Вероятностные модели управления запасами

1. Модель с непрерывным контролем уровня запаса

Рассмотрим две модели управления запасами:

- обобщение модели Уилсона на вероятностный случай, в которой используется страховой запас, отвечающий за случайный спрос;
- вероятностная модель, учитывающая вероятностный характер спроса непосредственно в постановке задачи.

1.1 «Рандомизированная» модель Уилсона

Адаптируем модель Уилсона для вероятностного спроса, предполагая существование постоянного ***страхового запаса*** на протяжении всего планового периода. Его размер устанавливается так, чтобы вероятность истощения запаса в течение срока выполнения заказа (интервала между моментом размещения заказа и его поставкой) не превышала наперед заданной величины

Основным предположением при построении модели является то, что случайная величина $\mathbf{X_T}$, представляющая величину спроса на протяжении срока выполнения заказа **T** (время от момента размещения заказа до его поставки) является нормально распределенной случайной величиной со средним ν_T и стандартным отклонением σ_T т.е. имеет распределение $\mathbf{N(\nu_T,\sigma_T)}$

Величина спроса на протяжении срока выполнения заказа **T** обычно описывается плотностью распределения вероятностей, отнесенной к единице времени (например, к дню или неделе), из которой можно определить распределение спроса на протяжении периода **T**.

В частности, если спрос за единицу времени является нормально распределенной случайной величиной со средним ν и стандартным отклонением σ, то общий спрос на протяжении срока выполнения заказа **T** будет иметь распределение $N(\nu_T, \sigma_T)$, где $\nu_T = \nu T$ и $\sigma_T = \sqrt{\sigma^2 T}$.

Формула для σ_T получена на основании того, что значение **T** является целым числом (или же округлено до целого числа).

Введем следующие обозначения.

- **B** — размер страхового запаса;
- **α** — максимально возможное значение вероятности истощения запаса на протяжении срока выполнения заказа.

На рис. 1 показана зависимость между **B** и параметрами модели Уилсона, которая включает **T**, ν_T и оптимальный размер заказа ***Q****.

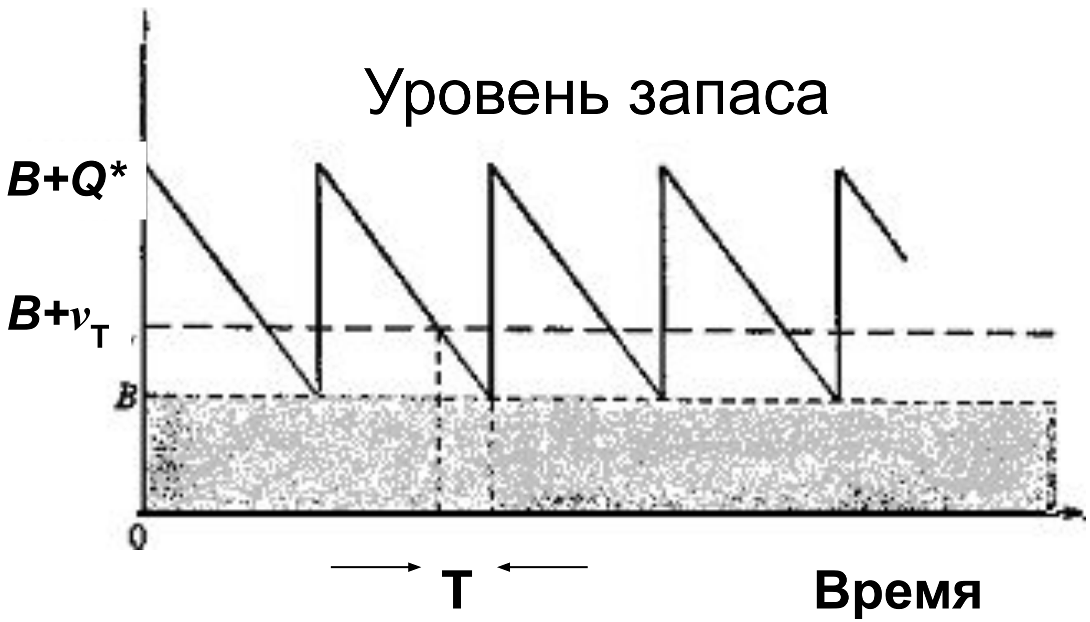


Рис. 1

Вероятностное условие, которое определяет размер страхового запаса ***B***, имеет вид:

