ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия и геометрическое изображение функции двух переменных

До сих пор мы изучали совместное изменение двух переменных (x, y), из которых одна зависела от другой: значение независимой переменной x уже вполне определяло значение зависимой переменной y (или функции $y = f(x)$).

На самом деле в жизни, как и в науке, нередки случаи, когда независимых переменных оказывается несколько.

Например:

• объём кругового цилиндра $V = \pi R^2 H$, где R и H – независимые переменные, или $V = \pi x^2 y$;

• объём усечённого конуса $V = \frac{\pi}{3} H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, где независимые переменные r, R и H, или $V = \frac{\pi}{3} z\left(x^2 + xy + y^2\right)$;

- при изучении физического состояния какого-либо тела часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы, например, плотность, температура, электрический потенциал, т. е. это функции точки, и зависят они, очевидно, от координат x, y, z. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется ещё и время t.

Определение 16. *Переменная z называется функцией независимых переменных x, y на множестве D, если каждой паре значений $x = x_1$, $y = y_1$ из D по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определённое значение z_1 из Z (Z – область изменения функции).*

В этом случае z – однозначная функция своих аргументов, D – область определения (существования) функции, переменные x, y по отношению к функции z называются аргументами. Функциональная зависимость обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. д.

Пусть функция

$$z = f(x, y) \tag{5.2.1}$$

определена в некоторой области D на плоскости xOy.

Множество точек $P(x, y, f(x, y))$, определяемое уравнением (5.2.1), является геометрическим образом функции двух переменных – это поверхность, которая проектируется в область D (см. рис. 5.52).

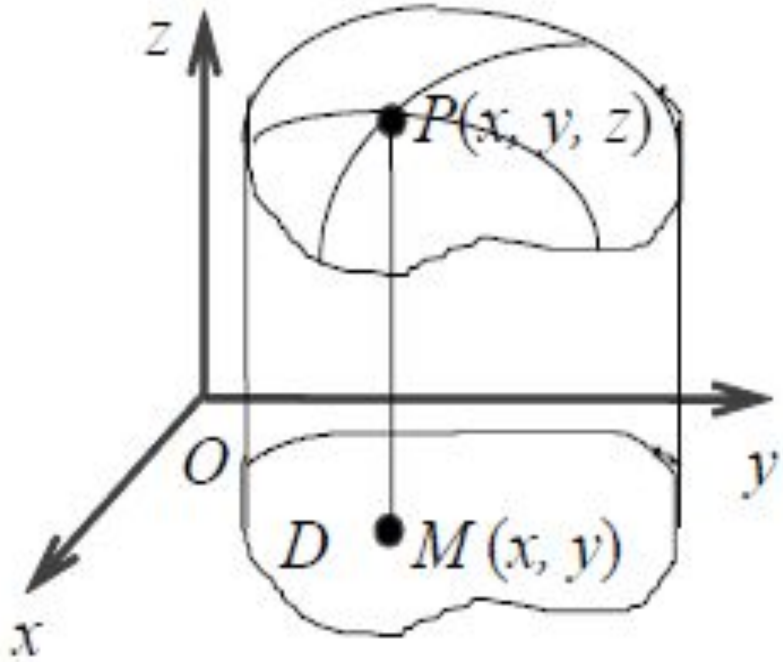


Рис. 5.52

Точка M является проекцией точки P.

Например, функция $z = x^2 + y^2 + 1$ геометрически представляет собой уравнение параболоида, смещённого относительно начала координат на единицу масштаба по оси Oz (рис. 5.53). Областью определения этой функции является вся плоскость xOy.

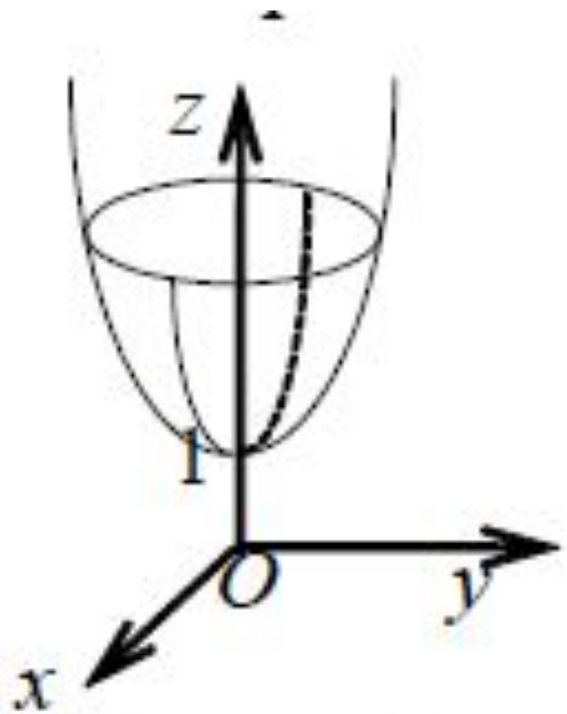


Рис. 5.53

Определение 17. *Окрестностью точки* $M_0(x_0, y_0)$ *радиуса* r *называется совокупность точек* $M(x, y)$, *лежащих внутри круга радиуса* r, *с центром в точке* M_0 (рис. 5.54):

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r.$$

Если функция обладает некоторым свойством в точке M_0, то она обладает этим свойством в окрестности точки M_0.

