементарном объеме ΔV , окружающей рассматриваемую точку. Эти силы получили название *массовых*.

К массовым силам относятся силы тяжести, центробежные силы, силы инерции, электромагнитные и электростатические силы. Для характеристики массовых сил введем вектор напряжения массовых сил M , равный пределу отношения массовой силы T к массе жидкости Δm , заключенной в элементарном объеме ΔV :

$$M = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} (T/\Delta m)$$

Отсюда следует, что M имеет размерность ускорения. Разлагая вектор M по координатным осям, получаем

$$\mathbf{M} = iX + jY + kZ$$

где X , Y , Z — проекции напряжения массовых сил на оси координат (единичные массовые силы). Если массовой силой является сила тяжести и направление оси z нормально к поверхности земли, то $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg/m=-g$, $M=-kg$.

1.3. Параметры потока

Термодинамическими параметрами потока являются давление p , плотность ρ и температура T , причем в газодинамике эти параметры рассматриваются в точке.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta m / \Delta V)$$

Величину, обратную плотности, называют удельным объемом, $\text{м}^3/\text{кг}$:

$$\frac{1}{\rho} = v$$

Три термодинамических параметра (давление, плотность и температура) связаны между собой для совершенных газов уравнением состояния

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.3)$$

где R — газовая постоянная.

Величина R для совершенных газов может быть выражена через удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и постоянном объеме c_v :

$$R = c_p - c_v \quad \text{или} \quad R = \frac{c_p(k - 1)}{k} = c_v(k - 1)$$

Здесь $k = c_p / c_v$ — показатель изоэнтропы. Для воздуха $k = 1,4$; для перегретого водяного пара $k = 1,3$.

1.4. Методы изучения движения жидкости

При математическом описании движения жидкости возможно два различных подхода, предложенных Лагранжем и Эйлером. По *методу Лагранжа* в жидкости выделяется определенная фиксированная частица и задается ее траектория следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t) \\ y &= f_2(a, b, c, t) \\ z &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где a, b, c — параметры Лагранжа, характеризующие координаты выделенной частицы в начальный момент времени.

Используя зависимости (1.4), легко найти составляющие скорости u , v , w выделенной частицы жидкости в направлении декартовых осей координат:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{df_1}{dt} \\ v &= \frac{dy}{dt} = \frac{df_2}{dt} \\ w &= \frac{dz}{dt} = \frac{df_3}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Абсолютная скорость в любой момент времени может быть записана в виде векторной суммы составляющих $c = iu + jv + kw$.

В отличие от метода Лагранжа *метод Эйлера* состоит в том, что задается не траектория выделенной частицы жидкости, а все поле скоростей в движущейся жидкости как функция координат и времени:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ v &= \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ w &= \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}$$

Для нахождения скорости в любой фиксированной точке рассматриваемого пространства необходимо только задать координаты этой точки.

Например, определим изменение скорости в точке с координатами $x=a$, $y=b$, $z=c$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}(a, b, c, t) \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}(a, b, c, t) \\ \mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}(a, b, c, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Таким образом, составляющие скорости, являющиеся в общем случае функциями четырех переменных, в фиксированной точке пространства зависят только от времени.

Составляющие поля ускорений находим прямым дифференцированием зависимости (1.6) по времени. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}} \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \boxed{u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}} \\
 \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \boxed{u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}}
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Видно, что в общем случае полное ускорение складывается из локального ускорения, определяемого частными производными $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$, $\partial w/\partial t$ и изменения скорости, обусловленного перемещением частицы в пространстве (члены, заключенные в прямоугольник). Эти составляющие полного ускорения называют *конвективными*.

При плоском течении все изменение скорости происходит только в плоскости переменных x и y , а при переходе от плоскости $z = const$ к другой изменения ее составляющих не происходит ($\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial z = 0$). Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

Если течение одномерное, т. е. изменение скорости происходит только вдоль одной координаты (например, x), то $du/dt = u du/dx = v dv/dx$.

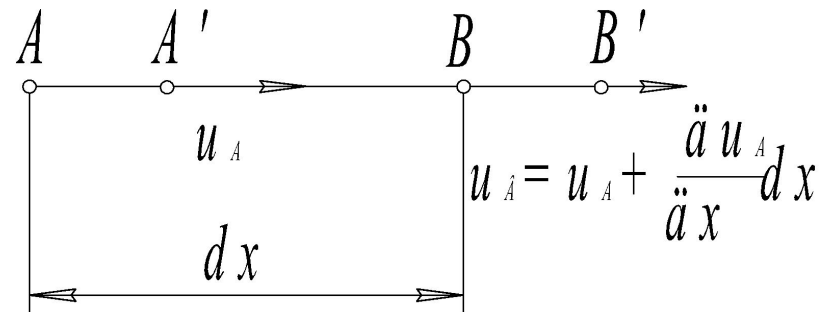
1.5. Деформационное и вращательное движение жидкого элемента

Конвективное ускорение, определяемое соотношениями (1.8), содержит компоненты скорости и их производные по одноименным ($\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial w/\partial z$) и разноименным ($\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial z$, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$) координатам. Выясним физический смысл этих производных. Рассмотрим жидкий элемент AB (рис. 1.3) длиной dx , движущийся вдоль оси x .

Если скорость в точке A равна u_A , то в точке B имеем $u_B = u_A + (\partial u_A / \partial x) dx$. При этом за время dt произойдет не только смещение выделенного элемента вдоль оси x , но и его линейная деформация. Эта деформация равна $\Delta dx = BB' - AA' = (\partial u / \partial x) dx dt$. Аналогично получим абсолютные линейные деформации вдоль осей y и z . Выражения $(\partial u / \partial x) dt$, $(\partial v / \partial y) dt$ и $(\partial w / \partial z) dt$ определяют относительные линейные деформации. Разделив их на dt , получим скорости относительных линейных деформаций

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \text{ .9)}$$

Рис. 1.3. К выводу скорости относительной линейной деформации



Таким образом, частные производные от составляющих скорости по одноименным координатам определяют скорости относительных линейных деформаций жидкого элемента вдоль координатных осей.

Жидкий элемент, ориентированный вдоль оси x , при движении в направлении оси y (рис. 1.4) за время dt из положения AB переместится в положение $A'B'$, претерпев угловую деформацию, равную

$$\operatorname{tg}d\gamma \approx d\gamma = \frac{BB' - AA'}{dx} = \frac{[v + (\partial v / \partial x)dx]dt - vdt}{dx} = \frac{\partial v dt}{\partial x}$$

(1.10)

или $dy/dt = \partial v / \partial x$. Следовательно, производные от составляющих скорости по разноименным координатам определяют скорости угловой деформации жидкого элемента.

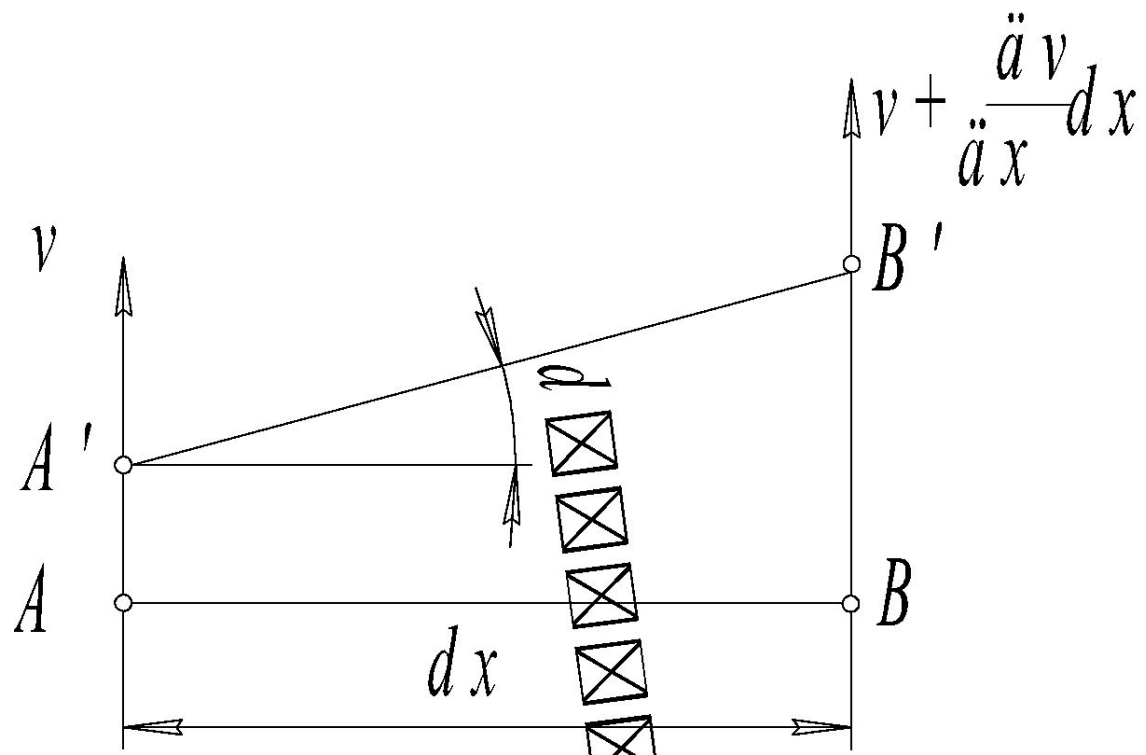


Рис. 1.4. К выводу скорости угловой деформации

Рассматривая движение реальной жидкости, часто можно наблюдать области, где имеет место ее интенсивное вращение, напоминающее вращение твердого тела. Однако если частицы твердого тела при вращении не меняют относительного расположения, то в жидкости одновременно с вращением происходит деформация сдвига или скашивания частицы. Попробуем разделить указанные составляющие движения (вращение и деформацию сдвига). Для этого спроектируем на плоскость hoz элементарный жидкий параллелепипед (рис. 1.5). При перемещении его из положения / в положение // углы не сохраняются прямыми, и в новом положении проекция исходного параллелепипеда будет $A'B'C'D'$. Углы $d\gamma_1$ и $d\gamma_2$ согласно соотношению (1.10) связаны с проекциями скорости u и w следующим образом:

$$d\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial z} dt \quad d\gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x} dt \quad (1.11)$$

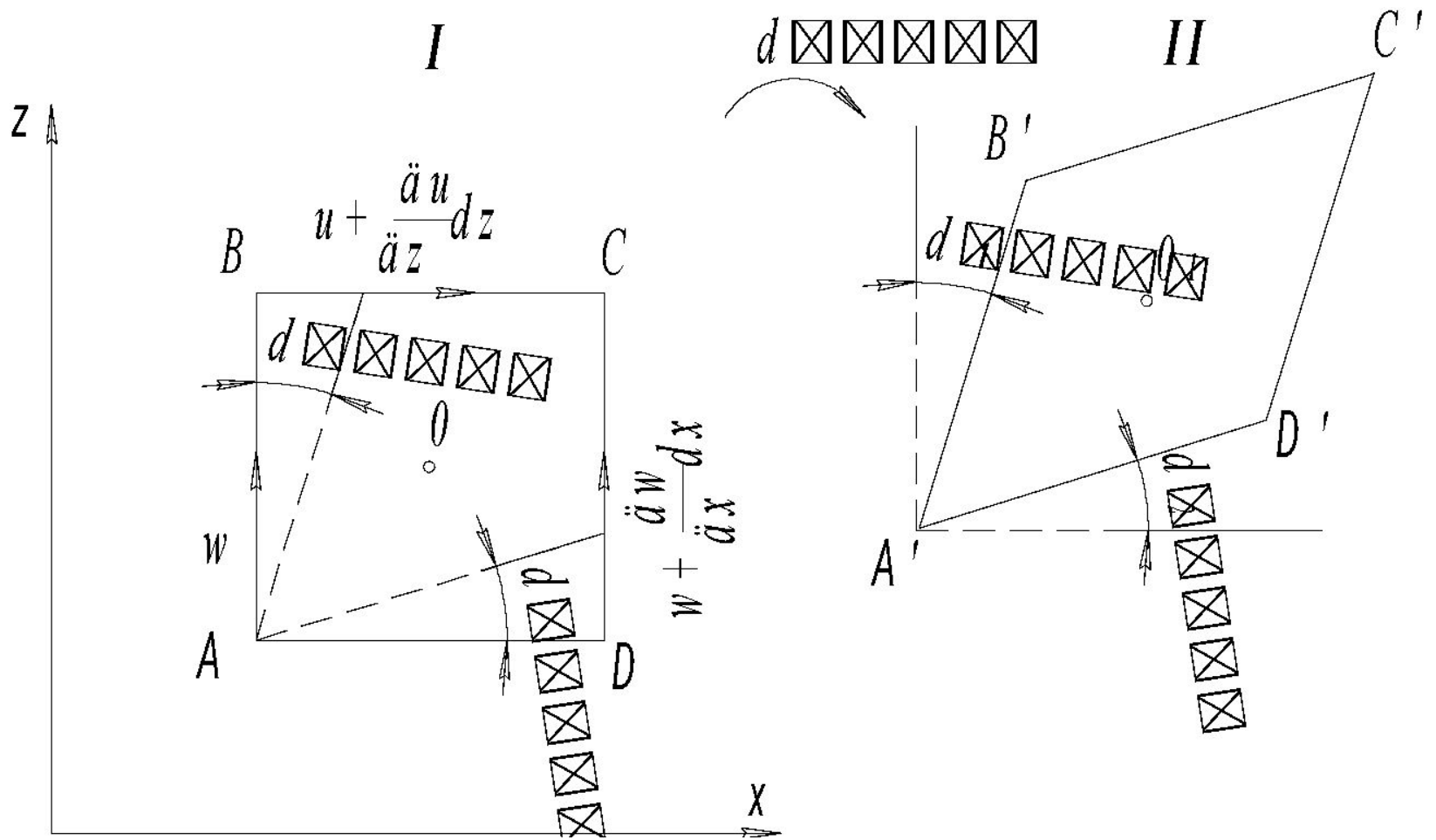


Рис. 1.5. Движение жидкого элемента в общем случае

Деформация углов исходного параллелепипеда происходит в результате сложения поворота $d\alpha$ и деформации скашивания или сдвига $d\beta$. Если предположить, что деформация скашивания по всем граням одинакова и характеризуется углом

$$d\gamma_1 = d\alpha + d\beta \quad -d\gamma_2 = d\alpha - d\beta \quad (1.12)$$

При выборе знаков будем считать угол положительным, когда он отсчитывается в направлении круговой перестановки индексов координатных осей. Если углы отсчитываются в направлении от оси z к оси x , от оси x к оси y и от y к z , то этим углам будем приписывать положительный знак. При отсчете углов в обратном направлении их значения будут иметь отрицательный знак. Складывая и вычитая последовательно уравнения (1.12), найдем значение угла $d\alpha$, характеризующего вращение, и угла $d\beta$, характеризующего деформацию сдвига:

$$d\alpha = 1/2(d\gamma_1 - d\gamma_2) \quad d\beta = 1/2(d\gamma_1 + d\gamma_2) \quad (1.13)$$

Используя (1.11) и деля (1.13) на dt , получаем составляющие скорости углового поворота (угловая скорость вращения ω_y) и скорости деформации сдвига или скашивания (δ_y):

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \delta_y &= \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Аналогичные рассуждения применительно к проекциям исходного параллелепипеда на остальные координатные плоскости дают возможность определить все составляющие вектора угловой скорости ω и вектора деформации

$$\omega = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z \quad \delta = i\delta_x + j\delta_y + k\delta_z$$

Составляющие рассматриваемых векторов определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); & \delta_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); & \delta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); & \delta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (1.15)$$

Индексы указывают координатную ось, перпендикулярно которой расположена плоскость проекции исходного параллелепипеда, или ось, вокруг которой рассматривается поворот (вращение) жидкой частицы. Используя уравнения (1.15), легко найти скорости скашивания прямых углов (суммарную скорость угловой деформации) в плоскостях xu ; uz ; zx . Обозначим эти скорости $\gamma_{xy} = 2\delta_z$; $\gamma_{yz} = 2\delta_x$; $\gamma_{zx} = 2\delta_y$.

