Теория статистики

Корреляционно-регрессионный анализ: статистическое моделирование зависимостей

Часть 1.

Задача изучения зависимостей

- Исследование объективно существующих связей между явлениями и их показателями – одна из важнейших задач анализа
- Различают классы статистических признаков:
  - независимые (факторные)
  - и зависимые (результативные)
- Причинность, корреляция, регрессия

Виды зависимости

- Зависимости бывают функциональными и нет, т.е. с элементом случайности
- При Функциональной зависимости каждому значению независимой переменной соответствует определенное значение зависимой

Балансовая зависимость

- Пример функциональной связи – балансовая:

$$О_н + П = Р + О_к$$

$О_н$ – остаток средств на начало изучаемого периода;

$П$ – поступление средств в течении данного периода;

$Р$ – расход средств за период;

$О_к$ – остаток средств на конец периода

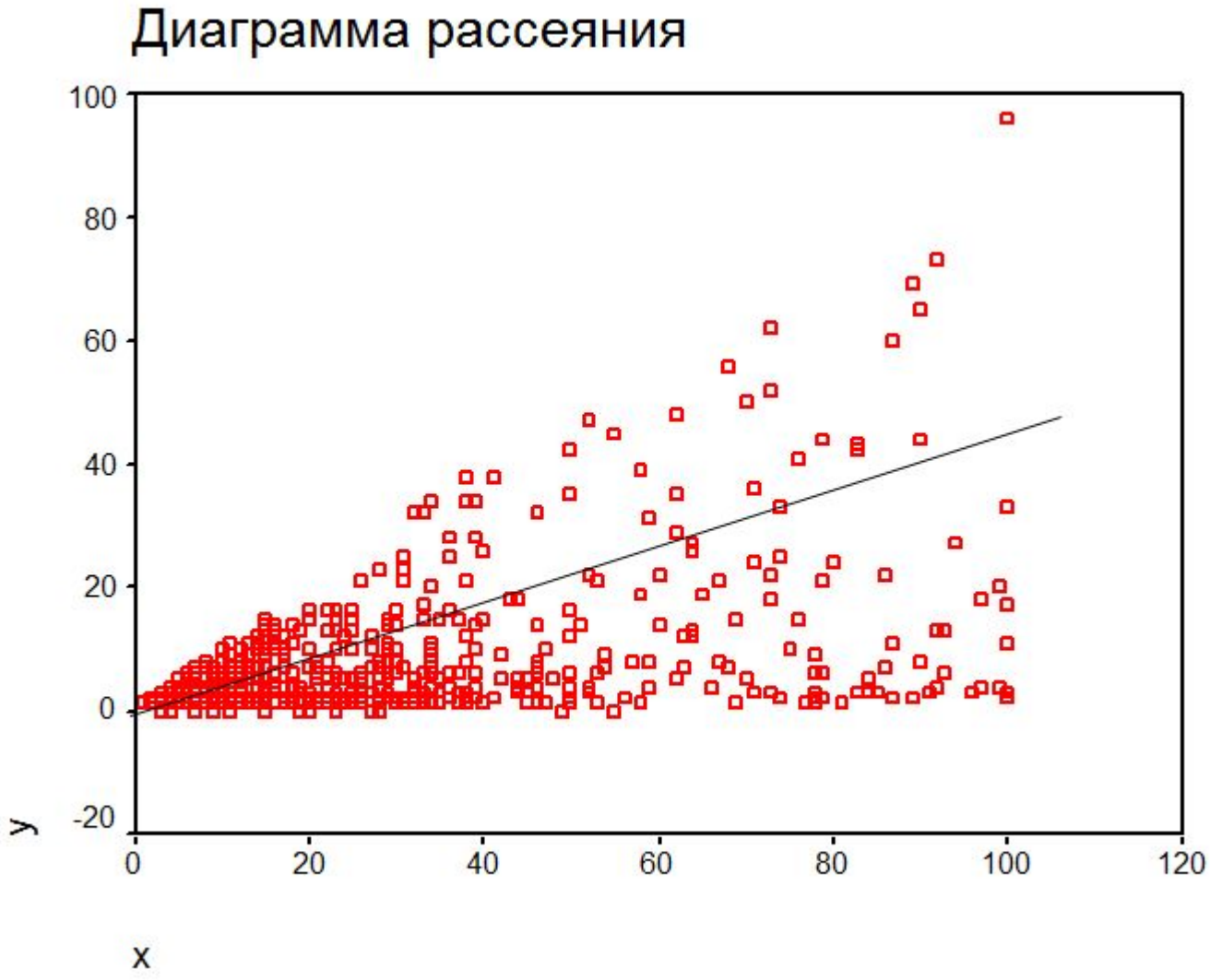
Статистическая зависимость

- В социально-экономических исследованиях в большинстве случаев наблюдается связь, при которой каждому значению одной переменной соответствует некоторое множество возможных значений другой переменной
- Такая зависимость называется статистической

Корреляционная связь – частный случай статистической зависимости

- Корреляционной зависимостью между двумя переменными величинами называется функциональная зависимость между значениями одной из них и средним значением другой
- Поле корреляции – графическое изображение взаимосвязи двух признаков

Поле корреляции



Классификация статистических связей

- Связи между явлениями и их признаками классифицируются:

- По тесноте:
  сильная, умеренная, слабая или отсутствует
- По направлению:
  прямая или обратная
- По аналитическому выражению:
  линейная или нелинейная

Виды корреляционной зависимости

- Парная корреляция – линейная зависимость между двумя переменными