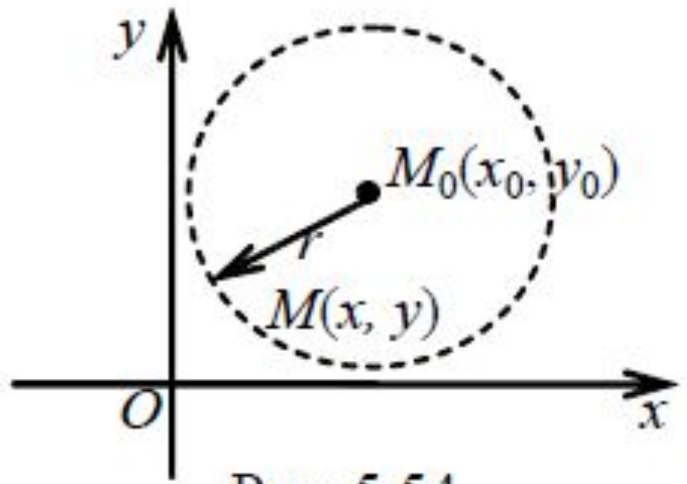


Рис. 5.54

Определение 18. *Точка $C(x, y)$ называется граничной для некоторой области D, если в её окрестности есть как точки, принадлежащие области D, так и точки, не содержащиеся в области D. Всё множество граничных точек образует границу области.*

На рис. 5.55 – это линия L.

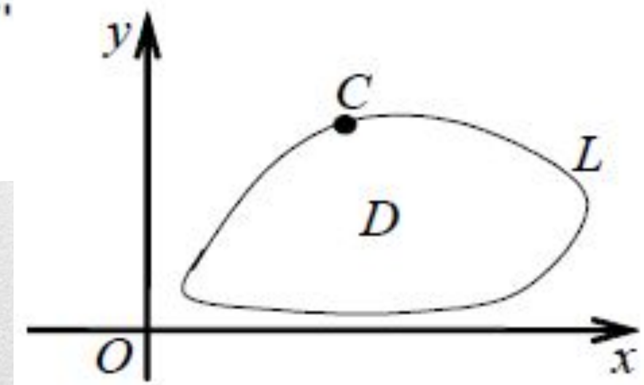


Рис. 5.55

Определение 19. *Если граница (линия L) принадлежит области D, то область называют* ***замкнутой и*** *обозначают $\overline{D}$, границу при этом изображают сплошной линией. В противном случае ($L \notin D$) область D –* ***открытая*** *(не замкнутая). В этом случае границу изображают пунктирной линией.*

Пример Найти область определения функций:

$$z = \ln(x - y);$$

42.2. Логарифмическая функция определена только при положительном значении аргумента.

Значит, $D = \{(x, y) : x > y\}$ – это часть плоскости xOy справа от линии (границы области) $y = x$, сама граница не принадлежит области D (рис. 5.56).

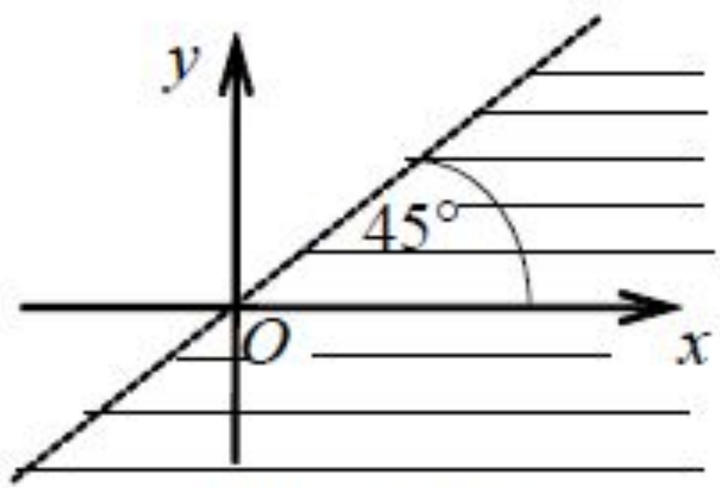


Рис. 5.56

Пример

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2};$$

42.3. Функция существует, если выполняется неравенство $1-x^2-y^2\geq 0$, т. е. область $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$. Это круг со всеми внутренними и граничными точками (рис. 5.57).

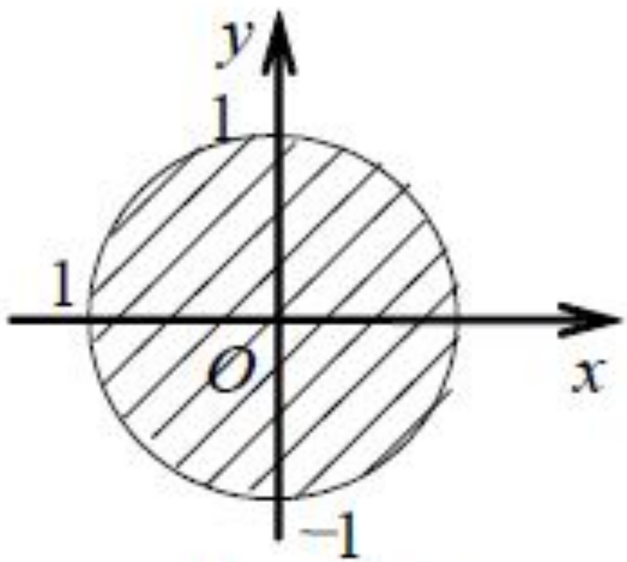


Рис. 5.57

Пример . $z = \arcsin(x - y)$.

42.4. Функция определена при тех значениях x и y, которые удовлетворяют неравенству $-1 \le x - y \le 1$. На плоскости xOy эта область представляет собой полосу, ограниченную параллельными прямыми $x - y + 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ (рис. 5.58).