$$P(x_T \geq B + \nu_T) \leq \alpha$$

По определению случайная величина $z = \dfrac{x_T - \nu_T}{\sigma_T}$

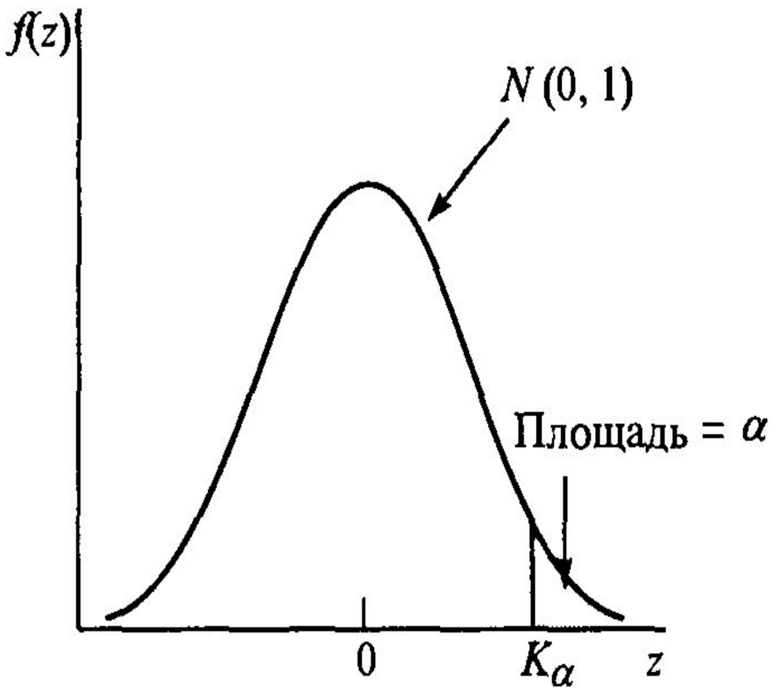
является нормированной нормально распределенной случайной величиной, т.е. имеет распределение **N(0, 1)**. Следовательно,

$$P(z \geq \frac{B}{\sigma_T}) \leq \alpha$$

и размер страхового запаса должен удовлетворять неравенству

$$B \geq \sigma_T K_\alpha.$$

где величина K_α определяется из табл. стандартного нормального распределения, так что $P(z \geq K_\alpha) \leq \alpha$



Формула Феттера

Для расчета величины страхового запаса в случае, когда срок выполнения заказа **T** также является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним значением **Ť** и средним квадратичным отклонением $\boldsymbol{\sigma_{\check{T}}}$:

$$B = K_{\alpha} \cdot \sqrt{\check{T} \cdot \sigma^{2} + \nu \cdot \sigma_{\check{T}}^{2}}$$

Отметим, что эту формулу можно использовать и в том случае, когда рассматривается не срок выполнения заказа, а весь период между поставками.

1.2. Стохастическая модель Уилсона

"Рандомизированная" модель Уилсона не дает оптимальную политику управления запасами. Информация, имеющая отношение к вероятностной природе спроса первоначально не учитывается, а используется лишь независимо на последнем этапе вычислений. Рассмотрим более точную модель, в которой вероятностная природа спроса учитывается непосредственно в постановке задачи.

В новой модели допускается неудовлетворенный спрос (рис. 2). Заказ размером Q размещается тогда, когда объем запаса достигает уровня Q_0. Как и в детерминированном случае, уровень Q_0, при котором снова размещается заказ, является функцией периода времени между размещением заказа и его выполнением. Оптимальные значения Q^* и $Q_0{}^*$ определяются минимизацией ожидаемых затрат системы управления запасами, отнесенных к единице времени; они включают расходы на размещение заказа, на хранение, и потери, связанные с неудовлетворенным спросом.