Выделим далее в жидкости элементарный жидкий объем в форме параллелепипеда и рассмотрим его деформацию за время dt .

Если в начальный момент времени параллелепипед занимал некоторое положение /, то через промежуток времени dt произойдет его смещение в положение //. При этом вследствие линейной деформации ребер изменится его первоначальный объем. Изменением длины ребер, обусловленным их угловой деформацией, можно пренебречь.

Найдем изменение первоначального объема $dV_1 = dx dy dz$ при смещении его из положения / в положение //, имея в виду линейную деформацию ребер, определяемую выражениями (1.9):

$$\begin{aligned}
 \Delta(dV) &= dV_2 - dV_1 = \\
 &= (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) - dx dy dz = \\
 &= [dx + (\partial u / \partial x) dx dt][dy + (\partial v / \partial y) dy dt][dz + (\partial w / \partial z) dz dt] - \\
 &\quad - dx dy dz
 \end{aligned}$$

Перемножив выражение в скобках и отбросив малые высших по сравнению с dV порядков, получим

$$\Delta(dV) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt dx dy dz$$

Относительное изменение первоначального объема за время dt

$$\frac{\Delta(dV)}{dV} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt$$

Отсюда скорость относительного изменения жидкого объема (скорость объемн

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.16)$$

Полученное соотношение в векторном исчислении называют дивергенцией вектора скорости c и обозначают $\text{div } c$.

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } c = e$

(1.17)

1.6. Линии тока и вихревые линии. Трубка тока (элементарная струйка) и вихревая трубка

Линию, касательная к которой в каждой точке дает направление вектора скорости \mathbf{c} , называют *линией тока*.

Линию, касательная к которой в каждой точке определяет направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, называют *вихревой линией*. Приведенные определения означают, что векторы скорости \mathbf{c} и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны с вектором $d\mathbf{l}$ (рис. 1.6), где $d\mathbf{l}$ — элемент линии тока или вихревой линии, составляющие которого по осям координат равны dx, dy, dz .

а

б

Рис. 1.6. Линия тока (а) и вихревая линия (б)

Условие коллинеарности дает возможность определить уравнения линий тока и вихревых линий, так как в этом случае векторные произведения $|dl \times c|$ и $|dl \times \omega|$ должны обращаться в нуль.

Если $dl = i dx + j dy + k dz$, то

$$|dl \times c| = i(v dz - w dy) + j(w dx - u dz) + k(udy - v dx) = 0$$

$$|dl \times \omega| = i(v dz - w dy) + j(w dx - u dz) + k(udy - v dx) = 0$$

Вектор, разложенный по трем взаимно ортогональным осям, равен нулю в случае, когда все его составляющие порознь обращаются в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned}v dz - w dy &= 0 & \omega_y dz - \omega_z dy &= 0 \\w dx - u dz &= 0 & \omega_z dx - \omega_x dz &= 0 \\u dy - v dx &= 0 & \omega_x dy - \omega_y dx &= 0\end{aligned}$$

Отсюда для линии тока

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

для вихревой линии

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

1.7. Циркуляция скорости

Циркуляция скорости Γ по некоторому контуру L представляет собой интеграл от скалярного произведения вектора скорости \mathbf{c} на элемент контура $d\mathbf{l}$, взятый по всему контуру L_0 или по его части L_1 .

Если $\mathbf{c} = iu + jv + kw$, а $d\mathbf{l} = i dx + j dy + k dz$ то

$$\Gamma = \int_L \mathbf{c} d\mathbf{l} = \int_L \mathbf{c} \cos(\overline{\mathbf{c}, d\mathbf{l}}) dl = \int_L (u dx + v dy + w dz)$$

При вычислении циркуляции скорости по формуле (1.18) не безразлично, в каком направлении производится обход контура. Условно величине Γ присваивается положительный знак, если при обходе контура его внутренняя область остается слева.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

2.1. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы, записанный для движущейся жидкой среды. Согласно этому закону масса m изолированной системы за все время движения остается постоянной, т. е.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.1)$$

Так как $m = \rho V$, где V — элементарный объем движущейся жидкости, то

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Отсюда, разделяя переменные и переходя к пределу при $V \rightarrow 0$, находим

$$(1/\rho)(d\rho/dt) + \lim_{V \rightarrow 0}(dV/Vdt) = 0 \quad (2.2)$$

Величина $\lim_{V \rightarrow 0}(dV/Vdt)$ является скоростью объемной деформации. Заменяя ее по соотношению (1.16), получаем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{c} = 0 \quad (2.3)$$

Поскольку плотность ρ является функцией координат и времени,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в (2.3). После несложных преобразований запишем (2.3) в такой форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является дифференциальным уравнением неразрывности нестационарного трехмерного течения. Используя операторы векторной алгебры (2.5), можно записать

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{c}) = 0 \quad (2.6)$$

При стационарном течении отсутствует локальное изменение плотности по времени, т.е. $\partial\rho/\partial t=0$. Следовательно,

$$\mathit{div}(\rho\bar{c}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.7)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$) находим

$$\mathit{div}(\bar{c}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

Физически это означает, что при движении несжимаемой жидкости скорость ее объемной деформации равна нулю. Если рассматривается плоское стационарное течение сжимаемой жидкости, то

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.9)$$

Для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

В случае одномерного течения ($v=w=0$, $u=c$)

$$\frac{d}{dx}(\rho c) = 0 \quad \rho c = \text{const} \quad (2.11)$$

Полученный результат указывает, что при одномерном течении удельный расход ρc (расход жидкости на единицу площади поперечного сечения потока) имеет одно и то же значение в каждой точке поперечного сечения трубки тока. Уравнение неразрывности часто используется в интегральной форме. Для его вывода рассмотрим элемент трубки тока, расположенный между произвольно проведенными контрольными сечениями (рис. 2.1).

Рис. 2.1. К выводу интегральной формы уравнения неразрывности

Другими словами, расход массы жидкости через поверхность рассматриваемого объема должен быть равен нулю:

$$\int_F \rho_i c_n dF_i = 0 \quad (2.12)$$

Здесь F — площадь всей поверхности рассматриваемого объема; c_n — скорость жидкости в каждой точке, нормальная к элементу поверхности dF .

Тогда

$$\rho_i c_i F_i = \text{const} \quad (2.13)$$

Полученное уравнение иногда называют *уравнением расхода* для одномерного течения. Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и от уравнения массового расхода (2.13) легко перейти к уравнению объемного расхода

$$c_i F_i = \text{const} \quad (2.14)$$

2.2. Уравнение движения идеальной жидкости

Рассматриваемые уравнения представляет собой математическое выражение закона сохранения количества движения применительно к жидкому элементу: скорость изменения вектора количества движения равна сумме всех массовых и поверхностных сил, действующих на рассматриваемый жидкий элемент

$$\rho \frac{d}{dt}(c) = P + \rho M$$

(2.15)

Рис. 2.2. К выводу дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости

Разложим векторы, входящие в уравнение (2.15), по осям прямоугольной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c} &= iu + jv + kw \\ \mathbf{P} &= iP_x + jP_y + kP_z \\ \mathbf{M} &= iX + jY + kZ \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Здесь, как и ранее, u, v, w — проекции абсолютной скорости c на координатные оси, а P_x, P_y, P_z, X, Y, Z — составляющие поверхностных и массовых сил в направлении этих осей.

Проектируя векторное уравнение (2.15) на оси координат с учетом обозначений (2.16), получаем три уравнения

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}(u) &= P_x + X\rho \\ \rho \frac{d}{dt}(v) &= P_y + Y\rho \\ \rho \frac{d}{dt}(w) &= P_z + Z\rho \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Поскольку в данном случае рассматривается движение идеальной жидкости, единственной поверхностной силой является сила, обусловленная гидродинамическим давлением p . Тогда на грани, перпендикулярные оси x , будут действовать следующие силы: на левую — $pdydz$, на правую — $(p + \partial p / \partial x)dydz$.

Учитывая принятое направление осей, получаем для поверхностей силы, отнесенной к единице объема, действующей в направлении оси x , $P_x = -\partial p / \partial x$. Аналогичным образом $P_y = -\partial p / \partial y$; $P_z = -\partial p / \partial z$. В результате уравнения (2.17) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Заменяя полное ускорение в левой части через локальное и конвективное по соотношениям (1.8), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Уравнения (2.19) являются уравнениями движения идеальной жидкости в форме Эйлера.

Для установившегося течения локальные составляющие ускорений равны нулю и система (2.19) несколько упрощается

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

В случае плоского установившегося (стационарного) течения остаются два уравнения

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Наконец, при одномерном течении, когда параметры потока и скорость зависят только от одной координаты, система (2.20) сводится к одному простому уравнению

$$c \frac{dc}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + X \quad (2.22)$$

Пусть $X=Y=Z=0$, тогда для одномерного течения

$$c dc = -\frac{dp}{\rho} \quad (2.23)$$

Полученные уравнения движения совместно с дифференциальным уравнением неразрывности, дополненные соответствующими начальными и граничными условиями, позволяют в принципе решить задачу о движении несжимаемой идеальной жидкости в любом заданном канале или задачу обтекания идеальной жидкостью любого заданного тела.

В общем случае проинтегрировать уравнение движения не удастся. Однако при некоторых дополнительных условиях такое интегрирование оказывается возможным. Для этого введем в уравнения (2.20) составляющие вектора угловой скорости ω , добавив к левой части каждого уравнения некоторые дополнительные члены.

К первому уравнению системы (2.20) добавим величины $\pm v \partial v / \partial x$ и $\pm w \partial w / \partial x$, не нарушающие исходного равенства. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)} - \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{-2v\omega_z} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial x}}_{2w\omega_y} = \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X
 \end{aligned}$$

Члены в фигурных скобках легко приводятся к виду, указанному под каждой скобкой, и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - X = 2v\omega_x - 2w\omega_y$$

Преобразуя второе уравнение движения, добавим к нему члены $\pm u \partial u / \partial y$ и $\pm w \partial w / \partial y$. Тогда

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2}{2} \right)} + \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial y}}_{2u\omega_z} - \underbrace{w \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}}_{-2w\omega_x} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - Y = 2w\omega_x - 2u\omega_z$$

Аналогичным образом преобразуется и третье уравнение. В результате система (2.20) принимает вид, впервые предложенный профессором И.С. Громеко в 1881 г.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - X &= 2v\omega_x - 2w\omega_y \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - Y &= 2w\omega_x - 2u\omega_z \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - Z &= 2u\omega_y - 2v\omega_x \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

2.3. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости

Для интегрирования уравнений движения предположим, что массовые силы являются потенциальными и, следовательно, составляющие их по координатным осям могут быть выражены через одну функцию.

Если потенциал массовых сил обозначить — $U(x, y, z)$, то

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.25)$$

Примем далее, что трехчлен

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{dp}{\rho} = dP$$

может быть представлен в виде полного дифференциала от некоторой функции $P(x, y, z)$. Такую функцию всегда можно ввести, если рассматривать давление p зависящим только от плотности. Жидкость, для которой выполняется это условие, называют *баротропной*. Воздух или любой газ можно считать баротропной жидкостью, если изменение его состояния происходит изотермически или адиабатически. Важным случаем адиабатного процесса является изоэнтропийный процесс $dS=0$. Для $T=\text{const}$ $p/\rho=\text{const}$. Для изоэнтропы $p/\rho^k=\text{const}$, где k — показатель изоэнтропы.

Таким образом, для баротропной жидкости

$$P = \int \frac{dp}{\rho} + \text{const} \tag{2.26}$$

После сделанных допущений умножим каждое уравнение системы (2.24) на dx , dy , dz соответственно и проведем сложение всех этих уравнений.

С учетом (2.25) и (2.26) получим

$$d\left(\frac{c^2}{2} + P - U\right) = 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

Интегрирование уравнения (2.27) возможно в случае, когда определитель обращается в нуль. Для этого необходимо, чтобы либо все члены одной из строк или столбца обратились в нуль, либо строки или столбцы оказались пропорциональными друг другу.

Отсюда в следующих пяти случаях течения жидкости возможно интегрирование уравнения (2.27):

1. $u=v=w=c=0$. Движение жидкости отсутствует и (2.27) выражает условие статического равновесия жидкости.

2. $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Движение жидкости безвихревое. В дальнейшем такое движение будем называть потенциальным, а интеграл (2.27), представленный в виде

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = \text{const} \quad (2.28)$$

— интегралом Эйлера.