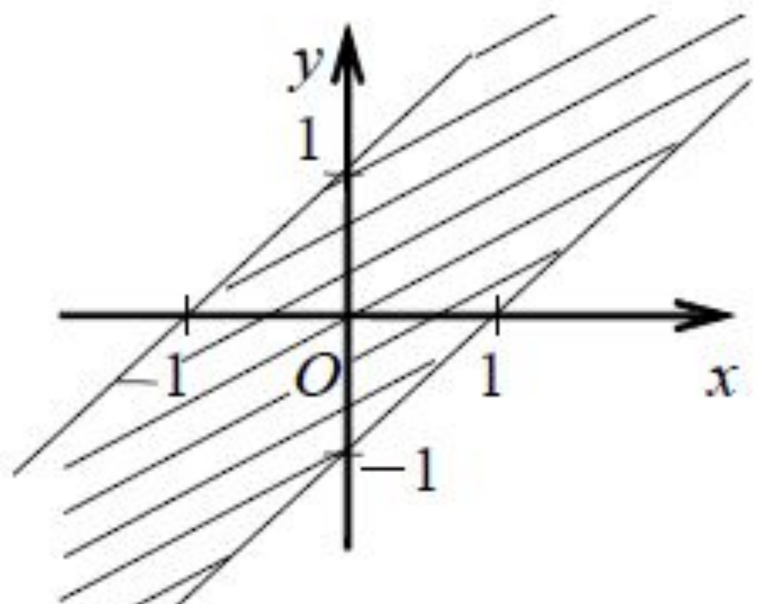


Рис. 5.58

Функция многих переменных

В случае функций трёх переменных (например, распределение температуры в некотором объёме $T = f(x, y, z)$

можно дать геометрическое толкование $M(x, y, z)$

как точек трёхмерного пространства, а множество таких точек с координатами (x_i, y_j, z_k)

– как часть пространства, или геометрически – тело.

Но при n >3 возможности непосредственной геометрической интерпретации уже нет.

При изучении функций многих переменных n >3

вводят понятие n – мерного пространства.

Функции нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функция $f : X \to U$ *называется* **функцией n переменных** .

Записывают: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и u .

Значение $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$ записывают в виде

$$u = f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \quad \text{или} \quad u\Big|_{x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, \ldots, x_n=x_{0n}}$$

Назовём n – мерной "точкой" систему из n вещественных чисел: $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Сами числа $x_1, \ldots, x_n$ являются координатами этой точки M.

Множество всех n – мерных "точек" составляет n – мерное пространство, которое иногда называют арифметическим.

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называют геометрическое место точек (x,y) плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C.

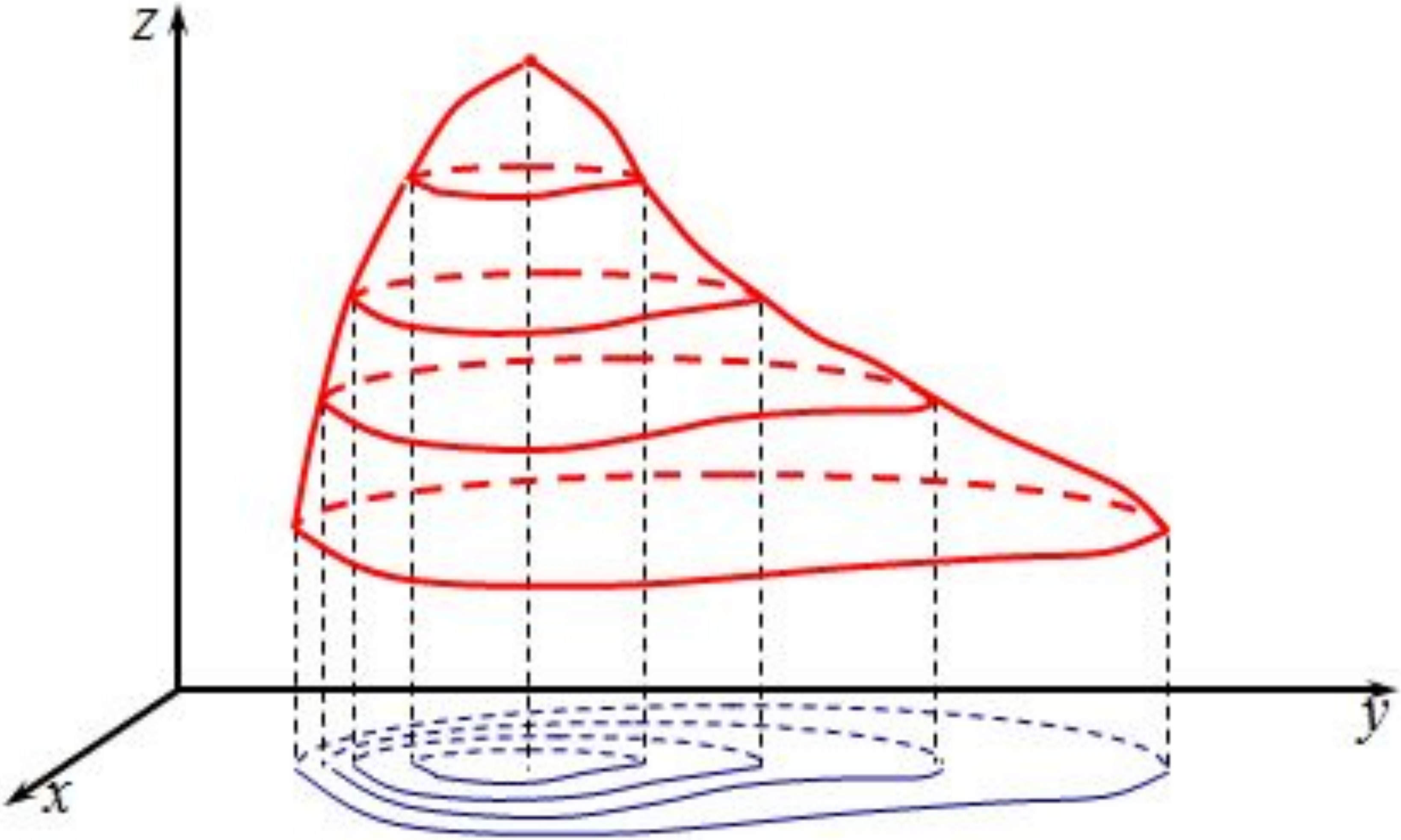
$\Rightarrow$ 1) Линия уровня – линия в D(z), которая имеет уравнение

$$f(x,y) = C\,.$$

2) Линия уровня – проекция на плоскость xOy линии пере сечения графика функции $z = f(x,y)$ и плоскости $z = C$.