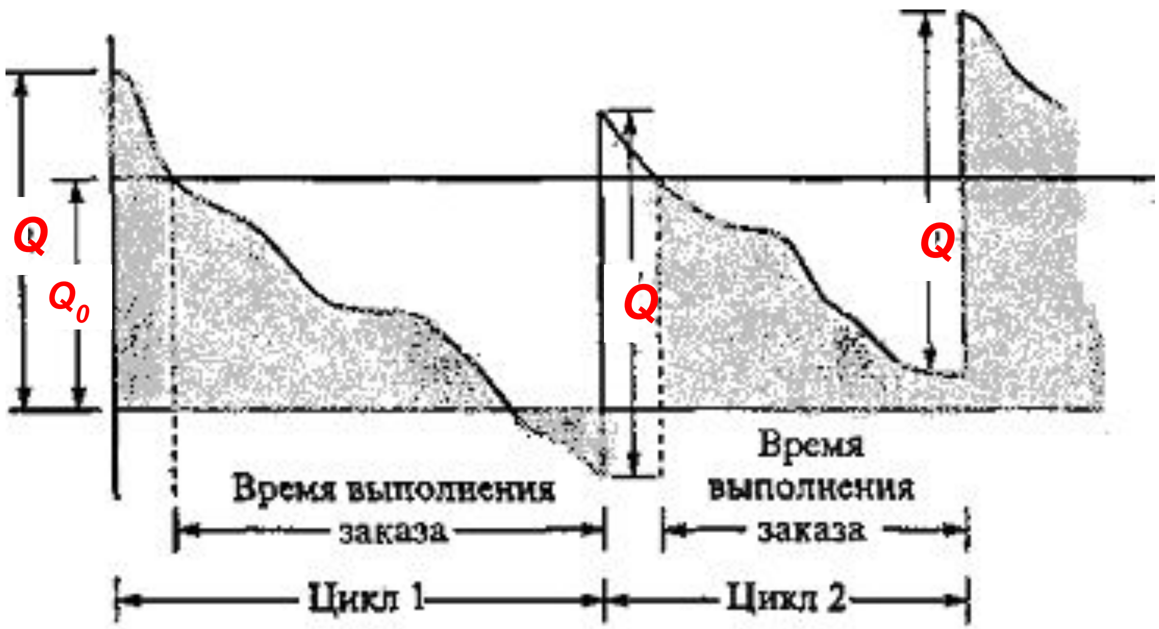


Рис. 2

В рассматриваемой модели приняты <u>три допущения</u>.

1. Неудовлетворенный в течение срока выполнения заказа спрос накапливается.
2. Разрешается не более одного невыполненного заказа.
3. Распределение спроса в течение срока выполнения заказа является стационарным (неизменным) во времени.

Обозначения:

- $f(x)$ — плотность распределения спроса x в течение срока выполнения заказа.

Основываясь на этих определениях, вычислим компоненты функции затрат.

1. *Стоимость размещения заказов.* Приближенное число заказов в единицу времени равно ν/Q, так что стоимость размещения заказов в единицу времени равна $K\nu/Q$.

2. *Ожидаемые затраты на хранение.* Средний уровень запаса равен
$$\overline{Q} = \frac{(Q + M(Q_0 - x)) + M(Q_0 - x)}{2} = \frac{Q}{2} + Q_0 - M(x).$$

Следовательно, ожидаемые затраты на хранение за единицу времени равны $h\bar{Q}$.

Приведенная формула получена в результате усреднения ожидаемых запасов в начале и конце временного цикла, т.е. величин $Q + M(Q_0 - x)$ и $M(Q_0 - x)$ соответственно. При этом игнорируется случай, когда величина $Q_0 - M(x)$ может быть отрицательной, что является одним из упрощающих допущений рассматриваемой модели.