Если из массовых сил рассматривать только силу тяжести, то для потенциала U можно записать

$$U = -gz \quad (2.29)$$

Знак минус указывает, что направление массовой силы противоположно положительному направлению оси z . С учетом (2.29) интеграл (2.28) запишем в виде

$$\frac{c^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const} \quad (2.30)$$

Постоянная в правой части уравнения (2.30) имеет одно и то же значение для всей области течения.

3. $dx/u=dy/v=dz/w$. Написанное условие пропорциональности первых двух строчек определителя (2.27) представляет собой дифференциальное уравнение линии тока.

В этом случае формально интеграл уравнения (2.27) будет иметь вид (2.30), но постоянная интегрирования сохраняет свое значение только вдоль рассматриваемой линии тока. При переходе к соседней линии тока эта постоянная может изменяться.

4. $dx/\omega_x=dy/\omega_y=dz/\omega_z$. Здесь интегрирование осуществляется вдоль вихревой линии и, следовательно постоянная в (2.30) не меняется вдоль выбранной вихревой линии, но принимает новое значение на другой линии.

Интегралы, получаемые при интегрировании вдоль линии тока и вихревой линии, называют *интегралами Бернулли*. В дальнейшем будем уравнение (2.30) называть интегралом Бернулли независимо от условий интегрируемости, оговаривая эти условия при необходимости особо.

5. $u/\omega_x = v/\omega_y = w/\omega_z$. Пропорциональность членов второй и третьей строчек определителя уравнения (2.27) определяет особый вид течения, при котором линии тока совпадают с вихревыми линиями. Такого рода течение называют винтовым, и для него, так же как и в случае потенциального течения, постоянная интегрирования в интеграле (2.30) остается неизменной во всем поле течения.

В случае несжимаемой жидкости уравнение (2.30) принимает особенно простой вид ($\int dp/\rho = p/\rho$)

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (2.31)$$

и выражает по существу закон сохранения энергии: сумма кинетической ($c^2/2$) и потенциальной ($p/\rho + gz$) энергий остается постоянной вдоль вихревой линии или линии тока, а при безвихревом (потенциальном) или винтовом движении энергия постоянна во всем поле течения жидкости. В случае сжимаемой жидкости необходимо воспользоваться зависимостью плотности от давления. Для изоэнтропийных процессов связь между указанными параметрами дается уравнением изоэнтропы $p/\rho^k = A$. Отсюда после формального дифференцирования

$$dp = k\rho^{k-1} A d\rho \quad (2.32)$$

и подстановки (2.32) в (2.30) получаем

$$\frac{c^2}{2} + Ak \int \rho^{k-2} d\rho + gz = \text{const}$$

Заменим далее постоянную A ее значением $(A=p/\rho^k)$

(2.33)

Если пренебречь силой тяжести, что для газодинамики вполне допустимо, то интеграл Бернулли (2.33) для сжимаемой жидкости примет вид

$$\frac{c^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (2.34)$$

Если пренебречь силой тяжести, что для газодинамики вполне допустимо, то интеграл Бернулли (2.36) для сжимаемой жидкости примет вид

$$(2.37)$$

2.4. Уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье — Стокса)

Уравнения движения, записанные с учетом сил вязкости, существенно усложняются, так как в этом случае поверхностные силы не могут быть выражены в столь простой форме, как при выводе уравнений Эйлера.

Выделим в жидкости элементарный прямоугольный параллелепипед и найдем составляющие результирующей поверхностной силы, действующие на площадки, перпендикулярные координатным осям. Для ясности на рис. 2.3 указаны только силы, действующие на грани, перпендикулярные осям x и z . Еще раз обратим внимание на то, что при учете вязкости p_x не равно давлению p и является векторной величиной, а нижний индекс указывает ось, перпендикулярно которой располагается рассматриваемая грань, а не проекции сил на эту ось. Следовательно, составляющая поверхностных сил, действующая на грани, перпендикулярные

Рис. 2.3. Схема действия вектора поверхностной силы на грани, перпендикулярные осям x и z

- Отсюда полный вектор поверхностной силы P , отнесенный к единице, есть
- Разложим каждую из векторных величин p_x, p_y, p_z по координатным осям (на рис. 2.3 показано разложение векторов p_x и p_z). Это разложение определяется формулами (1.1а), (1.1б) и (1.1в).
- Подставив систему (1.1) в выражение (2.38), получим разложение поверхностной силы по осям координат:

Внесем составляющие поверхностной силы в уравнения движения (2.20). Тогда

В идеальной жидкости все касательные напряжения отсутствуют а нормальные напряжения равны друг другу, причем отрицательное значение каждого из этих напряжений, как уже отмечалось, называют давлением в жидкости.

Для реальной жидкости, обладающей трением, введем в рассмотрение среднее арифметическое из трех нормальных напряжений и эту величину со знаком минус также будем называть давлением жидкости:

Три уравнения системы (2.40) содержат шесть составляющих тензора напряжения, и эти составляющие необходимо как-то связать с составляющими скорости u , v , w . Такая связь может быть установлена на основе следующих соображений. Если к какому-то объему приложены силы, то в общем случае под их действием происходит деформация этого объема, характеризуемая тремя относительными удлинениями и тремя углами сдвига. Для твердых тел напряжения пропорциональны относительным деформациям (закон Гука), а в жидкостях — скоростям относительных деформаций (закон Ньютона — Стокса). Следовательно, установив связь между напряжениями и деформациями на основе закона Гука путем элементарных замен, легко перейти к аналогичным связям в жидкой среде.

Обозначим $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ относительные линейные деформации для твердого тела, а для жидкости под этими величинами будем понимать скорости относительных линейных деформаций [зависимости (1.12)]. Угловые деформации обозначим $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ понимая под ними для жидкости скорости угловых деформаций [зависимости [1, 19]]. Тогда для касательных напряжений, искомая связь определяется элементарными соотношениями

Так, напряжение τ_{xy} вызовет следующие деформации:

Деформации от напряжения будут соответственно равны

Наконец, от напряжения получим

Общая деформация по каждой из трех осей найдется в результате суммирования всех ее составляющих:

Здесь n — коэффициент поперечного сжатия (величина, обратная коэффициенту Пуассона), а E — модуль растяжения, связанный с модулем сдвига соотношением

Уравнения (2.43) позволяют однозначно связать каждое нормальное напряжение с линейными деформациями и модулем сдвига G . В результате решения указанной системы уравнений получим

Понимая под величинами $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ жорости относительных деформаций, используя в качестве коэффициента пропорциональности не модуль сдвига G , а динамическую вязкость η и имея в виду, что $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ запишем уравнения движения (2.40) (уравнения Навье —Стокса) в окончательном виде:

Для математической формулировки задачи эти уравнения необходимо дополнить уравнением неразрывности для сжимаемого потока, уравнением состояния, уравнением энергии, если рассматривается неизотермическое изменение состояния газа, и, наконец, эмпирической зависимостью между вязкостью и температурой T . Для несжимаемой жидкости достаточно четырех уравнений, причем сами уравнения Навье—Стокса заметно упрощаются и принимают вид

Написанные уравнения движения при использовании оператора Лапласа легко объединяются в одно векторное уравнение

Для стационарного течения

Дальнейший этап упрощения уравнений Навье — Стокса состоит в переходе от общего течения к более простому плоскому течению несжимаемой жидкости, для которого система (2.47) принимает вид

При решении многих практически важных задач, таких, например, как расчет течения в элементах турбомашин, более целесообразным оказывается использовать не декартовы, а цилиндрические координаты.

Если обозначить радиальную координату r , окружную θ , а осевую z и проекции скорости на эти координаты v_r, v_θ, v_z при переходе от прямоугольной системы координат к цилиндрической, получим для несжимаемой жидкости вместо уравнений (2.47) следующую систему:

2.5. Уравнение энергии

Уравнение энергии представляет собой математическую формулировку закона сохранения энергии применительно к жидкому элементу: изменение кинетической и внутренней энергии жидкого элемента равно работе всех внешних сил и подведенного количества теплоты.

Выделим элементарный жидкий объем в виде параллелепипеда со сторонами Δx , Δy , Δz и найдем работу поверхностных сил, действующих по граням параллелепипеда за единицу времени. В общем случае вязкой жидкости в расчет следует принимать работу, обусловленную тремя нормальными напряжениями τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} и тремя касательными напряжениями τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} .

Вычисляя работу сил, действующих на грани, перпендикулярные оси x , получаем для нормальных сил

Подставив (2.53) и (2.54) в (2.55), получим дифференциальное уравнение энергии

Введем далее в рассмотрение удельную энтальпию движущегося газа
С этой целью прибавим к левой и правой частям уравнения (2.56) одну и ту же величину

Тогда левая часть (2.56) преобразуется к виду

Здесь h_0 — полная удельная энтальпия заторможенного газа.

Кроме того, выразим количество подведенной теплоты Q через удельное количество теплоты q , передаваемой на единицу поверхности выделенного элемента в единицу времени, т. е. через плотность теплового потока. Эта теплота, подведенная к граням, перпендикулярным оси x , равна

Приток теплоты в направлении

оси y равен —

оси z равен —

Таким образом, суммарное количество теплоты, воспринимаемой жидким элементом,

Отсюда

Вектор плотности теплового потока α однозначно связан с абсолютной температурой T законом Фурье $\alpha = -\lambda \text{grad } T$ где λ — теплопроводность.

В результате получаем

С учетом всех преобразований запишем (2.55) в виде

Можно показать, что

Тогда

Отсюда следует, что при стационарном движении жидкости, отсутствии теплопроводности и в случае, когда вектор массовых сил ортогонален вектору скорости, изменение энтальпии полного торможения равно нулю:

Легко заметить, что частная, формула уравнения энергии (2.58) тождественная уравнению Бернулли (2.37) для сжимаемой жидкости. Действительно,

Полученный результат является следствием того, что при изоэнтропийном течении интегралы уравнений количества движения и энергии совпадают и для изучения таких течений из трех законов сохранения необходимы только два (массы и количества движения). Необходимо, однако, подчеркнуть справедливость уравнений (2.37) и (2.58) не только для изоэнтропийного течения, но и для течения с трением, так как в последнем случае вся работа трения переходит в тепловую энергию и эти две составляющие общего уравнения энергии взаимно компенсируются. В результате полная энергия частиц, движущихся при установившемся течении вдоль своей линии тока, остается неизменной.

Если векторы поверхностных сил заменить соответствующими скоростями относительных деформаций, то вместо (2.57) получим

Здесь функция

определяющая диссипацию энергии, называется диссипативной функцией.

Глава третья

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

3.1. Основные уравнения одномерного потока

Для одномерных потоков характерно изменение всех параметров течения только в одном направлении.

Одномерным можно считать течение жидкости в канале с плавно изменяющимся поперечным сечением и малой кривизной его оси. Одновременно вводится допущение о постоянстве всех параметров потока в поперечном сечении каналов либо вместо действительных величин используются их усредненные значения.

Уравнение неразрывности. При сделанном выше предположении о постоянстве параметров в поперечных сечениях канала уравнение неразрывности в форме (2.16), записанное для двух произвольных сечений при отсутствии массообмена с внешней средой, принимает вид

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. В некоторых случаях используется логарифмический дифференциал от уравнения (2.16)

При наличии массообмена с внешней средой формула (2.16) имеет смысл только локальной связи между параметрами в данном сечении, а логарифмический дифференциал принимает в этом случае вид

где полное изменение массы dm представляет собой сумму всех массовых воздействий, т. е. отвода или подвода массы.

Уравнение количества движения. Это уравнение для одномерного, установившегося, энергоизолированного течения при отсутствии массовых сил непосредственно следует из уравнений Эйлера (2.23)

При наличии внешних воздействий и массообмена уравнение количества движения усложняется. Для его вывода рассмотрим элемент канала, изображенного на рис. 3.1, и приравняем секундные импульсы всех действующих сил, приложенных к этому элементу, изменению количества движения:

Здесь τ — напряжение трения, действующее на элемент боковой поверхности канала dS ; ΣF — сумма секундных импульсов сил внешнего воздействия; v_n — проекции скорости на направление основного потока и массовый расход подводимой (или отводимой) жидкости; c , m — скорость и расход основного потока соответственно.

После очевидных сокращений

Легко видеть, что при отсутствии внешних воздействий, сил трения и массообмена приходим к уравнению (2.26)

Его интегралом является полученное выше уравнение Бернулли для баротропной жидкости

Уравнение энергии. При одномерном течении идеальной жидкости в изолированной трубке тока, т. е. при отсутствии теплообмена и подводимой или отводимой работы, уравнение количества движения в форме (2.37) и уравнение энергии тождественны.

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение энергии для сжимаемой идеальной жидкости имеет вид (2.37): или (2.58)

Записывая (2.58) для сечения, где скорость уменьшается до нуля и, следовательно, поток тормозится, найдем выражение для постоянной в правой части. Эта постоянная может быть представлена различными способами:

Здесь —энтальпия заторможенного потока или его полная энергия; — параметры заторможенного потока или параметры полного торможения. При полном торможении потока вся кинетическая энергия переходит в теплоту и температура , так же как и энтальпия, имеет одно вполне определенное значение. Давление торможения p_0 и плотность ρ_0 могут принимать любые значения, но их отношение $\frac{p_0}{\rho_0}$ должно оставаться постоянным. При использовании параметров торможения уравнение энергии можно записать следующим образом:

Зависимости (3.5), (3.5а) и (3.5б) показывают, что в установившемся энергоизолированном потоке сумма кинетической и потенциальной энергии, отнесенной к единице движущейся массы жидкости, остается постоянной вдоль трубки тока.

В случае внешних воздействий уравнение энергии для жидкого элемента, изображенного на рис. 3.1, записывается в следующем виде:

где dQ — количество теплоты., подводимой к единице массы жидкости от внешних источников; dL_T - механическая работа, совершаемая потоком жидкости против внешних сил; h — энтальпия основного потока; h_i — энтальпия вводимых потоков.

3.2. Скорость звука

Под скоростью звука a понимают скорость распространения малых возмущений. Сопоставляя скорость движения жидкости c со скоростью звука a , все течения можно разбить на дозвуковые, для которых $c < a$, и сверхзвуковые, для которых $c > a$.