Полагаем C равными $C_1, C_1 + h, C_1 + 2h, \ldots, C_1 + nh$.

Получим линии уровня, по расположению которых можно судить о графике функции и, следовательно, о характере изменения функции.



Таким образом, там, где линии «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность, изображающая функцию, идет круче).

Частное и полное приращения функции двух переменных

Рассмотрим сечения поверхности $z = f(x, y)$(см. рис. 5.59):

1) плоскостью $x = c$, $c = \text{const}$.

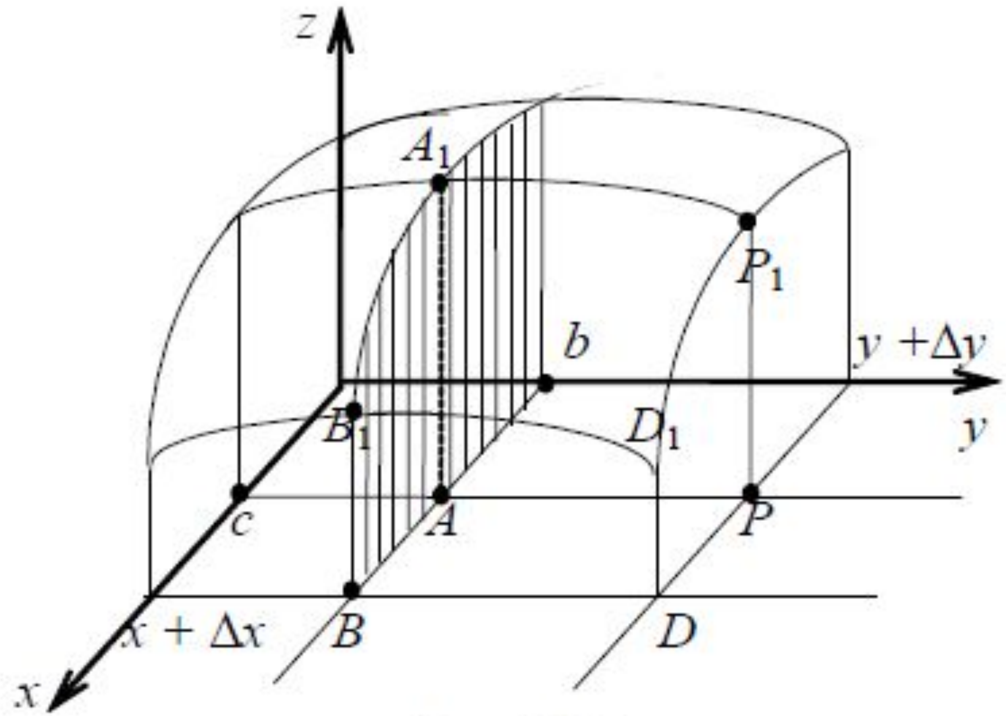
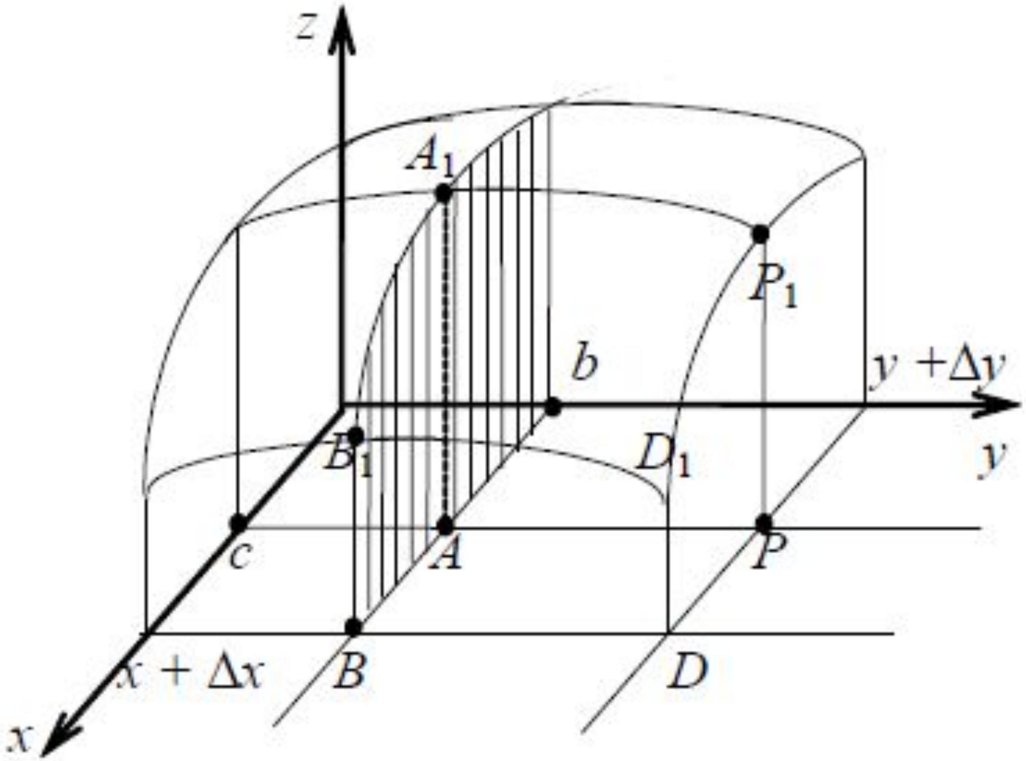


Рис. 5.59

Все точки этой плоскости, в том числе A, A_1, P_1, P, имеют одну и ту же абсциссу $x = c$;

2) плоскостью $y = b$ (на рис. 5.59 – заштрихована), $b = \text{const}$.