- Частная корреляция – линейная зависимость между двумя переменными при исключении влияния других
- Множественная корреляция - линейная зависимость между набором переменных

Этапы статистического изучения связи

1. Качественный анализ на наличие объективной зависимости
2. Построение модели связи:

- Метод приведения параллельных данных и построение поля корреляции
- Корреляционный анализ
- Регрессионный анализ

3. Содержательная интерпретация полученных результатов моделирования

Характеристика тесноты и направления связи

- Цель состоит в количественном описание тесноты и направления связи
- В качестве характеристики используется коэффициент корреляции (*r*):

$\|r\|$	Связь
0,0 – 0,3	Отсутствует
0,3 – 0,5	Слабая
0,5 – 0,8	Умеренная
0,8 – 1,0	Сильная

Регрессионный анализ

- Регрессионный анализ заключается в аналитическом выражении связи:

 Нахождение функциональной зависимости среднего (математического ожидания) признака (y) от значений независимой переменной (*x*):

$$\overline{y_x} = f(x) + \varepsilon,$$

ε – случайный остаток

Определение параметров регрессии

- Определение класса функций для выражения функциональной зависимости среднего признака (y) от значений переменной (*x*)
- Оценка параметров функции регрессии: метод наименьших квадратов

$$\sum_{k=1}^{n} \left(y_k - f\left(x_k\right)\right)^2 \to \min$$

- Проверка случайности остатков и адекватности модели связи

Пример

- Пусть имеются данные по 9 студентам:
- Признак (x) – количество пропущенных студентом занятий по дисциплине
- Признак (y) – полученная студентом оценка на экзамене

Данные о числе пропущенных занятий и полученных оценках на экзамене студентами									
№	A	B	C	D	E	F	G	H	I
(x)	3	4	1	2	10	6	2	5	3
(y)	4	3	5	4	2	3	4	5	4

Пример

- Исследуем зависимость среднего значения (y) от признака (x)

1. Ясно, что такая объективная зависимость может существовать (хотя и не функциональная)