Для вывода расчетных формул рассмотрим движение плоской звуковой волны в трубе постоянного сечения (рис. 3.2). Пусть в момент времени $t=t_1$ звуковая волна занимает положение $A-A$. Через промежуток времени dt фронт волны продвинется вдоль оси x на расстояние dx и займет положение $B-B$. Скорость распространения звуковых волн a в этом случае будет

$$a = dx/dt.$$

Рассмотрим далее объем $A-A-B-B$, ограниченный двумя выделенными волнами, и применим к нему закон о сохранении количества движения, не учитывая сил трения жидкости о стенки канала.

Заменяя массу m произведением плотности ρ на объем $dV = Fdx$ получаем $\rho Fdc dx = dp F dt$, или

$$dp = \rho dc dx / dt = \rho a dc$$

Для оценки скорости движения жидкости dc через сечение $A—A$ воспользуемся законом сохранения массы.

Поскольку жидкость, втекающая в рассматриваемый объем, не имеет стока (остается внутри объема), это приводит к повышению ее плотности на величину $d\rho$. С учетом сказанного

Отсюда

Подставляя (3.8) в (3.7), получаем

Таким образом, скорость звука определяется следующей зависимостью:

Процесс распространения звуковых волн можно с достаточной точностью считать изоэнтропийным. Тогда из уравнения изоэнтропы

следует, что

Заменяя постоянную выражением (3.10) и имея в виду (1.3), находим связь скорости звука с параметрами потока:

Из соотношения (3.11) вытекает однозначная связь скорости звука с абсолютной температурой потока: чем выше температура, тем больше скорость распространения звуковых волн.

3.3. Характерные скорости и относительные параметры течения в произвольном сечении одномерного потока

Анализ уравнений энергии (3.5), (3.5а) и (3.5б) показывает, что скорость потока не может расти беспредельно, а ограничивается некоторой максимальной величиной $c_{\text{макс}}$ которая достигается при полном переходе всей располагаемой энергии в кинетическую. Ясно, что при этом потенциальная энергия, характеризующаяся вторым членом в левой части уравнения энергии, оказывается равной нулю. Следовательно,

Отсюда

Изобразим на рис. 3.3 качественную картину изменения скорости потока и скорости звука вдоль такого воображаемого канала. Скорость потока будет увеличиваться от нуля до $c_{\text{макс}}$ а скорость звука — падать от a_0 до нуля. Ясно, что в этом случае обе рассматриваемые кривые неизбежно пересекутся в некоторой точке А, где скорость потока станет равной местной скорости звука.

Указанная скорость потока, имеющая важное значение во всех газодинамических исследованиях, получила название критической. Соответственно сечение, где эта скорость достигается, и параметры в этом сечении назовем критическими. Все критические величины в дальнейшем будем помечать звездочками в нижнем индексе.

Таким образом, критическая скорость — это скорость потока, равная местной скорости звука, т. е. в критическом сечении

Записывая (3.13) для критического сечения, получаем

Отсюда следует, что критическая скорость, так же как и максимальная скорость, полностью определяется параметрами полного торможения и выражается через них с помощью следующих соотношений:

Заменяя правую часть в (3.13) соотношением (3.16), приходим к еще одной важной записи уравнения энергии:

Пользуясь уравнением энергии, выразим параметры потока в произвольном сечении трубы тока через параметры торможения и скорость в этом сечении. Воспользуемся формулой (3.18) и разделим все ее члены на $\frac{\rho}{2} V^2$. Тогда

В полученном соотношении абсолютная скорость выражена в долях местной скорости звука и в долях критической скорости. Обозначим полученные безразмерные скорости $\frac{V}{a}$ и $\frac{V}{V^*}$. По смыслу введенных обозначений число M дает соотношение между кинетической и потенциальной энергией потока, а число $\frac{V}{V^*}$ определяет соотношение кинетической и полной энергии.

Отсюда, учитывая формулы (3.12) и (3.17), легко найти пределы изменения рассматриваемых безразмерных скоростей:

Связь между ними непосредственно следует из соотношения (3.19):

Запишем далее уравнение энергии в форме (3.56) и разделим его левую и правую части на $c_p T$:

Используя уравнение состояния и уравнение изоэнтропы, легко устанавливается связь относительного давления p_0/p и относительной плотности ρ_0/ρ с безразмерной скоростью M . Действительно,

Отсюда

Аналогичным образом устанавливается связь рассматриваемых параметров и с числом ν . В этом случае уравнение (3.56) необходимо разделить на srT_0 и сделать очевидную замену $\nu = \nu_0 \frac{srT_0}{\nu}$ вытекающую из соотношения (3.17). В результате

Полученные формулы устанавливают однозначную связь между относительными параметрами потока и безразмерными скоростями и имеют важное практическое значение, так как дают возможность по любому безразмерному параметру найти все остальные величины.

3.4. Распределение параметров потока вдоль канала произвольной формы

Характер движения жидкости в каналах определяется степенью внешних воздействий на нее. В практике мы наиболее часто сталкиваемся с геометрическим воздействием, когда имеет место только изменение проходной площади канала. Этот случай оказывается и наиболее простым для анализа.

Из уравнения неразрывности

исключим с помощью уравнения количества движения (2.26) член, учитывающий изменение плотности. С этой целью запишем (2.26) в виде

Заменим далее безразмерную скорость M на $\frac{v}{a}$ по соотношению (3.20) и разделим левую и правую части на dx . В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее изменение скорости с изменением площади:

При $\frac{dM}{M} > \frac{dA}{A}$ что означает бесконечный разрыв скорости и, следовательно, в сечениях, где $\frac{dM}{M} < \frac{dA}{A}$ переход через скорость звука физически невозможен.

Случай, когда $\frac{dM}{M} = \frac{dA}{A}$ требует особого анализа, который показывает возможность существования точки перегиба на кривой $M(x)$ если сечение канала имеет в этом месте минимум площади. Здесь $M < 1$ дозвуковой поток переходит в сверхзвуковой, а сверхзвуковой становится дозвуковым

Для осуществления такого перехода необходим определенный перепад давления, зависящий от степени расширения канала после минимального сечения.

Сказанное может быть наглядно продемонстрировано графически. На рис. 3.4 приведены две диаграммы, соответствующие изменению скорости в канале

Используя зависимости (3.22), (3.22а) и (3.22б), легко найти значения критических параметров, подставив в эти формулы значение . Тогда

3.5. Удельный расход и приведенный удельный расход

Удельный расход жидкости представляет собой секундный расход через единицу площади формулы (3.226) свяжем эту величину с безразмерной скоростью :

Полученная зависимость показывает, что удельный расход обращается в нуль при $U = 0$ и $U = 1$, но, при некоторой промежуточной скорости функция $q(U)$ достигает максимального значения. Условие экстремума

показывает существование двух экстремальных точек при $U = 0$ и $U = 1$. Последнему значению соответствует точка минимума $q(U)$. При $U = 0.5$ функция (3.27) достигает максимального значения.

3.7. Одномерные течения при различных внешних воздействиях

В общем случае на поток могут действовать подвод или отвод теплоты, массы, механической энергии, силы трения и т. д.

Одновременное воздействие всех или большей части указанных факторов затрудняет подробный качественный анализ и требует использования определенных математических соотношений. Получить эти соотношения можно при совместном решении следующей системы уравнений:

- 1) уравнения неразрывности в форме (3.2а);
- 2) уравнения импульсов (3.4), где напряжение трения целесообразно заменить известной гидравлической формулой

а суммарное изменение массы представить в виде

После указанных замен и некоторых преобразований уравнение (3.4) примет вид

(при записи этого уравнения отношение площади боковой поверхности dS к сечению канала F представлено следующим образом: ;

3) уравнения энергии (3.6), которое после аналогичных преобразований при условии равенства параметров вводимого и основного потоков может быть записано так:

4) уравнения состояния в дифференциальной форме

5) уравнения изменения энтропии

где dS_1 — приращение энтропии основного потока, обусловленное изменением его параметров в результате внешних воздействий; — приращение энтропии, вызванное смешением вводимых дополнительных потоков жидкости с основным потоком.

Пять приведенных уравнений дают возможность найти пять логарифмических производных параметров dc/c , dp/p , dT/T , $d\rho/\rho$, dS/S . Решение указанной системы уравнений приводит к следующему уравнению, отражающему закон обращения воздействия, сформулированный Л. А. Вулисом [4]:

Здесь η — параметр течения, изменение которого подлежит анализу (это может быть скорость c , давление p , плотность ρ , температура T); dR_x — характеристика рассматриваемого воздействия на выбранный параметр течения η (dF/F — при геометрическом воздействии, dQ — при тепловом, dL_T или dL_K — при механическом и dm/m — при расходном); g_m — коэффициент влияния данного воздействия на поток. Их значения определяются рассматриваемым воздействием и могут быть найдены непосредственно из приведенной табл. 3.1. Так, если анализируется изменение скорости под действием всех указанных факторов, то с учетом коэффициентов табл. 3.1 вместо общего уравнения (3.42) получим

В табл. 3.1 и уравнении (3.42), как и ранее, u — отношение средних скоростей вводимых газов к скорости основного потока.

Механическое воздействие. В соответствии с принятым в термодинамике правилом знаков будем считать, что если газ совершает работу против внешних сил, то $dL_T > 0$, а если работа совершается над газом, то $dL_T < 0$.

Продолжение таблицы 3.1

Воспользовавшись табл. 3.1 и уравнением (3.42) при условии, что все остальные частные воздействия отсутствуют, получим следующие соотношения для логарифмических производных скорости и давления:

Если газ совершает работу ($dL_T > 0$), то при $M < 1$ он ускоряется ($dc > 0$), а при $M > 1$ тормозится ($dc < 0$). Пределом ускорения дозвукового потока и торможения сверхзвукового потока при совершении внешней работы является значение $M=1$. Для перехода в сверхзвуковую (или дозвуковую) область течения необходимо изменение знака воздействия на поток, т. е. осуществление подвода работы к газу ($dL_T < 0$).

Энтальпия полного торможения уменьшается и достигает минимального значения в критическом сечении канала, где $M=1$; подвод энергии на сверхзвуковом участке сопла приводит к росту энтальпии h_0 . В механическом диффузоре картина будет обратной и максимум энтальпии полного торможения будет достигаться в критическом сечении. Термодинамические параметры p , ρ , T в механическом сопле уменьшаются по потоку, а в диффузоре возрастают.

Массообмен с внешней средой. Полагая теперь $dQ=0$ и $dL_T=0$, получим из табл. 3.1 следующие исходные уравнения:

Отсюда следует, что ввод дополнительной массы газа ускоряет дозвуковой поток (при $M < 1$ и $dm > 0$ получаем $dc > 0$), а отвод массы приводит к его торможению. Пределом ускорения дозвукового потока является достижение $M=1$ в некотором промежуточном сечении канала постоянного сечения. Для дальнейшего ускорения (перехода в область сверхзвуковых скоростей) необходимо изменить знак воздействия и отвести некоторую массу из основного потока.

Тепловое воздействие и тепловые скачки. Для анализа влияния теплообмена на характер движения газа в канале постоянного сечения используют соотношения, аналогичные предшествующим:

Отсюда видно, что при подводе теплоты к дозвуковому потоку скорость газа возрастает и в пределе может достигнуть скорости звука. Дальнейшее ускорение возможно только при изменении знака воздействия, т. е. путем отвода теплоты ($dQ < 0$). Рассматриваемый канал постоянного сечения называют тепловым соплом.

ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

7.1. Задачи моделирования и подобие

Значительная часть газодинамических проблем и практических задач решается до настоящего времени экспериментальным путем с некоторым теоретическим прогнозированием.

Два течения подобны, если по характеристикам одного можно получить характеристики другого посредством простого умножения модельных характеристик на некоторые постоянные коэффициенты, называемые коэффициентами подобия.

В механике различают геометрическое, кинематическое и динамическое подобие. Два тела геометрически подобны, если сходственные отрезки тел пропорциональны и углы между сходственными отрезками равны между собой. Потоки кинематически подобны, если скорости в сходственных точках пропорциональны и углы вектора скорости в сходственных точках одинаковы. Для динамического подобия необходима пропорциональность сил, действующих на сходственные элементы, и равенство углов соответствующих векторов сил.

Таким образом, когда речь идет о механическом или физическом подобии, имеется в виду геометрическое подобие исследуемых объектов и подобие силовых и скоростных полей.

Для обеспечения подобия моделируемых течений или явлений необходимо обеспечить равенство некоторых безразмерных комплексов, которые называют числами подобия.

Величины, значения которых зависят от принятой системы измерений, будем считать размерными. Безразмерные или отвлеченные величины не зависят от системы измерений и сохраняют свои численные значения в любой принятой системе размерных единиц.

Таким образом, для некоторых величин мы можем установить произвольным образом какие-то единицы измерения и эти единицы принять за основные, а размерности всех остальных величин выражать через основные, используя различные уравнения связи. По такому принципу строятся все используемые системы измерений.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называют размерностью.

Для обозначения размерности какой-либо величины a используется символическая запись $[a]$. Тогда размерности скорости c , давления p , плотности ρ , силы F могут быть записаны в виде

7.3. Примеры использования теории размерности в задачах гидрогазодинамики

Рассматривая символические записи размерности (7.1), легко заметить, что размерности производных величин могут быть записаны в виде степенного одночлена

Формулу, устанавливающую зависимость размерности какой-либо величины от основных единиц измерения, называют формулой размерности.