Точки B, B_1, A, A_1 этой плоскости имеют одну и ту же ординату $y = b$;

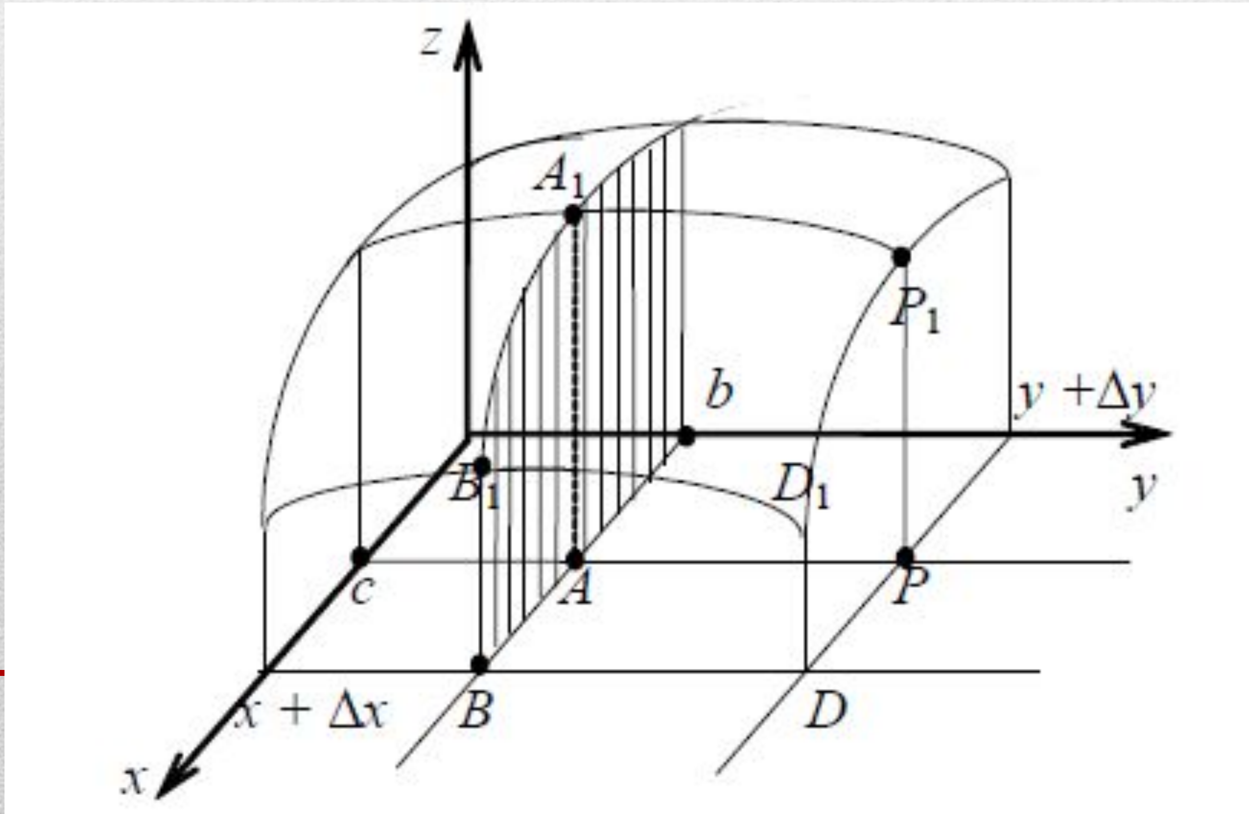


Точки B, B_1, A, A_1 этой плоскости имеют одну и ту же ординату $y = b$;

3) не меняя x, дадим приращение Δy ординате и построим плоскость, параллельную $y = b$, ей будут принадлежать точки