3. *Ожидаемые потери, связанные с неудовлетворенным спросом.*

Дефицит возникает при $x > Q_0$. Следовательно, ожидаемый дефицит за цикл равен

$$y = \int_{Q_0}^{\infty} (x - Q_0) f(x) dx.$$

Тогда ожидаемые потери, связанные с неудовлетворенным спросом, за один цикл равны ***yp***. Поскольку единица времени содержит ***ν/Q*** циклов, то ожидаемые потери, обусловленные дефицитом, составляют ***νyp/Q*** за единицу времени.

Результирующая функция общих потерь за единицу времени ***L*** имеет следующий вид.

$$L(Q, Q_0) = \frac{K\nu}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + Q_0 - M(x)\right) + \frac{\nu p}{Q} \int_{Q_0}^{\infty} (x - Q_0) f(x) dx.$$

Оптимальные значения ***Q**** и ***Q$_0$**** определяются из уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_0} = 0. \end{cases}$$

Для нахождения производной от интеграла функции двух переменных воспользуемся формулой Лейбница:

$$\left(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} F(x,y)dx \right)'_y =$$

$$= \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dx + F(b(y),y) \cdot b'(y) - F(a(y),y) \cdot a'(y).$$

Для определения *Q** и Q_0* получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q} = -\dfrac{K\nu}{Q^2} + \dfrac{h}{2} - \dfrac{\nu p}{Q^2} y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_0} = h - \dfrac{\nu p}{Q} \displaystyle\int_{Q_0}^{\infty} f(x)dx = 0. \end{cases}$$

Следовательно, имеем

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\nu(K + py^*)}{h}} \tag{1}$$

$$\int_{Q_0^*}^{\infty} f(x)dx = \frac{hQ^*}{\nu p}. \tag{2}$$

Так как из уравнений (1) и (2) *Q** и Q_0* нельзя определить в явном виде, для их нахождения используется численный алгоритм, предложенный Хедли и Уайтин (Hadley, Whitin). Доказано, что алгоритм сходится за конечное число итераций при условии, что допустимое решение существует.

При $Q_0 = 0$ последние два уравнения соответственно дают следующее.

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{2\nu(K + pM(x))}{h}},$$

$$\tilde{Q} = \frac{\nu p}{h}.$$

Если $\tilde{Q} \geq \hat{Q}$, тогда существуют единственные оптимальные значения для Q и Q_0. Вычислительная процедура определяет, что наименьшим значением Q^* является $\sqrt{2K\nu / h}$, которое достигается при $y = 0$.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Принимаем начальное решение $Q_1 = Q^* = \sqrt{2K\nu / h}$ и считаем $(Q_0)_0 = 0$. Полагаем $i = 1$ и переходим к шагу i.

Шаг i. Используем значение Q_i для определения $(Q_0)_i$, из уравнения (2). Если $(Q_0)_i \approx (Q_0)_{i-1}$, вычисления заканчиваются; оптимальным решением считаем $Q^* = Q_i$ и $(Q_0)^* = (Q_0)_i$. Иначе используем значение $(Q_0)_i$ в уравнении (1) для вычисления Q_{i+1}. Полагаем $i = i+1$ и повторяем шаг i.

2. Одноэтапные модели

Одноэтапные модели управления запасами отражают ситуацию, когда для удовлетворения спроса в течение определенного периода продукция заказывается только один раз. Например, модный сезонный товар устаревает к концу сезона, и, следовательно, заказы на него могут не возобновляться. В данном разделе рассматривается два типа таких моделей: <u>с учетом </u>и <u>без учета </u>*затрат на оформление заказов*.

Обозначим:

c — стоимость закупки (или производства) единицы продукции,

R — наличный запас продукта перед размещением заказа,

A – ожидаемый спрос <u>за период</u>.