Пусть функциональная зависимость

определяет какой-то физический закон, где размерная величина a зависит от ряда независимых между собой размерных величин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Среди этих величин выделим те из них $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, которые имеют независимые размерности. В этом случае формула размерности ни одной из выбранных величин не может быть получена в результате степенной комбинации формул размерности остальных $k-1$ величин. Для примера такими величинами, имеющими независимые размерности, могут быть длина L , плотность и скорость L/T . Здесь, комбинируя в виде степенного многочлена плотность и скорость, нельзя получить размерность длины, так же как и в результате комбинации длины и скорости нельзя выразить размерность плотности. В то же время размерности длины L , кинематической вязкости и скорости L/T являются зависимыми между собой и допускают выражение размерности любой из этих величин через размерность оставшихся двух величин. Например,

Таким образом, используя величины с независимыми размерностями $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, размерности всех остальных величин a, a_{k+1}, \dots, a_n можно получить в результате комбинаций формул размерностей основных величин:

Изменим теперь масштабы основных величин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ в _____ раз. Тогда в новой системе единиц измерения численные значения этих величин будут равны

Размерности остальных величин _____ согласно зависимостям (7.3)
представятся в виде

Эти преобразования показывают, что величины, имеющие зависимые размерности, в новой системе измерений равны их значению в старой системе, умноженному на некоторые постоянные величины, составленные из переходных коэффициентов

. Пусть численное значение скорости, измеренной в каком-то сечении канала, равно $c=600$ м/мин, т. е. в качестве основных единиц измерения здесь приняты $[L]$ и $[T]$. Изменим эти единицы, приняв _____ Тогда

Если масштаб длины мы увеличим теперь в 100 раз ($\beta_1 = 100$), а масштаб времени — в 60 раз ($\beta_2 = 60$), то численное значение скорости в новой системе единиц c' будет равно

С учетом сказанного запишем функциональное соотношение (7.2) в новой системе измерений:

Поскольку значения переходных коэффициентов могут быть любыми, выберем их таким образом, чтобы первые k аргументов в соотношении (7.4) обратились в единицу. Для этого достаточно принять

Тогда остальные величины, имевшие зависимые размерности, в новой относительной системе измерений будут определяться следующими безразмерными величинами:

Число безразмерных комплексов (7.6) равно, очевидно, $(n+1)-k$, так как первые k аргументов посредством соответствующего выбора коэффициентов β_i , обратились в единицу. Таким образом, вместо размерной зависимости величины a от n аргументов γ_i (7.2) мы приходим к безразмерной зависимости величины Π от $(n-k)$ безразмерных аргументов Π_i :

Этот результат, следующий из теории размерности, составляет содержание так называемой л-теоремы, согласно которой любое физическое соотношение между $n+1$ размерными величинами может быть представлено в виде соотношения между $n+1-k$ безразмерными комплексами, где k — число величин, имеющих независимые размерности.

Действительно, пусть $n=k$ и мы ищем вид функциональной связи величины a с параметрами a_1, a_2, \dots, a_k , каждый из которых имеет независимые размерности и, следовательно, из этих параметров нельзя составить ни одной безразмерной зависимости. Тогда согласно (7.4)

Использование масштабов (7.5) дает

Отсюда

Постоянная A может быть найдена либо опытным путем, либо в результате теоретического решения соответствующим образом сформулированной математической задачи.

Значимость получаемых результатов зависит от глубины проникновения в суть исследуемого вопроса и, конечно, от опыта практического использования теоретических положений.

Движение жидкости в трубах. Эта задача в случае движения несжимаемой жидкости описывается дифференциальным уравнением и для стабилизированного ламинарного режима течения в цилиндрической трубе круглого сечения имеет точное решение.

Используя выписанные параметры, найдем падение давления на единице длины канала l :

В качестве основных величин примем ρ , a , $U_{ср}$, имеющие следующие формулы размерности:

Вязкость μ имеет зависимую размерность и выражается через формулы размерностей основных величин по соотношению

Используя π -теорему, найдем значения безразмерных параметров Π и Π_1 :

Показатели m_1, m_2, m_3 и n_1, n_2, n_3 определяются из условия безразмерности величин Π и Π_1 . Согласно формулам размерности получим

Для нулевой размерности комплекса $[\Pi]$ необходимо выполнение следующих условий:

Приравнивая показатели к нулю, находим $n_1 = 1$; $n_2=1$; $n_3=1$. Таким образом,

Постоянный множитель в знаменателе, равный $1/2$, введен для придания смысла скоростного напора комплексу

В результате размерная функциональная зависимость (7.9) в безразмерном виде принимает следующий вид:

Отсюда потеря давления на участке трубы длиной l равна

Сопротивление тела, движущегося в жидкости. При движении произвольного тела в безграничном потоке несжимаемой жидкости его сопротивление P_x будет зависеть от размера, характеризуемого некоторым линейным размером l , скорости движения c , угла атаки α , инерционных свойств жидкости, определяемых плотностью ρ , и ее вязкости μ .

Таким образом, сопротивление P_x тела заданной формы при установившемся движении будет определяться следующей функциональной зависимостью:

$P_x=f(\rho, c, l, \alpha, \mu)$. Три параметра в данном случае имеют независимые размерности

Размерности остальных величин оказываются зависимыми от и выражаются через основные величины по следующим соотношениям:

Поскольку угол атаки α является безразмерным параметром, составим, как и ранее, два комплекса Π и Π_1 :

Используем далее формулы размерностей

Учитывая нулевую размерность величины Π , получаем $m_1=1; m_2=2; m_3=2$. В результате

Второй комплекс Π_1 очевидно совпадает с аналогичным комплексом предыдущей задачи. Следовательно,

или

Если вновь ввести в полученное соотношение (7.13) постоянный множитель $1/2$, то безразмерная величина Γ будет представлять собой коэффициент лобового сопротивления C_x , с которым мы уже неоднократно сталкивались ранее:

Видим, что в рассматриваемом случае коэффициент сопротивления произвольного тела является функцией двух переменных — угла атаки α и Re .

Для крыловых профилей при больших Re влияние этого параметра оказывается несущественным. По этой причине для них обычно в расчет берется только угол α и $C_x=f(\alpha)$. Для шара или цилиндра при его поперечном обтекании угол атаки вообще выпадает из числа определяющих параметров. Следовательно, $C_x=f(Re)$.

7.4. Критерии подобия и моделирование течений жидкости

Для подобия двух явлений необходимо обеспечить постоянство численных значений безразмерных комбинаций, образующих базу. Безразмерные базовые комбинации называют критериями подобия.

В общем случае база может состоять из целого ряда критериев. Чем сложнее исследуемое явление, тем шире обычно оказывается критериальная база. Например, нестационарное движение жидкости в канале определяется характерной скоростью u_0 , линейным размером L , характерным временем t_0 , вязкими и инерционными свойствами жидкости, характеризующимися вязкостью μ и плотностью ρ , а также массовой силой, для характеристики которой можно принять удельный вес

Таким образом, систему определяющих параметров составляют $u_0, L, t_0, \rho, g, \mu$. Здесь число определяющих параметров $n=6$, а число параметров с независимыми размерностями $k=3$. Следовательно, база для механически подобных течений будет иметь три безразмерных параметра, получивших в теории подобия следующие названия:

Критерии подобия должны быть одинаковыми для природы и модели. Их постоянство обеспечивает подобие течения в сходственных точках геометрически подобных каналов.

Если массовые силы играют определяющую роль в процессе движения жидкости, то моделирование ведется при постоянном числе Фруда, а учет влияния числа Рейнольдса производится в случае необходимости на основании отдельной серии испытаний, в процессе которых устанавливается степень его влияния на исследуемую характеристику.

Подобное моделирование гидрогазодинамических процессов называют приближенным, или частичным и на практике используют наиболее часто.

Несмотря на это при решении любой задачи моделирования всегда необходимо иметь полную базу. Отбрасывание того или иного критерия возможно только после детального анализа его роли в исследуемом процессе, причем совершенно ясно, что частичное моделирование является вынужденной мерой и в некоторых случаях может приводить к заметным ошибкам, которые далеко не всегда удастся предвидеть.

Обтекание тонких тел вращения

§ 1. Осесимметричное обтекание

Знание распределения коэффициента давления

позволяет вычислить силу и коэффициент волнового сопротивления тела вращения, обтекаемого сверхзвуковым потоком при нулевом угле атаки. Для вычисления волнового коэффициента сопротивления используем формулу

где X – сила лобового сопротивления;
 ρV^2 – динамический напор;

S_n – характерная площадь (например, площадь крыла в плане, площадь миделевого сечения корпуса и др.);

c_{fx} – аэродинамический коэффициент силы лобового сопротивления.

При этом учтем:

В результате получим:

где x_k – длина тела вращения;

Рис. 1. Тело вращения с параболической образующей

Отдельные образцы летательных аппаратов выполняются в виде тонких заостренных тел вращения (некоторые типы ракет, артиллерийских снарядов и др.) или же имеют в качестве одного из конструктивных элементов корпус, представляющий собой по форме такое тело.

Рассмотрим задачу об установившемся обтекании тонких тел, установленных под малыми углами атаки. Возмущенное течение около таких тел мало отличается от невозмущенного. Такое течение может быть исследовано при помощи соответствующих *линеаризованных уравнений аэродинамики*.

Линеаризованные уравнения получаются из общих уравнений движения в цилиндрических координатах и уравнения неразрывности.

Уравнение для потенциальной функции имеет вид

Уравнение (4) используют для определения параметров движения (уравнение потенциала скоростей).

В соответствии со свойством линеаризованного возмущенного течения

где добавочные возмущенные составляющие скорости

Поэтому имеет место соотношение

для скорости звука, в котором принимаем

Внеся в уравнение (4) это соотношение, а также значения (5) и величины

и учитывая, что вторые производные от φ' являются величинами второго порядка малости и можно пренебречь членами, содержащими произведения этих производных и возмущенных составляющих скорости V_x' , V_r' или V_v' . В результате находим линеаризованное дифференциальное уравнение для добавочной величины потенциальной функции φ'

Разделим все члены этого уравнения на

Уравнение (7) используется для исследования потока около тонких тел вращения под *малым углом атаки*, т.е. *неосесимметричного маловозмущенного течения*. При *осесимметричном обтекании* (угол атаки равен нулю) уравнение упрощается, т.к. составляющая скорости

и, следовательно

Уравнения (7) и (8) составляют *теоретическую основу аэродинамики стационарных линеаризованных течений около тонких тел вращения*. В результате решения этих уравнений определяют *потенциал возмущения* ϕ' . Решение уравнения для потенциала ϕ' ведется при следующих граничных условиях. На границе возмущенной области потенциал ϕ' должен быть равен нулю. В данном случае такой границей является поверхность слабой ударной волны, возникающей перед тонким заостренным телом и представляющей собой фактически линию слабого возмущения (простую волну сжатия) или линию Маха с углом наклона образующей к направлению вектора скорости, равным

На поверхности обтекаемого тела потенциал ϕ' должен удовлетворять условию безотрывного обтекания, в котором функцию, описывающую обтекаемую поверхность вращения, можно представить в виде

Тогда

(9)

где

(10)

Потенциал скоростей линеаризованного потока φ , обтекающего тело вращения под малым углом атаки (рис. 2), можно представить в виде суммы трех составляющих: потенциала невозмущенного потока φ_∞ , добавочного потенциала продольного возмущенного (осесимметричного) течения $\varphi_1'(x, r)$ и второго добавочного потенциала $\varphi_2'(x, r, \nu)$, возникающего от поперечного обтекания:

)

Рис. 2. Тонкое тело вращения в линеаризованном потоке под малым углом атаки:
а – неосесимметричное обтекание; б – осесимметричное обтекание;
в – добавочное поперечное обтекание

В теории линеаризованных течений φ_1' и φ_2' рассматриваются как функции, которые, являясь решениями уравнений движения, определяют независимые друг от друга потоки.

Добавочный потенциал от поперечного обтекания должен быть таким, чтобы на поверхности тела исчезла радиальная составляющая набегающего потока

Эта составляющая скорости может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой.

Коэффициент давления определяется по формуле

Эту величину коэффициента давления можно представить в виде суммы двух составляющих, т.е.

определяется условиями осесимметричного обтекания:

13)

а другая - поперечным обтеканием, зависящим от угла атаки:

§ 2. Расчет осесимметричного обтекания

Задача о линеаризованном осесимметричном обтекании тонкого тела вращения будет решена, если найти добавочный потенциал φ_1' , удовлетворяющий линеаризованному уравнению (8):

Представим теперь, что в некоторой точке $x = \varepsilon$ на оси тела находится источник жидкости с расходом (интенсивностью) q . Потенциал скоростей, индуцируемый этим источником в точке с координатами (x, r) , расположенной на шаровой поверхности радиуса

будет определяться в виде

Если теперь представить, что вдоль оси тела на участке от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = x - \alpha' r$ расположена система источников с переменной интенсивностью $q = -4\pi f(\varepsilon)$, отнесенной к единице длины, то суммарный потенциал в рассматриваемой точке (x, r) от действия всех источников выразится формулой

$$(15)$$

Решение (15) представляет собой потенциальную функцию от источников, непрерывно распределенных вдоль оси тела. Найденное решение отражает содержание *метода источников*, согласно которому обтекаемое тело заменяется системой непрерывно распределенных вдоль его оси как источников, так и стоков.

Закон распределения источников (стоков), т.е. вид функции $f(\varepsilon)$, должен быть таким, чтобы в результате наложения невозмущенного потока на течение от этих источников одна из линий тока суммарного потока совпадала с образующей тела вращения, т.е. φ_1' должна удовлетворять условию безотрывного обтекания.

Воспользовавшись условием безотрывного обтекания, получим зависимость для определения функции $f(x)$:

$$f(x) = -r (dr / dx) V_{\infty} . \quad (16)$$

Это уравнение можно записать в виде

где $S(x) = \pi r^2$ – текущее значение площади поперечного сечения тонкого тела.

Выражение (17) для функции $f(x)$, определяющей закон распределения источников вдоль оси в предельном случае при $r \rightarrow 0$, можно использовать для расчета составляющей скорости, необходимой при вычислении давления на поверхности тонких реальных тел вращения. В результате

Таким образом для расчета скорости по формуле (18) необходимо знать форму тела вращения и распределение площади вдоль оси, т.е. вид функции $S(x)$.

Пусть, например, имеем тело вращения с параболической образующей (рис. 1), уравнение которой задано в виде

$$(19)$$

где x — расстояние от носка до места миделева сечения тела вращения с радиусом $r_{\text{мид}}$.

В соответствии с уравнением (19) площадь поперечного сечения

Найдем отсюда вторую производную:

Произведя замену x на $\varepsilon = x - a' r \operatorname{ch} z$, найдем

После подстановки (22) в (18), получим

где \dots (24)

Введем обозначения

(25)

где величины I_n определяются в виде интегралов

)

В соответствии с обозначением (25)

В случае более общего задания функции $S''(x)$ в виде многочлена

$$(28)$$

выражение, аналогичное (27), можно представить следующим образом:

$$(29)$$

Коэффициенты a_n зависят от вида образующей тела вращения, а b_n также от скорости V_∞ . Значения функции i_x^n для $n = 0, 1, 2$, представленные в виде (25), соответствуют заданию образующей тела по уравнению параболы второй степени.