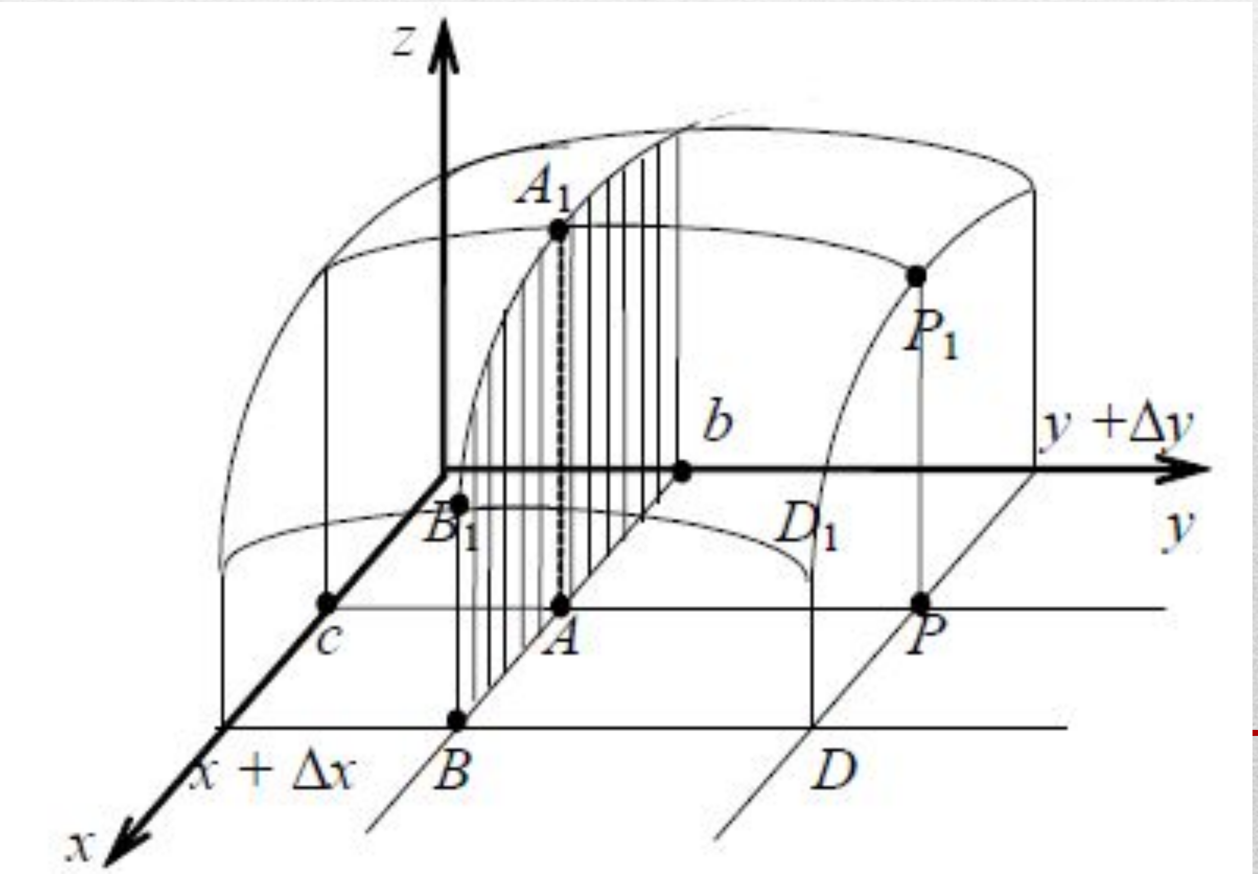
$$P(x, y + \Delta y, 0) \text{ и } P_1(x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y)),$$

тогда и функция $z = f(x, y)$ получит частное приращение $\Delta_y z$, зависящее только от y: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$;



4) не меняя y (пусть $y = b$), придадим приращение Δx абсциссе и построим плоскость, параллельную $x = c$. Ей принадлежат точки $B(x + \Delta x, y, 0)$, $B_1(x + \Delta x, y, f(x + \Delta x, y))$.

Следовательно, функция получила частное приращение по переменной x: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$;

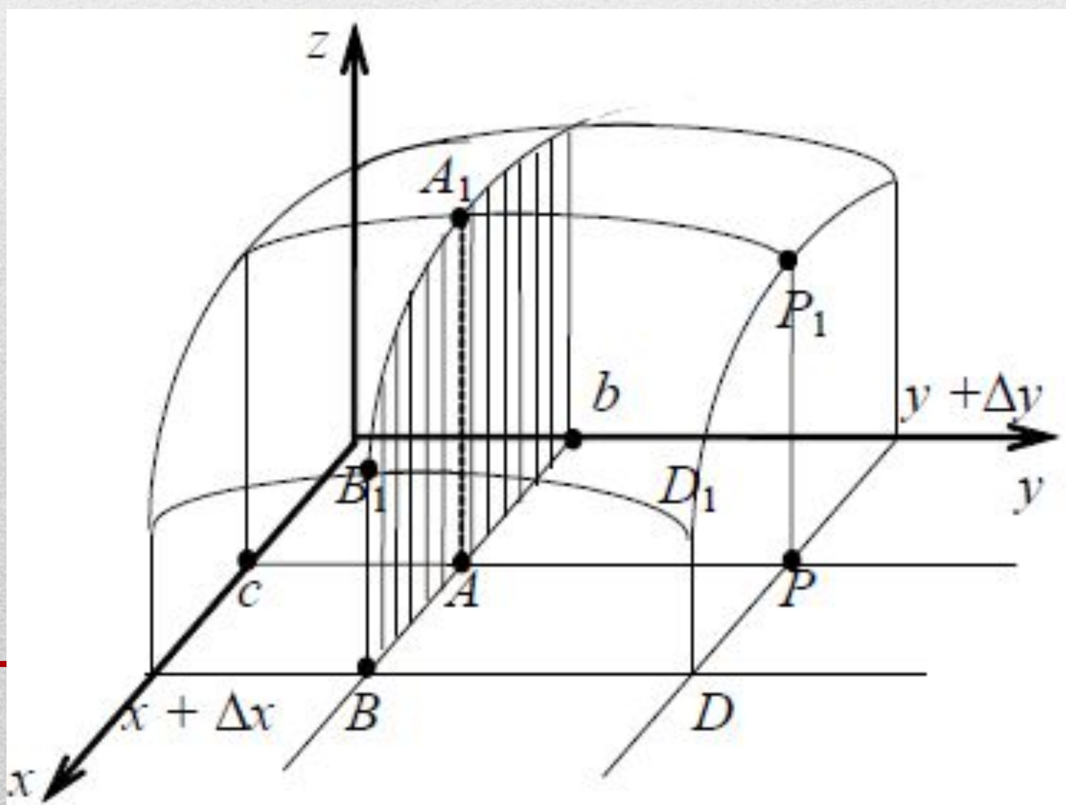


5) одновременно дадим приращение переменным x и y. Тогда функция получит приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

На рис. 5.59 сравните точки

$$D(x + \Delta x, y + \Delta y) \text{ и } D_1(x + \Delta x, y + \Delta y, f(x + \Delta x, y + \Delta y)).$$



ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \in xOy$, содержащей точку M_0.