***f*(*A*)** — плотность вероятности спроса за рассматриваемый период,

Модель определяет оптимальный объем заказа ***Q***, который минимизирует суммарные ожидаемые затраты, связанные с закупкой (или производством), хранением и неудовлетворенным спросом. При известном оптимальном значении ***Q**** оптимальное управление запасами состоит в размещении заказа объемом ***Q* - R***, если ***R < Q****; в противном случае заказ не размещается.

2.1. Модель при отсутствии затрат на оформление заказа

В этой модели принято следующее.

1*. **Спрос удовлетворяется мгновенно в начале периода непосредственно после получения заказа***.

2. Затраты на размещение заказа отсутствуют.

Рис. 3 иллюстрирует состояние запаса после удовлетворения спроса A. Если $A < Q$, запас $Q — A$ хранится на протяжении периода. Если же $A > Q$, возникает дефицит объема $A — Q$.

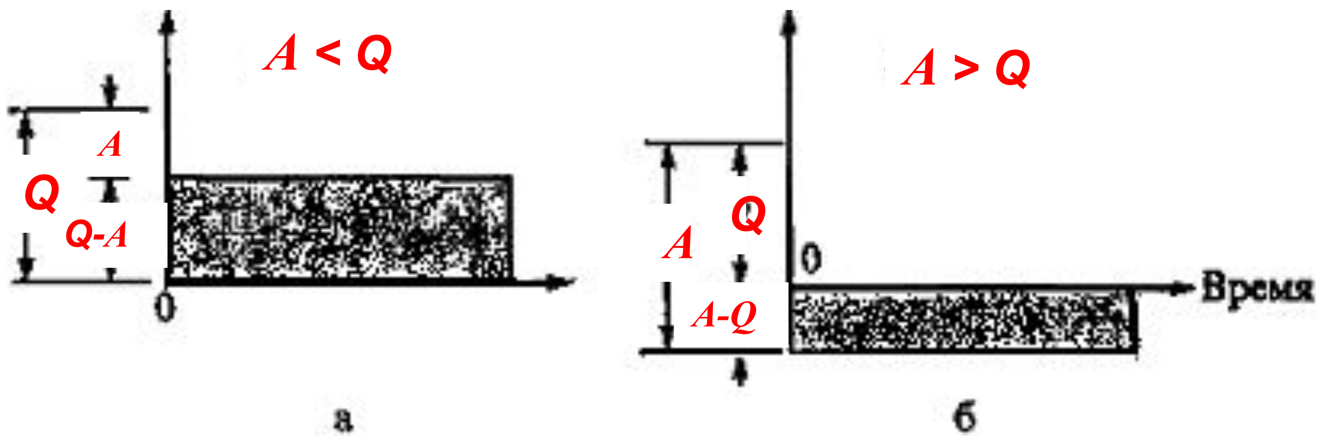


Рис. 3

Ожидаемые затраты ***M(L(Q))*** на период выражаются следующей формулой.

$$M(L(Q)) = c(Q - R) + h\int_0^Q (Q - A) f(A)dA + p\int_Q^\infty (A - Q) f(A)dA.$$

Можно показать, что функция ***M(L(Q))*** является выпуклой по ***Q*** и, таким образом, имеет единственный минимум. Следовательно, вычисляя первую производную функции ***M(L(Q))*** по ***Q*** и приравнивая ее к нулю, получим

$$c + h\int_0^Q f(A)dA - p\int_Q^\infty f(A)dA = 0$$

или

$$c + hP(A < Q) - p(1 - P(A < Q)) = 0$$

Отсюда имеем

$$P(A < Q^*) = \frac{p - c}{p + h}.$$

Правая часть последней формулы известна как **критическое отношение**. Значение ***Q**** определено только при условии, что критическое отношение неотрицательно, т.е. ***p ≥ c***. Случай, когда ***p < c***, является бессмысленным, так как это предполагает, что стоимость закупки единицы продукции выше потери от неудовлетворенного спроса.