Для тела вращения с уравнением образующей более высокой степени необходимо вычислять значения i_x^n для $n = 3, 4$, и т.д. В частности, если уравнение образующей таково, что производная $S''(x)$ (см. (28)) определяется по уравнению

$$(28')$$

то в соответствии с (29) составляющая скорости

$$(29')$$

где i_x^n вычисляется для значений $n = 0, 1, 2$, по формулам (25), а для $n = 3$ из выражения

$$(30)$$

Как частный случай, из соотношения (27) можно получить выражение для составляющей скорости на тонком конусе. Для этого надо заменить $1 / \lambda_{\text{мид}}$ на $\beta_0 = \beta_k$ (угол заострения параболического тела вращения у острия) и принять

да

$$(31)$$

Имея в виду, что в соответствии с (25) и (26) для конуса где

напишем для составляющей скорости

По найденным значениям V_{x1}' можно найти по формуле (13) коэффициент давления на поверхности тела вращения в соответствующей точке. В частности на конической поверхности, где добавочная составляющая скорости определяется по (31'), коэффициент давления

)

В соответствии с тем, что зависимость (32) определяет коэффициент волнового сопротивления тонкого конуса, т.е.

Для тонкого тела вращения произвольной формы расчет коэффициента волнового сопротивления следует вести по формуле

в которой коэффициент давления в соответствии с (18) и (13)

Полагая $dr/dx = tg \approx \beta$, найдем формулу для коэффициента волнового сопротивления

где

числовой образующей с уравнением $r = (r_{\text{мид}} / x_{\text{мид}}) \cdot x \cdot (2 - x / x_{\text{мид}})$
производная

Интеграл в (33) может быть выражен в соответствии с (22) в виде

Здесь N_1 – некоторая функция безразмерной координаты и параметра u , определяемого из условия

где $u_0 = 1 / (\alpha' \beta_0)$. Принимая во внимание (35) – (37), зависимость (33) можно представить в следующем общем виде

$$(38)$$

где N – некоторая функция параметра u_0 и безразмерной координаты

С учетом (38) коэффициент волнового сопротивления (34)

$$(39)$$

где D – некоторая функция только параметра u_0 .

Общие формулы (38) и (39) позволяют сделать следующий вывод об аэродинамическом подобии потоков около параболических тел вращения: Если эти потоки характеризуются одним и тем же значением параметра u_0 , то в соответственных точках с одинаковыми безразмерными координатами будут одинаковы отношения

В аэродинамически подобных потоках тела вращения испытывают такие осевые усилия, что отношения $c_{x\beta} / \beta_0^2$ для них будут одинаковыми. Таким образом, критерием подобия в данном случае является параметр

Для чисел $M_\infty \gg 1$ параметр u_0 можно представить в виде

$$(41)$$

где $K_1 = \beta_0 M_\infty = M_\infty / \lambda_{\text{мид}}$.

Умножая обе части (38) на M_∞^2 и учитывая зависимость (41), найдем

$$(42)$$

где N_2 – некоторая функция аргументов K_1 и M_∞ . В соответствии с выражением (42) в данной точке функция давления $(p_1 / p_\infty - 1)$ зависит только от параметра K_1 . Закон подобия по этому параметру подтверждается также результатами расчета по методу характеристик.

Из выражения $u_0 = (\alpha' \beta_0)^{-1}$ следует, что если тело вращения тонкое, т.е. удлинение велико, то для сохранения неравенства $u_0 > 1$ необходимо выполнить условие $M_\infty \rightarrow 1$. Если же число $M_\infty \rightarrow 1$, то, как следует из формулы (31'), возмущенная скорость по абсолютной величине достигает бесконечно большого значения, что физически невозможно.

Таким образом, теория линеаризованных течений и законы их подобия пригодны при одновременном соблюдении двух неравенств:

Сравнение с экспериментальными данными показывает, что расчеты по линеаризованной теории и применение критериев подобия возможны для удлинений $\lambda_{\text{мид}} \geq 2$ и чисел

Силовое воздействие среды на движущееся тело

§ 1. Составляющие аэродинамических сил и моментов

Силы от нормального и касательного напряжений, непрерывно распределенные по поверхности обтекаемого тела, могут быть приведены к одному главному вектору

аэродинамических сил и главному вектору момента этих сил (рис. 1) относительно какой-либо точки приведения. Такой точкой может быть произвольная точка тела. В частности – центр тяжести, носок корпуса ракеты, точка передней кромки крыла и др.

В инженерной практике имеют дело не с векторами \vec{R} и \vec{M} , а с их проекциями на оси какой-либо системы координат. Рассмотрим две наиболее часто встречающиеся в аэродинамике скоростную и связанную системы координат (рис. 1). Продольная ось Ox скоростной системы направлена всегда по вектору скорости движения центра масс аппарата, вертикальная ось Oy расположена в плоскости симметрии и направлена вверх (положительное направление), ось Oz направлена вдоль размаха правого крыла (правая система координат). В обратном движении продольная ось совпадает с направлением скорости потока, а ось Oz расположена вдоль размаха левого крыла так, чтобы сохранялась правая система координат. В этом случае скоростную систему координат называют также поточной системой координат.

В связанной системе координат, жестко соединенной с летательным аппаратом, ось Ox направлена вдоль главной продольной оси инерции, вертикальная ось Oy_1 расположена в вертикальной плоскости симметрии, горизонтальная ось Oz_1 направлена вдоль размаха правого крыла и образует правую систему координат. Положительное направление оси Ox_1 от хвостовой части к носку соответствует случаю необращенного движения (рис. 1). В обеих системах координат – скоростной (поточной) и связанной – их начало располагается в центре тяжести летательного

Рис. 1. Схема действующих на летательный аппарат аэродинамических сил и моментов в скоростной (x, y, z) и связанной (x_1, y_1, z_1) системах координат

Проекции векто на оси x, y, z скоростной системы координат называются соответственно силой лобового сопротивления X , подъемной силой Y и боковой силой Z . Соответствующие проекции того же вектора на оси x_1, y_1, z_1 связанной системы координат называются продольной (осевой) (X_1 или R), нормальной (Y_1 или N) и поперечной Z_1 силами.

Проекции вектс в той и другой системах координат имеют одно и то же название, а именно: составляющие относительно продольной оси называются моментом крена (соответствующие обозначения в скоростной системе M_x , в связанной M_{x1}), составляющие относительно вертикальной оси — моментом рыскания (M_y, M_{y1}), составляющие относительно поперечной оси — моментом тангажа (M_z, M_{z1}).

В соответствии со сказанным векторы аэродинамических сил и момента в скоростной и связанной системах координат:

(1)

(2)

где i, j, k, i_1, j_1, k_1 — единичные векторы по осям соответственно скоростной и связанной систем координат. Положительным моментом относительно оси будем считать момент, который стремится повернуть летательный аппарат против часовой стрелки (если вести наблюдение за движением с конца вектора момента). В соответствии с принятым расположением осей координат на рис. 1 положительный момент увеличивает угол атаки, отрицательный — уменьшает.

Величина и направление действия сил и моментов зависят при данной скорости полета на некоторой высоте от ориентировки тела относительно вектора скорости (или, если рассматривается обращенное движение, относительно направления скорости убегающего потока). Эта ориентировка определяется углом атаки α - углом между осью x_1 и проекцией вектора на плоскость x_1Oy_1 , и углом скольжения β - углом между вектором и плоскостью x_1Oy_1 (рис. 1).

§ 2. Пересчет аэродинамических сил и моментов с одной системы координат на другую

Зная углы α и β , можно пересчитать в соответствии с правилами аналитической геометрии составляющие силы и момента в одной системе координат на составляющие в другой системе координат. В частности, пересчет составляющих аэродинамической силы и момента в связанной системе соответственно на силу лобового сопротивления и момент крена в скоростной системе координат осуществляет

(3)

(3')

где
осями Ox_1 , Oy_1 и Oz_1 .

— косинусы углов соответственно между осью Ox и

Аналогично записываются выражения для других составляющих вектора силы, а также для составляющих вектора момента. Значения направляющих косинусов, используемых для пересчета сил и моментов с одной системы координат на другую, приведены в табл. 1.

В соответствии с данными табл. 1 формулы (3) и (3') принимают следующий вид:

(4)

(4')

Для случая движения летательного аппарата, изображенного на рис. 1, из уравнения (4) получим с соответствующими знаками

Аналогично пересчитывают силы и моменты со скоростной на связанную систему координат. Например, используя данные табл. 1, получим для продольной силы и момента крена следующие пересчетные формулы:

(5)

(5')

§ 3. Определение аэродинамических сил и моментов по известному распределению нормального давления и касательного напряжения. Понятие об аэродинамических коэффициентах

Аэродинамические силы и моменты и их коэффициенты. Рассмотрим следующую задачу. Пусть при некоторых углах атаки и скольжения, а также заданных параметрах набегающего потока (скорость V_∞ , статическое давление p_∞ , плотность ρ_∞ и температура T_∞) известно распределение по поверхности обтекаемого тела давления p и касательного напряжения τ и требуется определить суммарные значения аэродинамических сил и моментов.

На выделенную элементарную площадку dS поверхности тела действуют нормальная сила от избыточного давления $(p - p_\infty)dS$ и касательная к площадке сила τdS . Сумма проекций этих сил на ось x поточной (скоростной) системы координат равна

(6)

Две другие проекции на оси y, z получаются по аналогичной формуле с соответствующей заменой косинусов. Чтобы получить результирующие силы, надо проинтегрировать выражение (6) по всей поверхности S . Вводя в полученные соотношения обозначения коэффициента трения c_{fx} и коэффициента давления c_{px} и местного скоростного напора $q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2$, получим следующие формулы для силы лобового сопротивления, подъемной и боковой сил:

(7)

(8)

(9)

В качестве характерной площади S_n может быть выбрана произвольная поверхность, например площадь крыла в плане, площадь наибольшего (миделевого) сечения корпуса и др. Интегралы в формулах (7) - (9) являются безразмерными величинами, учитывающими влияние на аэродинамические силы характера обтекания тела заданной геометрической формы и обусловленного этим обтеканием распределения безразмерных коэффициентов давления и трения.

В формуле (7) для силы X безразмерная величина обычно обозначается c_x и называется аэродинамическим коэффициентом силы лобового сопротивления. В двух других формулах вводятся соответствующие обозначения величины c_y и c_z , первая из которых называется коэффициентом подъемной силы, а вторая — коэффициентом боковой силы. С учетом сказанного

$$X = c_x q_\infty S_n, \quad Y = c_y q_\infty S_n, \quad Z = c_z q_\infty S_n. \quad (10)$$

Аналогично формулам (7) - (9) для сил могут быть получены общие соотношения для моментов. Для примера рассмотрим такое соотношение для момента крена M_x . Очевидно, элементарная величина этого момента dM_x определяется суммой моментов относительно оси x сил, действующих на площадку dS в плоскости, перпендикулярной оси x . Если координаты площадки dS будут y и z , то элементарная величина момента

Интегрируя это выражение по поверхности S и вводя безразмерный параметр

в котором L – некоторый характерный геометрический размер, получим формулу для момента крена:

$$M_x = m_x q_\infty S_n L. \quad (11)$$

Параметр m_x называется аэродинамическим коэффициентом момента крена. Аналогично записываются формулы для других составляющих момента:

$$M_y = m_y q_\infty S_n L, \quad M_z = m_z q_\infty S_n L. \quad (12)$$

Безразмерные параметры m_y и m_z называются соответственно коэффициентами моментов рыскания и тангажа.

Соответствующие аэродинамические коэффициенты сил и моментов могут быть введены и в связанной системе координат. При помощи этих коэффициентов силы и моменты можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_1 = R &= c_{x1} q_\infty S_n = c_R q_\infty S_n; & M_{x1} &= m_{x1} q_\infty S_n L; \\ Y_1 = N &= c_{y1} q_\infty S_n = c_N q_\infty S_n; & M_{y1} &= m_{y1} q_\infty S_n L; \\ Z_1 &= c_{z1} q_\infty S_n; & M_{z1} &= m_{z1} q_\infty S_n L. \end{aligned} \quad (13)$$

Величины c_{x1} (c_R), c_{y1} (c_N), c_{z1} называются соответственно коэффициентами осевой (продольной), нормальной и поперечной сил, а параметры m_{x1} , m_{y1} и m_{z1} — коэффициентами моментов крена, рыскания и тангажа.

В некоторых случаях вместо указанных величин коэффициентов момента в связанных осях применяют обозначения

$$c_{mx} = m_{x1}; \quad c_{my} = m_{y1}; \quad c_{mz} = m_{z1}.$$

Характерные геометрические размеры. Абсолютная величина аэродинамического коэффициента, являющаяся в известной степени произвольной, зависит от выбора характерных геометрических размеров S_n и L . Однако для удобства практических расчетов заранее уславливаются о выборе той или иной характерной геометрической величины. В ракетной технике в качестве характерной площади принимают обычно площадь миделевого (наибольшего) поперечного сечения корпуса $S_n = S_{мид}$, а за характерный линейный размер L берут длину ракеты.

В аэродинамических расчетах самолетных схем за характерные размеры принимают площадь крыльев в плане $S_n = S_{кр}$, размах крыльев l (расстояние между боковыми кромками) или хорду крыла b . Хордой называется отрезок, равный расстоянию между наиболее удаленными точками профиля (сечения) крыла. Для крыла прямоугольной формы в плане хорда равна ширине крыла. На практике чаще всего крыло имеет переменную по размаху хорду. Для такого крыла в качестве характерного размера чаще всего выбираются средняя геометрическая хорда $b = b_{ср}$, равная значению $b_{ср} = S_{кр} / l$ или средняя аэродинамическая хорда $b = b_{САХ}$, определяемая как хорда профиля эквивалентного прямоугольного крыла, у которого при одинаковой площади в плане моментные аэродинамические характеристики с известным приближением будут такими, как у заданного.

При расчетах сил и моментов по известным аэродинамическим коэффициентам необходимо использовать те геометрические размеры, по которым были вычислены эти коэффициенты. Если возникает необходимость проводить такие расчеты по другим геометрическим размерам, то следует предварительно пересчитать аэродинамические коэффициенты на соответствующий геометрический размер.