Определение 20. *Число A называется* ***пределом функции*** $f(x, y)$ *при стремлении* $M(x, y)$ *к* $M_0(x_0, y_0)$, *если для всякого как угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует (или найдётся) число* $r(\varepsilon) > 0$, *такое, что для всех точек* (x, y), *для которых выполняется неравенство* $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, *имеет место неравенство* $|A - f(x, y)| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$, или $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$.

Геометрически можно интерпретировать это определение так: число A является пределом функции $f(x, y)$ при $M \to M_0$, если в ε-окрестность этого числа попадут все значения функции, соответствующие точкам (x, y) из r-окрестности точки M_0.

Пример Вычислить пределы функций:

$$. \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

Решение. 43.1. Условие $(x, y)\to(0, 0)$ эквивалентно условию $\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.

Предварительно получим следующие неравенства:

• очевидно, $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \ge |2xy| \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2} \ge xy$;

• вспомним неравенство $\sin\alpha < \alpha$, выведенное при доказательстве первого замечательного предела: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow \sin\alpha \sim \alpha$.

$\alpha \to 0 \quad \alpha$

Теперь можно оценить выражения

$$|\sin xy| \leq xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \quad 0 \leq \left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Окончательно $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Пример

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y=3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = A.$$

Сделаем замену переменной $x=\frac{1}{t} \Rightarrow t=\frac{1}{x} \to 0$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}} \frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{\substack{t\to 0 \\ y\to 3}} \frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)}=\begin{pmatrix}\ln(1+t)\sim t \\ \text{при } t\to 0\end{pmatrix}=\lim_{\substack{t\to 0 \\ y\to 3}} \frac{1}{1+ty}=1.$$

Таким образом, $A=e$.

Определение 21. *Функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в точке и некоторой её окрестности и* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, *или* $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Введём обозначения:

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0,\ \Delta z = z - z_0,\ z_0 = f(x_0, y_0).$$

Определение 22. *Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0), если* $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right] = 0$, или $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Иначе говоря, *функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Определение 23. *Функция непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области. Точки, в которых условия непрерывности нарушены, называются* **точками разрыва** *(это точки, где функция не определена).*

Определение 24. *Точка M_0 называется точкой разрыва функции $u = f(M)$, если функция $u = f(M)$ определена вблизи точки M_0 (т. е. её окрестности), но не определена в самой точке M_0. Линия, все точки которой являются точками разрыва функции $u = f(M)$, называется линией разрыва этой функции.*

Свойства непрерывных функций

Свойство 1. *Алгебраическая сумма и произведение конечного числа непрерывных в данной точке функций есть непрерывная функция в этой точке. Частное двух непрерывных функций в точке, при условии, что знаменатель отличен от нуля в этой точке, также есть непрерывная функция в этой точке.*

Свойство 2. ***Непрерывность сложной функции.*** *Пусть функции* $z = \varphi_1(x, y)$ и $z = \varphi_2(x, y)$ *непрерывны в некоторой точке* $P_0(x_0, y_0) \in D$, *и пусть функция* $v = f(\varphi_1, \varphi_2) = F(x, y)$ *непрерывна в точке* $Q_0[\varphi_1(P_0), \varphi_2(P_0)]$ *пространства* $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, *соответствующей точке* P_0, *тогда такая функция* v *будет непрерывна в точке* P_0.

Свойство 3. *Если функция $z = f(x, y) = f(M)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то:*

- *функция z ограничена в области $\overline{D}$;*

- *функция z принимает в области $\overline{D}$ свои наименьшее и наибольшее значения;*

- *если в двух точках A и B области D функция z принимает неравные значения, то она принимает и всякое промежуточное между ними значение по крайней мере в одной точке любой кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в области D. В частности, если $f(A)$ и $f(B)$ – числа противоположных знаков, то функция $f(M)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке любой упомянутой кривой.*

Свойство 4. ***Свойство равномерной непрерывности.*** *При всяком* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое число* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых двух точек* A *и* B *области* D, *расстояние между которыми меньше* $\delta(\varepsilon)$, *будет справедливо неравенство* $|f(A) - f(B)| < \varepsilon$.

функция, непрерывная по совокупности аргументов, будет непрерывна и по каждому аргументу в отдельности (при фиксированных других аргументах). ***Обратное же неверно!***

Пример Исследовать на непрерывность функции:

$$z = x^2 + y^2;$$

Функция $z = x^2 + y^2$ непрерывна на всей плоскости

Для доказательства используем определение 22. Оценим приращение функции Δz. Пусть переменные x и y получили соответственно приращения Δx и Δy. Тогда приращение функции

$$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x, y) = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - (x^2 + y^2) =$$

$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Переходя к пределу, получаем $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Значит, данная функция непрерывна для любых значений x и y.

Пример

$$f(x,y)=\begin{cases}8+x-y \text{ при } x\neq 1,\ y\neq 2;\\ 6 \text{ при } x=1,\ y=2;\end{cases}$$

44.2. Функция определена в самой точке $M_0(1,\ 2)$ и вблизи её, но её предел при $M(x,\ y)\to M_0(1,\ 2)$ не совпадает с частным значением функции в этой точке: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(8+x-y)=7\neq f(1,2)=6$.

Вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $(1,\ 2)$.

Пример

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-y}, & x^2\neq y;\\ 1, & x^2=y;\end{cases}$$

44.3. Эта функция непрерывна всюду (см. свойство 1), кроме точек, лежащих на параболе $y=x^2$, где знаменатель дроби обращается в нуль, т. е. имеется линия разрыва.

Частные производные функции нескольких переменных

Частные производные

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0) \in D$.

Придадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизмененным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется ***частным приращением*** функции $z = f(x,y)$ ***по x в точке*** $M_0(x_0, y_0)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предел при* $\Delta x \to 0$ *отношения*

$$\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(если он существует и конечен) *называется* ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной x в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

Обозначают:

или

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \quad z'_x(M_0), \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad f'_x(M_0)$$

Замечания.

1) Обозначения

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0,y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x,y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Соответствие $(x_0; y_0) \to f'_x(x_0; y_0)$ (и $(x_0; y_0) \to f'_y(x_0; y_0)$) является функцией, определенной на D_1 (D_2) $\subseteq$ D(f).

Ее называют ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной x*** (y) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f'_x(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f'_y(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad f'_y(M) \right).$$

Операция нахождения для функции $z = f(x,y)$ ее частных производных $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ называется ***дифференцированием функции z = f(x,y) по переменной x и y*** соответственно.

Пример

Найти частные производные функции двух перемен- ных:

$$. \ z = x^2 + y^3 + xy + 8;$$

$\sqrt{x}$

Решение. 48.1. Полагая $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$.

Полагая $x = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной y:

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + x$.

Фактически, – это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) при постоянном значении другой переменной.

$$f'_x(x,y) \quad \left(f'_y(x,y) \right)$$

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменой. При этом, одна из переменных считается константой.

Пример

$$z=\ln\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right);$$

48.2. Считая z функцией только от x, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\left(x^2-y^2\right)'_x\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}\cdot(2x-0)\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Аналогично, считая z функцией только от y, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}}(0-2y)\right)=\frac{-y}{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Пример

$$z = e^{x/y};$$

48.3. Полагая $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \cdot x' = \frac{1}{y} e^{x/y}.$$

Полагая $x = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = e^{x/y} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{x/y}.$$

Пример $z = \sin(xy) + 5x^3 y + x - y^2$;

48.4. Полагая $y = \text{const}$, находим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot (xy)'_x + 5y \cdot (x^3)' + 1 - 0 = y\cos(xy) + 15yx^2 + 1.$$

Полагая $x = \text{const}$, находим $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy) \cdot (xy)'_y + 5x^3 \cdot y' + 0 - 2y = x\cos(xy) + 5x^3 - 2y.$$

Пример $z = x^y$;

48.5. Полагая, что $y = \text{const}$, дифференцируем z как функцию переменной x:

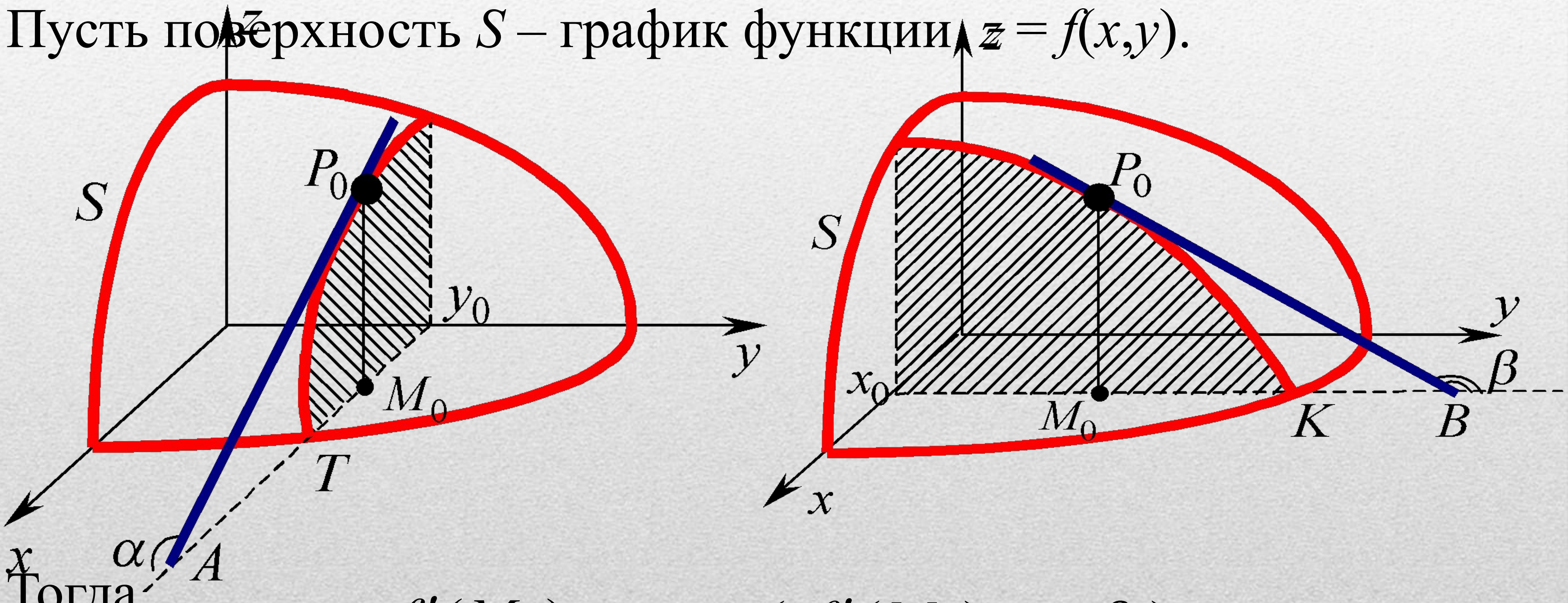
$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

Считая z функцией от y, находим $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$.



Тогда

$$f'_x(M_0) = \mathrm{tg}\,\alpha \quad (f'_y(M_0) = \mathrm{tg}\,\beta),$$

где α(β) – угол наклона к оси Ox(Oy) касательной, проведенной в точке $P_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$).