Пример

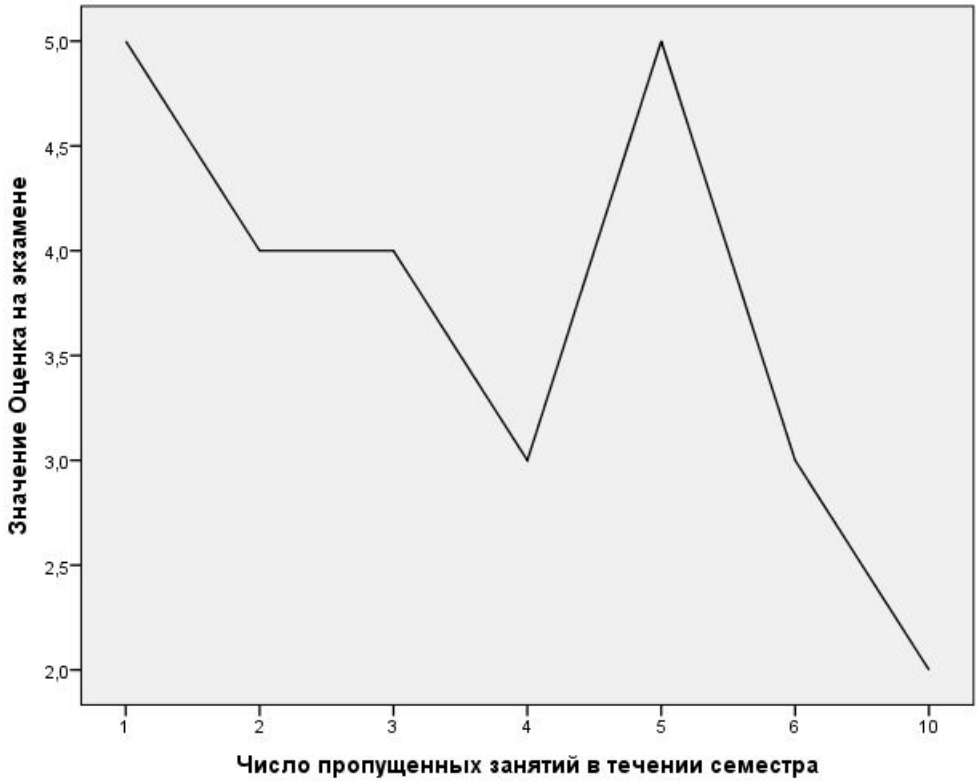
2. Построение модели связи

- Метод приведения параллельных данных

Данные о числе пропущенных занятий и полученных оценках на экзамене студентами, упорядоченные по переменной (x)									
№	C	D	G	A	I	B	H	F	E
(x)	1	2	2	3	3	4	5	6	10
(y)	5	4	4	4	4	3	5	3	2

Пример

- Поле корреляции



Пример

- Теснота и направление связи между количественными переменными измеряются с помощью коэффициента корреляции Пирсона:

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x.y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{1/n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{1/n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot 1/n \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

Пример

$$n = 9; \quad \sum_{i=1}^{9} x_i = 36; \quad \sum_{i=1}^{9} y_i = 34; \quad \bar{x} = 4; \quad \bar{y} = 3{,}78;$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 120 \quad 1/n \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 13{,}33$$

$$\sigma_x^2 = 1/n \sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 6{,}67 \qquad \sigma_y^2 = 1/n \sum_{i=1}^{9} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}84$$

$$r = \frac{1/n \sum xy - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{1/n \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot 1/n \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{13{,}33 - 4 \cdot 3.78}{\sqrt{6{,}67 \cdot 0{,}84}} = \frac{-1.79}{2.37} = -0.76$$

Пример

- Делать выводы о тесноте и направлении связи пока преждевременно: нужно проверить значимость коэффициента корреляции (*r*)
- Гипотеза H_0: истинное значение коэффициента корреляции (*R*) равно «0»
- Для проверки значимости коэффициента корреляции (*r*) применяется *T*-критерий Стьюдента

Пример

- По выборке рассчитываем значение статистики:

$$t_r = |r| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = |-0.76| \cdot \sqrt{\frac{9-2}{1-0.76^2}} = 3{,}09$$

T-распределение Стьюдента (Фрагмент таблицы)			
K	Вероятность: $\alpha = St(t) = P(\|T\| > t_{tabl})$		
	0,05	0,02	0,01
7	2,365	2,998	3,499