Рис. 2. Построение поляры первого рода ЛА: а) график функции $c_x = c_x(\alpha)$; б) график функции $c_y = c_y(\alpha)$; в) поляра первого рода

Поляра первого рода строится при помощи графиков функций $c_x = c_x(\alpha)$ и $c_y = c_y(\alpha)$ таким образом, что значения c_x и c_y откладываются соответственно по осям абсцисс и ординат. При этом у каждой точки кривой записывается соответствующий угол атаки, который является в данном случае параметром поляры. Таким путем на кривой $c_y = f(c_x)$ производится разметка углов атаки.

Для того, чтобы пересчитать аэродинамические коэффициенты на соответствующий геометрический размер, надо воспользоваться зависимостями

$$c_1 S_1 = c_2 S_2 \quad (\text{для коэффициентов сил}) \text{ и}$$
$$m_1 S_1 L_1 = m_2 S_2 L_2 \quad (\text{для коэффициентов моментов}),$$

полученными из условий неизменности величин сил и моментов, действующих на один и тот же ЛА. По этим зависимостям находятся соответственно коэффициенты c_2 и m_2 , пересчитанные на новые характерные размеры S_2 и L_2 :

$$c_2 = c_1 (S_1 / S_2), \quad m_2 = m_1 (S_1 L_1 / S_2 L_2),$$

где прежние размеры S_1, L_1 и аэродинамические коэффициенты c_1, m_1 , а также новые размеры S_2, L_2 являются известными величинами.

Поляра летательного аппарата. В качестве важнейшей аэродинамической характеристики широко используют так называемую полярю летательного аппарата, устанавливающую зависимость между подъемной силой и силой лобового сопротивления или, что то же самое, между коэффициентами подъемной силы и лобового сопротивления в поточной системе координат. Эта кривая, называемая полярюй первого рода (рис. 2, в), представляет собой геометрическое место концов векторов полной аэродинамической силы, действующей на летательный аппарат при разных углах атаки (или вектора коэффициента c_F этой силы, определяемого в соответствии с соотношением $c_F = F / S_n q_\infty$).

Поляра первого рода удобна в практическом применении, так как позволяет легко определить для любого угла атаки такую очень важную аэродинамическую характеристику летательного аппарата, как аэродинамическое качество

$$K = c_y / c_x = Y / X. \quad (14)$$

В случае если масштабы c_y (или Y) и c_x (или X) одинаковы, то K равно тангенсу угла наклона к оси абсцисс вектора, проведенного из начала координат (полюса) в точку полярной диаграммы, соответствующую выбранному углу атаки.

На поляре можно определить наивыгоднейший угол атаки $\alpha_{наив}$, соответствующий максимальному качеству

$$K_{max} = \text{tg } \alpha_{наив}, \quad (15)$$

если из начала координат провести касательную к поляре.

К числу характерных точек поляры относится точка $c_{y \max}$, соответствующая максимальной подъемной силе, которая достигается при критическом угле атаки $\alpha_{кр}$. На кривой можно отметить точку, определяющую минимальный коэффициент лобового сопротивления $c_{x \min}$ и соответствующие значения угла атаки и коэффициента подъемной силы.

Поляра будет симметрична относительно оси абсцисс, если ЛА обладает горизонтальной симметрией. Для такого ЛА значение $c_{x \min}$ соответствует нулевой подъемной силе $c_y = 0$.

Наряду с полярной первого рода иногда пользуются полярной второго рода, отличающейся тем, что она строится в связанной системе координат, по оси абсцисс которой откладываются значения коэффициента продольной силы c_R , а по оси ординат — коэффициенты нормальной силы c_N (рис. 3). Эта кривая применяется, в частности, при прочностных расчетах летательных аппаратов.

В наиболее общем случае аэродинамические коэффициенты зависят для данной формы тела и угла атаки от таких безразмерных параметров, как число Маха $M_\infty = V_\infty / a_\infty$ и число Рейнольдса $Re = V_\infty L \rho_\infty / \mu_\infty$. Здесь a_∞ — скорость звука в набегающем потоке; ρ_∞ и μ_∞ — соответственно плотность и динамическая вязкость газа; L — длина тела.

Центр давления и фокус. Центром давления летательного аппарата называется некоторая точка приложения равнодействующей аэродинамических сил. Обычно принимается, что эта условная точка расположена на одной из основных осей — продольной оси летательного аппарата, проходящей через центр тяжести, оси симметрии тела вращения или на хорде профиля.

Рис. 3. Поляра второго рода

Положение центра давления обычно определяется координатой $x_{ц.д.}$, отсчитываемой от головной передней точки контура обтекаемого тела. Если известны момент тангажа M_z относительно этой точки и нормальная сила N (рис. 4), то координата центра давления

$$x_{ц.д.} = - M_z / N . \quad (16)$$

Рис. 4. К определению центра давления (а) и фокуса (б)

Момент M_z , стремящийся уменьшить угол атаки, считается отрицательным (рис. 4, а); тогда координата $x_{ц.д.}$ получается положительной. Принимая во внимание, что

$M_z = m_z q_\infty S_n b$ и $N = c_N q_\infty S_n$,
получим

$$x_{ц.д.} = - m_z b / c_N,$$

откуда

$$x_{ц.д.} / b = c_{ц.д.} = - m_z / c_N. \quad (17)$$

Безразмерная величина $c_{ц.д.}$, определяемая как отношение расстояния до центра давления к характерной длине тела (в данном случае к хорде крыла b), называется коэффициентом центра давления. При малых углах атаки, когда коэффициенты подъемной и нормальной сил приблизительно равны ($c_y \approx c_N$),

$$c_{ц.д.} = - m_z / c_y. \quad (18)$$

Фокус представляет собой точку приложения равнодействующей всех добавочных сил, вызванных углом атаки. Если на хорде выбрать точку F , координата которой $x_n = x_F$ определяется из условия (см. рис. 4, б)

(19)

то коэффициент момента относительно этой точки не будет зависеть от c_y и при всех (малых) углах атаки оказывается величиной постоянной. Эта точка называется аэродинамическим фокусом или просто фокусом данного тела.

Зависимость между центром давления и фокусом определяется соотношением

где

Для симметричной конфигурации $m_{z0} = 0$ и, следовательно, центр давления совпадает с фокусом.

§ 4. Статическая устойчивость

При движении тела случайное возмущение (начальный толчок при сходе со стартового устройства, порывы ветра, отклонение от заданного режима двигателя и др.) может изменить углы атаки и скольжения. Возникающий вследствие этого момент приводит после прекращения действия возмущения к дальнейшему изменению этих углов. Если при этом изменении углы α и β стремятся к первоначальным значениям, то поле будет статически устойчивым, если отклонение продолжает возрастать, то статически неустойчивым.

Статическая устойчивость подразделяется на продольную статическую устойчивость, статическую устойчивость пути и поперечную статическую устойчивость.

При наличии продольной статической устойчивости возникающий продольный момент относительно центра тяжести будет стабилизирующим, т.е. будет стремиться вернуть угол атаки к прежнему значению. В этом случае направление изменения момента противоположно изменению угла α .
Следов статической устойчивости можно выразить
неравенства

В случае продольной статической неустойчивости возникает дестабилизаторный момент, который стремится увеличить угол атаки. В этом случае продольной статической неустойчивости будут неравенства

Статическая устойчивость пути характеризуется неравенствами

Статическая неустойчивость пути — неравенствами

В первом случае направления изменений момента рысканья и угла скольжения различны, во втором — одинаковы. Соответственно моменты будут стабилизирующими и дестабилизирующими моментами пути.

Мерой поперечной статической устойчивости (или статической устойчивости крена) является произв:

Если производная $\frac{d\delta}{dt}$, то ЛА обладает поперечной статической устойчивостью; если $\frac{d\delta}{dt} > 0$, то имеет место поперечная статическая неустойчивость.

ЛА нейтрален в отношении продольной статической устойчивости, если имеют место равенства $\frac{d\delta}{dt} = 0$ и $\frac{d\delta}{dt} = 0$.

Использование понятий о коэффициенте центра давления и фокусе для оценки продольной статической устойчивости. В качестве критерия продольной статической устойчивости можно принять разность расстояний от носка летательного аппарата до центра давления $x_{ц.д.}$ и от носка летательного аппарата до центра тяжести $x_{ц.т.}$, т. е. величину $(x_{ц.д.} - x_{ц.т.})$ или в безразмерной форме

Если коэффициент центра давления $c_{ц.д.}$ больше относительной координаты центра тяжести, т. е. если центр давления расположен за центром тяжести, то ЛА будет статически устойчивым; при переднем расположении центра давления (отрицательная) ЛА будет статически неустойчивым; при совпадении обоих центров аппарат будет нейтральным.

Критерий $c_{ц.д.}$ вают запасом статической устойчивости. Он может быть положительным (статическая устойчивость), отрицательным (статическая неустойчивость) и нулевым (нейтральность в отношении продольной устойчивости).

Продольная статическая устойчивость зависит от взаимного положения фокуса и центра тяжести ЛА. При заднем расположении фокуса относительно центра тяжести (p положительна) произведение $c_{ц.д.} \cdot p$ и полет будет статически устойчивым. Наоборот, если фокус находится перед центром тяжести (разность отрицательна), следовательно, полет будет статически неустойчивым.

СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

§ 1. Прямые скачки уплотнения

В случае полета тела со сверхзвуковой скоростью ($v > a$) перед ним возникает ударная волна (скачок уплотнения), вызывающая значительное сопротивление. Многочисленные опыты показывают, что всякое повышение давления, возникшее в каком-либо месте газовой среды, распространяется в ней с большой скоростью во все стороны в виде волн давления. Слабые волны давления движутся со скоростью звука; их изучением занимаются в акустике. Сильные волны давления, как видно из опытов, распространяются со скоростями, значительно большими, чем скорость звука. Основная особенность сильной волны давления заключается в том, что фронт волны очень узок, в связи с чем состояние газа (давление, плотность, температура) изменяется скачком.

Волны сжатия распространяются как скачки давления (разрывы), в связи с чем их называют *ударными волнами*.

Представим себе, например, что под влиянием резкого смещения поршня (рис. 3.2) в трубе возникла и распространяется слева направо сильная волна сжатия.

Пусть за бесконечно малый промежуток времени фронт волны переместился на расстояние dx . Это значит, что в области $1—H$ за время dt произошло повышение давления от величины p_n (давление невозмущенного газа) до величины p_1 (давление за фронтом волны сжатия), в соответствии с чем в области $1—H$ должно наблюдаться повышение плотности газа на величину

Однако это может произойти только в том случае, если некоторое количество газа, равное

перетечет из объема $1—2$ в объем $H—1$ (здесь F — площадь поперечного сечения). Итак, при распространении сильной волны сжатия газ позади фронта волны должен находиться в движении, следуя в том же направлении, что и волна. Из уравнения неразрывности можно определить скорость газового потока ():

Но производная пути по времени есть не что иное, как скорость движения волны:

Отсюда получаем равенство, связывающее *скорость распространения волны со скоростью газа, движущегося за фронтом волны* в том же направлении:

Применяя к области $H-1$ уравнение количества движения, можно получить другое соотношение между теми же величинами. В самом деле, за время dt масса газа, заполнявшая объем $H-1$, перейдет из состояния покоя в движение со скоростью v . Соответствующее изменение количества движения должно быть равно импульсу силы, вызванной разностью давлений, действующих в сечениях 1 и H :

откуда скорость волны равна

Подставив выражение для скорости газа (3) в уравнение (4), получим скорость распространения волны сжатия как функцию прироста давления и прироста плотности

В случае *слабой волны* когда повышение давления (и плотности) получается незначительным: $\frac{\Delta p}{p} \ll 1$, имеем

Слабая волна является не чем иным, как *акустической волной*, поэтому выражение (6) представляет собой определение *скорости звука*.

Из сравнения равенств (5) и (6) видно, что *скорость распространения сильной волны сжатия всегда выше скорости звука*.

или на основании уравнения состояния для идеального газа

Отсюда получается уже применявшаяся выше формула для скорости звука в идеальном газе

Подставляя выражение (5) в равенство (3), найдем формулу для *скорости газового потока за фронтом волны сжатия*

Нетрудно видеть, что с ослаблением волны сжатия скорость движения газа падает. В случае слабой звуковой волны газ за ее фронтом неподвижен, так как согласно равенству (7) при, $v \ll c$ получается

Иследуем более детально изменение состояния газа, получающееся при прохождении в нем стационарной ударной волны. Обратимся сначала к простейшей схеме, когда фронт волны составляет прямой угол с направлением распространения. Такая волна называется *прямой ударной волной*.

Ради удобств расчета выгодно обратить движение, т.е. остановить фронт волны, направив поток навстречу волне со скоростью, равной скорости распространения волны (рис. 3.3):

тогда относительная скорость газа за фронтом волны

Остановив ударную волну встречным потоком газа, мы получили некоторую неподвижную поверхность, пересекая которую все элементарные струйки газа одновременно претерпевают скачкообразные изменения скорости движения, плотности, давления и температуры. По этой причине ударную волну называют также *скачком уплотнения*.

Скачки уплотнения удобно наблюдать в сверхзвуковых аэродинамических трубах при обтекании воздухом неподвижных твердых тел.