Ранее предполагалось, что спрос A является непрерывной случайной величиной. Если же A является дискретной величиной, то плотность распределения вероятностей **f(A)** определена лишь в дискретных точках и функция затрат определяется в соответствии с формулой.

$$M(L(Q)) = c(Q-R) + h\sum_{A=0}^{Q}(Q-A)f(A) + p\sum_{A=Q+1}^{\infty}(A-Q)f(A).$$

Необходимыми условиями оптимальности являются неравенства

M(L(Q - 1)) ≥ M(L(Q)) и M(L(Q + 1)) ≥ M(L(Q)).

Эти условия в данном случае являются достаточными, так как функция ***M(L(Q))*** выпукла. Применение этих условий после некоторых алгебраических преобразований приводит к следующим неравенствам для определения ***Q****.

$$P(A < Q^* - 1) \le \frac{p-c}{p+h} \le P(A < Q^*).$$

2.2. Модель при наличии затрат на оформление заказа

Данная модель отличается от выше представленной тем, что учитывается стоимость ***К*** размещения заказа. Используя обозначения, введенные выше, получаем следующее выражение для суммарной ожидаемой стоимости.

$$M(\bar{L}(Q)) = K + M(L(Q)) = K + c(Q-R) + h\int_0^Q (Q-A)f(A)dA + p\int_Q^\infty (A-Q)f(A)dA.$$

Как показано в разделе 2.1, оптимальное значение ***Q**** должно удовлетворять соотношению

$$P(A < Q^*) = \frac{p-c}{p+h}.$$

Так как **K** является константой, минимум величины $M(\bar{L}(Q))$ также должен достигаться при **Q***, как показано на рис. 4.

Рис. 4

На рис. 4 **S = Q*** и величина **s< S** определяются из уравнения

$$M(L(s)) = M(\bar{L}(S)) = K + M(L(S)), s < S.$$

(Отметим, что это уравнение имеет и другое решение $s_1 > S$, которое не рассматривается.)

Задача формулируется следующим образом. Какое количество продукции необходимо заказывать, если наличный запас перед размещением заказа составляет ***R*** единиц? Ответ на этот вопрос рассматривается по отдельности при выполнении следующих условий.

1. ***R<s.***
2. ***s≤R≤S.***
3. ***R>S.***

Случай 1 (R < s). Так как в наличии имеется ***R*** единиц продукции, соответствующие издержки содержания запаса составляют ***M(L(R))***. Если заказывается любое дополнительное количество продукции (***Q > R***), то соответствующие затраты при заданной величине ***Q*** равны величине $M(\overline{L}(Q))$, которая учитывает стоимость ***K*** размещения заказа. Из рис. 4 следует, что

$$\min_{Q>R} M(\overline{L}(Q)) = M(\overline{L}(S)) < M(L(R)).$$

Следовательно, оптимальной стратегией управления запасами в этом случае будет заказ в ***S - R*** единиц.

Случай 2 (s≤R≤S). Из рис. 4 видно, что

$$\mathrm{M}(\mathrm{L}(\mathrm{R})) \le \min_{Q>R} M(\bar{L}(Q)) = M(\bar{L}(S)).$$

Следовательно, в данном случае дополнительных затрат не возникает, если новый заказ *не размещается*. Поэтому ***Q* =R***.

Случай 3 (R> S). Из рис. 4 видно, что при ***Q > R***

$$\mathrm{M}(\mathrm{L}(\mathrm{R})) \le M(\bar{L}(Q)).$$

Это неравенство показывает, что в данном случае экономнее будет не размещать заказ, т.е. ***Q*=R***.

Описанная стратегия управления запасами определяется следующим правилом.

Если ***R < s***, делать заказ объемом ***S - R***,

если ***R ≥ s***, заказывать не следует.

(Оптимальность стратегии (ее часто называют ***s-S***-стратегией) следует из того, что соответствующая функция затрат является выпуклой. Если это свойство не выполняется, данная стратегия перестает быть оптимальной.)

3. Многоэтапные модели

В многоэтапной модели учитывается приведенная стоимость денег. Если **$\alpha < 1$** – коэффициент дисконтирования (процент скидки) для одного этапа, то сумма **C** спустя **n** этапов будет эквивалентна сумме $\alpha^n C$ в настоящий момент.