$t_r = 3.09 > t_{0.05,7} = 2.365$: коэфф. корреляции значим

Вывод

- Корреляционная связь:
- Обратная - коэффициент корреляции (*r*) отрицательный
- Умеренная ($|r| = 0,76$ но 0,8), близкая к сильной

Регрессионный анализ

- Наблюдается существенная линейная корреляционная зависимость, поэтому аналитическое выражение связи будем искать в линейной форме:

$$\overline{y_x} = a_0 + a_1 x \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}; \\ a_1 = (\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}) / \sigma_x^2; \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{-1.78}{6{,}67} = -0.27; \quad a_0 = 3.78 - (-0.27) \cdot 4 \cdot = 4{,}86$$

$$\overline{y_x} = 4.86 - 0.27 \cdot x$$

Регрессионный анализ

- Необходима проверка значимости полученного уравнения регрессии
  - в целом
  - каждого коэффициента в отдельности
- Тем не менее, пользуясь полученным уравнением регрессии, находим, что, например, при $x = 3$, оценка ожидается 4:

$$\overline{y_x}(3) = 4.86 - 0.27 \cdot 3 = 4.05$$

Регрессионный анализ

- Значимость полученного уравнения регрессии (в целом) проверяется по *F*-критерию Фишера:

- Гипотеза H_0: все коэффициенты регрессии равны «0»

Регрессионный анализ

- Уравнение регрессии в целом значимо, если выполняется условие:

$$F = \frac{\sigma_R^2 (n-2)}{\sigma_E^2} = \frac{Q_R (n-2)}{Q_E} > F_{\alpha;1;n-2}$$

$F_{\alpha;1;n-2}$ табличное значение *F*-критерия на уровне значимости α (обычно $\alpha = 0.05$) при числе степеней свободы числителя $n-2$ и знаменателя 1.

$Q_R = \sum_{k=1}^{n} (\hat{y}_k - \bar{y})^2$ - суммы квадратов отклонений, обусловленные регрессией;

$Q_E = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \hat{y}_k)^2$ - суммы квадратов регрессионных остатков;

$\hat{y}_k = a_0 + a_1 x_k$ - значение, предсказанное регрессией.

Регрессионный анализ

- Так как $\hat{y}_k - \overline{y} = (a_0 + a_1 x_k) - (a_0 + a_1 \overline{x}) = a_1 (x_k - \overline{x})$ то объясненное регрессией отклонение от среднего уровня:

$$Q_R = \sum_{k=1}^{n} (\hat{y}_k - \overline{y})^2 = \sum_{k=1}^{n} a_1^2 (x_k - \overline{x})^2 = a_1^2 \cdot (n\sigma_x^2)$$

$$= 0{,}27^2 \cdot 9 \cdot 6.67 \cdot = 4.38$$

Полное отклонение от среднего уровня:

$$Q = n \cdot \sigma_y^2 = 9 \cdot 0{,}84 = 7.56$$

Отклонение, необъясненное регрессией:

$$Q_E = Q - Q_R = 7.56 - 4.38 = 3.18$$

Регрессионный анализ

- Значение *F*-статистики:

$$F = \frac{Q_R(n-2)}{Q_E} = \frac{4.38 \cdot (9-2)}{3.18} = 9.61$$

- Вывод: так как вычисленное значение *F*-критерия:

$$F = 9{,}61 > F_{0{,}05;1;7} = 5{,}59,$$

то уравнение регрессии значимо

Регрессионный анализ: коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = \frac{\sigma_R^2}{\sigma^2}$$

- В силу правила сложения дисперсий для R^2 имеем $0 \le R^2 \le 1; \sigma^2 = \sigma_R^2 + \sigma_E^2$
- В примере коэффициент детерминации:

$$R^2 = Q_R / Q = \frac{4{,}38}{7{,}56} = 0{,}58$$

- Вывод: предсказанные по регрессии значения объясняют вариацию результативного признака (y) на 58%