Примем площадь поперечного сечения струи равной единице ($F = 1$ и, пользуясь известными уравнениями газовой динамики, найдем связь между значениями скорости газа до и после скачка уплотнения (рис. 3.3). Уравнение неразрывности дает

Пренебрегая силой трения ввиду малой толщины скачка уплотнения из уравнения количества движения получим

Сопоставляя эти уравнения, найдем

откуда

Если извне тепло не подводится, то полное теплосодержание газа остается постоянным. Теплоотдачей можно пренебречь, так как боковые поверхности струи в области скачка ничтожно малы. Поэтому из уравнения теплосодержания следует

здесь T^* — температура торможения. Из этого уравнения имеем

Согласно уравнению состояния газа

следовательно,

здесь — полное давление соответственно за и перед скачком уплотнения,
— плотность газа, соответствующая полному торможению, в тех же сечениях. Следовательно,

Из термодинамики известно соотношение

поэтому

По аналогии получаем

Вычтя равенство (11) из равенства (12), имеем

откуда на основании (9) выводится

Используя выражение для критической скорости

найдем

Наконец, сопоставляя равенства (10) и (14), приходим к следующему простому соотношению между величинами скорости газа до и после скачка:

Это кинематическое соотношение можно привести к безразмерному виду, вводя приведенные скорости ()::

откуда видно, что *в прямом скачке уплотнения всегда сверхзвуковая скорость газа переходит в дозвуковую*, так как если

Установим теперь связь между давлением и плотностью газа в скачке уплотнения. Для этого сложим равенства (11) и (12):

Из уравнения неразрывности следует

Подставляя этот результат в предыдущее выражение, имеем

откуда на основании (10) и (13) получаем основное динамическое соотношение

согласно которому отношение прироста давления к приросту плотности в скачке уплотнения пропорционально отношению среднего давления к средней плотности. Отсюда, между прочим, следует уже известный нам результат, что при бесконечно малом скачке уплотнения () получается

Это подтверждает сделанное выше предположение, *что звуковой волне отвечает идеальный адиабатический процесс.*

Ударная адиабата

Представим динамическое соотношение (17) в несколько ином виде:

Разделим числитель и знаменатель в левой части этого равенства на величину ρ_H , а в правой на ρ_1 :

Отсюда после несложных преобразований получается зависимость отношения ρ_1/ρ_H от отношения p_1/p_H в скачке уплотнения, носящая название *ударной адиабаты*:

Существенной особенностью ударной адиабаты является то, что при неограниченном возрастании давления в скачке уплотнения () увеличение плотности имеет определенный предел, который как это видно из уравнения (18), равен

Например, для воздуха ($k = 1,4$) увеличение плотности в скачке уплотнения не может быть более шестикратного:

При скачке уплотнения в газе с меньшим значением показателя k может наблюдаться более сильное, но также ограниченное возрастание плотности; например, при $k = 1,2$

Следует подчеркнуть, что в отличие от ударной адиабаты в случае идеального адиабатического процесса, в котором имеет место зависимость

увеличение плотности с ростом давления является неограниченным

Сравнение адиабат ударной и идеальной произведено на рис. 3.4. Изменение давления и плотности газа в прямом скачке уплотнения можно представить в функции числа M перед скачком. Из уравнения количества движения с учетом формулы для скорости звука и уравнения неразрывности найдем

Если с помощью ударной адиабаты заменить отношение ρ_n/ρ_1 его выражением через отношение p_1/p_n , то после некоторых преобразований получим

В частности, для воздуха
($k=1,4$)

Можно выразить отношение давлений в прямом скачке уплотнения и в функции приведенной скорости перед скачком ; для этого следует в равенстве (20) произвести замену переменных по формуле (45) из гл. I:

Потери полного давления в прямом скачке уплотнения

Полное давление в струе после скачка, очевидно, равно

Полное давление перед скачком равно

поэтому коэффициент сохранения полного давления, учитывающий волновое сопротивление (потери в прямом скачке), можно представить, если использовать выражение (21), следующим образом:

При скорости полета, равной или меньшей скорости звука (), волновое сопротивление исчезает

формула (24) справедлива только при полета () получается При бесконечно большой скорости однако при этом потери не поглотят всего первоначального запаса полного давления, так как другой множитель () стремится к бесконечности. Кривая зависимости для воздуха ($k = 1,4$) приведена на рис. 3.5.

Если перейти от неподвижного скачка уплотнения к скачку, распространяющемуся в неподвижном газе со скоростью , то с помощью полученных равенств можно определить абсолютную скорость, которую приобретает газ в следе за скачком:

или на основании
(22)

и в безразмерном виде

§ 2. Косые скачки уплотнения

Помимо прямых скачков уплотнения, встречаются и так называемые *косые скачки уплотнения*. Фронт косога скачка располагается наклонно к направлению потока (рис. 3.6). Косой скачок получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, газовый поток должен изменить свое направление. Например, при сверхзвуковом обтекании газом клиновидного тела (рис. 3.7, а), которое отклоняет поток от начального направления на угол ω , перед телом образуются косые скачки уплотнения, сходящиеся на его носике (рис. 3.8). Косой скачок уплотнения образуется и при обтекании конуса (рис. 3.7, б). Поверхностью разрыва в этом случае будет конус с вершиной в носике обтекаемого тела. Таким образом, если до встречи струи с фронтом косога скачка вектор скорости составлял с ним угол α (рис. 3.6), то после пересечения фронта струя отклоняется на угол ω , а угол между вектором скорости и фронтом скачка становится равным

Разложим вектор скорости на два компонента, из которых один нормален (), а другой параллелен () фронту скачка (рис. 3.9).

Нетрудно показать, что при пересечении струей фронта косоуго скачка нормальный компонент скорости уменьшается:

а тангенциальный компонент остается неизменным:

Обратимся для этого к рис. 3.10, на котором нанесен прямоугольный контур $H11H$, охватывающий часть фронта косога скачка. Боковые участки контура ($H — 1$) проведены перпендикулярно к фронту, а торцовые ($H — H$ и $1 — 1$) — параллельно ему. Составим баланс количества движения для этого контура сначала в проекции на направление фронта. Ввиду того что силы давления на обеих боковых поверхностях ($H — 1$) одинаковы, соответствующая проекция количества движения остается неизменной, откуда и вытекает условие (32), указывающее на косога скачка уплотнения. постоянство тангенциального компонента скорости. Если теперь составить уравнение количества движения в направлении $H — 1$, перпендикулярном к фронту, то ввиду того, что на поверхностях $H — H$ и $1 — 1$ действуют существенно разные давления, получится

Давление в скачке уплотнения возрастает ($p_1 > p_H$), откуда следует условие (31), согласно которому нормальный компонент скорости в скачке уменьшается.

Приведенные соображения показывают, что *косой скачок уплотнения сводится к прямому скачку, который сносится вместе с потоком газа вбок со скоростью* .

В отличие от прямого скачка в косом скачке претерпевает разрыв (скачкообразное уменьшение) не полная скорость газового потока, а только ее компонент, нормальный к фронту скачка. В самом деле, согласно уравнению неразрывности,

Уравнение теплосодержания в адиабатическом случае (нет теплообмена) дает

Далее мы имеем

откуда

Введем в рассмотрение *температуру частичного торможения*, понимая под этим следующую величину:

т. е. температуру, которая получится не при полном торможении потока, а лишь при погашении нормальных к фронту скачка компонентов скорости. Как показывает это равенство, температура частичного торможения имеет одно и то же значение перед и за фронтом скачка, что вытекает из условия

Если присоединить к этим уравнениям еще и уравнение состояния

то окажется, как и следовало ожидать, что косой скачок уплотнения описывается в точности теми же соотношениями, что и прямой скачок уплотнения, с той лишь разницей, что в первом случае вместо полной скорости фигурируют нормальные к фронту скачка ее компоненты, а вместо температуры полного торможения T^* — температура частичного торможения

По этой причине, не повторяя всех выкладок, которые были подробно приведены в теории прямого скачка, можем написать сразу ряд готовых выражений. Например, вместо равенства (10) имеем

Соответственно вместо равенства (14) получим

Здесь — условная критическая скорость, которая соответствует температуре частичного торможения . Основное кинематическое соотношение для косого скачка принимает следующую форму:

Равенство (34) дает возможность связать полную критическую скорость с условной критической скоростью:

Пользуясь этим выражением, можно получить вторую часто встречающуюся форму основного кинематического соотношения для косо́го скачка уплотнения:

В частном случае, когда косо́й скачок переходит в прямой из соотношений (35) и (37) получаем уже известное соотношение (15). Переходя к приведенным скоростям \bar{u} , получим в случае косо́го скачка безразмерное кинематическое соотношение

которое соответствует равенству (16) для прямого скачка. Естественно, что динамическое соотношение (17) пригодно для косо́го скачка уплотнения без каких-либо изменений, и ударная адиабата применима к косо́му скачку уплотнения точно в таком же виде (18), как и к прямому скачку.

Изменения статического и полного давлений в косом скачке находятся соответственно из зависимостей (21) и (24), если вставить в эти формулы вместо V величину

Причем приведенная скорость $V_{пр}$ подсчитана здесь по нормальной составляющей скорости и условной критической скорости:

Годограф скорости (ударная поляра)

Наряду с аналитическим решением задачи об определении параметров потока за косым скачком уплотнения существует графический способ, основанный на понятии годографа скорости.

Годограф скорости — это кривая, представляющая собой геометрическое место концов векторов скорости в плоскости за скачком уплотнения. Рассмотрим уравнение годографа скорости. Пусть точка A (рис. 1) является концом вектора скорости \vec{w}_2 и расположена на годографе скорости, построенном в системе координат, горизонтальная ось которой совпадает с направлением скорости перед скачком. Следовательно, наклон вектора скорости \vec{w}_2 определяется углом β_c . Обозначим вертикальную и горизонтальную составляющие этой скорости соответственно w_{2y} и w_{2x} . Из рис. 1 видно, что w_{2y} и w_{2x} можно выразить через нормальную и касательную составляющие скорости к плоскости скачка следующим образом:

Рис. 1. К выводу
уравнения
годографа скорости

После некоторых подстановок и преобразования получается уравнение:

Это уравнение, связывающее переменные w_2 и u_2 , называется уравнением годографа скорости.

Введем безразмерные величины

Тогда уравнение годографа скорости перепишется в виде:

Уравнение (1) на плоскости λ_w и λ_u графически изображается кривой – строфоидой (рис. 2). Характерные точки строфоиды – A и D .

Рис. 2. Строфоида (ударная поляра)

Из уравнения (1) видно, что условие $\lambda_w = 0$ выполняется, если $\lambda_u = \lambda_1$ или $\lambda_u = 1 / \lambda_1$. Значение $\lambda_u = \lambda_1$ определяет координату точки A и дает решение, соответствующее скачку бесконечно малой интенсивности, за которым скорость не меняется. Другое значение $\lambda_u = 1 / \lambda_1$ определяет координату ближайшей к началу координат точки пересечения D и является решением для прямого скачка уплотнения.

Две ветви строфоиды, расположенные правее точки A , уходят в бесконечность, асимптотически приближаясь к прямой, проходящей через точку B и параллельной вертикальной оси. Координату этой точки можно получить из уравнения (1), перейдя к пределу при $\lambda_w \rightarrow \infty$. В результате получим условия из которого найдем координату точки B .

Любая точка ветви строфоиды, уходящей в бесконечность, формально дает решение для скачка уплотнения. Рассматривая, например, точку F на рис. 2, можно считать, что для скачка уплотнения, за которым направление скорости изменилось на заданную величину угла β_c , скорость увеличилась скачком до величины λ_2 , определяемой длиной отрезка OF . При этом скачком уменьшились бы давление и плотность. Т.е., в данном случае имел бы место не скачок уплотнения, а скачок разрежения. Однако физически образование таких скачков невозможно. Скачки разрежения возникать не могут.

Ветви строфоиды, уходящие в бесконечность, физического смысла не имеют. Оставшаяся часть строфоиды (левее точки A), имеющая физический смысл, называется ударной полярой. Такая кривая строится для заданного числа λ_1 (или M_1). Несколько кривых, построенных для различных значений λ_1 составляют семейство ударных поляр, позволяющих графически рассчитать скорость потока за скачком уплотнения и угол его наклона.

Рассматривая ударную поляру, можно сделать вывод, что по мере уменьшения угла β_c (точка N перемещается вдоль кривой ближе к точке A) угол наклона скачка θ_c уменьшается. В пределе при $\beta_c \rightarrow 0$ точка N сливается с A , что физически соответствует превращению ударной волны в скачок бесконечно малой интенсивности, т. е. в линию слабого возмущения.

Течение с отошедшей ударной волной

Иногда необходимо вычислить скорость потока после косо́го скачка уплотнения. Проще всего это сделать, пользуясь треугольниками скоростей (рис. 3.9), из которых следует

Отсюда получаем

или в безразмерных обозначениях

Можно найти соответствующее значение числа Маха за косым скачком:

На рис. 3.15 приведены кривые зависимости числа M_1 за скачком уплотнения от положения фронта $M_1 = f(\alpha)$ для трех значений числа M в набегающем потоке ($M = 2, 3, 4$). Как видим, во всех трех случаях при углах наклона фронта $\alpha < 60^\circ$ скорость потока после косога скачка уплотнения оказывается сверхзвуковой. Крайняя левая точка каждой кривой отвечает режиму перехода косога скачка уплотнения в слабую волну, крайняя правая точка — в прямой скачок уплотнения, скорость за которым меньше скорости звука.

Итак полное торможение сверхзвукового потока требует либо одного прямого скачка, либо системы из нескольких косых скачков, обычно завершаемой слабым прямым скачком. Можно представить себе такую систему скачков, в которой потери меньше, нежели в одном прямом скачке.

Расчет обтекания затупленного конического тела методом Ньютона

Этот метод основан на корпускулярной теории Ньютона (называемой также теорией «Ньютонова торможения»), согласно которой частицы газа испытывают возмущения только при ударе о твердую стенку и полностью теряют нормальную к стенке составляющую количества движения. Если V_n – нормальная составляющая скорости набегающего потока, dS – элементарная площадка обтекаемой поверхности (см. рис.). то для рассматриваемой точки потеря количества движения за единицу времен

Величина импульса силы от избыточного давления $(p - p_\infty) dS$ за то же время в соответствии с теоремой об импульсе силы определяется потерей количества движения. Следовательно, в данной точке избыточное давление

Из рис. видно, что $V_{n\infty} = V_\infty \cos \alpha$, поэтому

Разделив левую и правую части этого уравнения на скорость V_∞ , получим для коэффициента давления формулу

называемую формулой Ньютона.

Рис. К определению
давления по методу
Ньютона в случае
сверхзвукового
обтекания затупленной
поверхности

Формула Ньютона соответствует модели обтекания – модели Ньютона, при которой реализуется схема эластичного отражения частиц газа при их взаимодействии с поверхностью.

Такая модель имеет недостаток: она не дает принципиального ответа на вопрос о том, как ведут себя частицы газа после соударения. В действительности их скорость после соударения не будет равна касательной к поверхности составляющей скорости набегающего потока, а скорости этих частиц за местом соударения по этой модели вовсе не определяются. Таким образом, практически модель Ньютона не рассматривает собственно процесса обтекания тела.