Предположения:
- горизонт планирования охватывает **n** этапов;
- не учитывается стоимость размещения заказа;
- предусматривается возможность задолженности;
- нулевое время поставки;
- спрос A в каждый период описывается стационарной (не зависящей от времени) плотностью вероятности **$f(A)$**;
- неудовлетворенный спрос может оставаться таковым лишь на протяжении одного этапа.

Пусть $F_i(R_i)$ — максимальная суммарная ожидаемая прибыль для этапов от i до n, определенная при условии, что R_i — уровень имеющегося запаса перед размещением заказа на i-м этапе.

Используя обозначения из раздела 2 и предполагая, что **g** — удельный доход от реализации единицы продукции, сформулируем задачу управления запасами в виде следующей задачи динамического программирования.

$$F_i(R_i) = \max_{Q_i \geq R_i}\Big\{-c(Q_i - R_i) + \int_0^{Q_i}\big[gA - h(Q_i - A)\big]f(A)dA +$$

$$+\int_{Q_i}^{\infty}\big[gQ_i + \alpha g(A - Q_i) - p(A - Q_i)\big]f(A)dA +$$

$$+\alpha\int_0^{\infty}F_{i+1}(Q_i - A)f(A)dA\Big\}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

где $\mathbf{F_{n+1}(Q_n - A) \equiv 0}$. Величина R_i может принимать отрицательные значения, так как неудовлетворенный спрос может накапливаться. Величина $\alpha g(A-Q_i)$ включена во второй интеграл, поскольку $A-Q_i$ представляет собой неудовлетворенный спрос на i-м этапе, который должен быть удовлетворен на этапе $i+1$.

Задачу можно решить рекуррентно методами динамического программирования. Если число этапов является бесконечным (бесконечный горизонт планирования), приведенное выше рекуррентное уравнение сводится к следующему.

$$F(R) = \max_{Q \ge R}\Big\{-c(Q-R) + \int_0^Q \big[gA - h(Q-A)\big] f(A)dA +$$

$$+\int_Q^\infty \big[gQ + \alpha g(A-Q) - p(A-Q)\big] f(A)dA +$$

$$+\alpha \int_0^\infty F(Q-A) f(A)dA\Big\},$$

где ***R*** и ***Q*** представляют собой уровни запаса на каждом этапе до и после получения заказа соответственно.

Оптимальное значение **Q** можно определить из приведенного ниже необходимого условия, которое в данном случае является также достаточным, так как функция ожидаемой прибыли **F(R)** является вогнутой.

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial Q} = -c - h\int_0^Q f(A)dA + \int_Q^\infty \big[(1-\alpha)g + p\big] f(A)dA + \alpha\int_0^\infty \frac{\partial F(Q-A)}{\partial Q} f(A)dA = 0.$$

Величина $\dfrac{\partial F(Q-A)}{\partial Q}$

определяется следующим образом. Если на начало следующего этапа уровень запаса еще составляет **β > 0** единиц, то прибыль на этом этапе возрастает на величину **cβ**, так как объем последующего заказа уменьшается именно на эту величину. Это означает, что

$$\frac{\partial F(Q-A)}{\partial Q}=c.$$

Следовательно, необходимое условие принимает вид

$$-c-h\int_0^Q f(A)dA+\left[(1-\alpha)g+p\right]\left(1-\int_0^Q f(A)dA\right)+\alpha c\int_0^\infty f(A)dA=0.$$

Поэтому оптимальный уровень заказа **Q*** определяется из уравнения

$$\int_0^{Q^*} f(A)dA=\frac{p+(1-\alpha)(g-c)}{p+h+(1-\alpha)g}.$$

Оптимальная стратегия каждого этапа при заданном исходном запасе ***R*** выражается следующим правилом.

Если ***R* < *Q*****, делать заказ объемом ***Q** - *R***,

если ***R* ≥ *Q*****, заказа не делать.