

Тема учебного
занятия:
КОМБИНАТОРИКА



Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами.

Обычные вопросы в комбинаторных задачах:

Сколькими способами..? Сколько вариантов..?



N-факториал

$N!$ – это произведение чисел от 1 до n

Например:

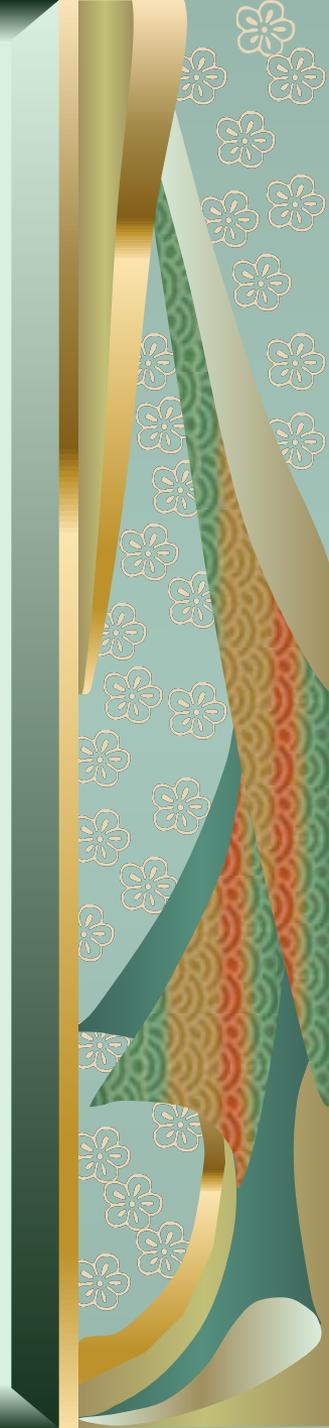
$$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$$

Подсчитать: $7!$ $4!$ $6!$



Основные комбинаторные формулы

- *Размещения*
- *Перестановки*
- *Сочетания*



Размещения

Размещениями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

- **Число размещений без повторений** из n по m (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

- **Размещениями с повторениями** из n элементов по m называются упорядоченные m -элементные выборки, в которых элементы могут **повторяться**.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

НАПРИМЕР

Возьмем буквы Б, А, Р. Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в Наборе не повторяются; 2) буквы могут повторяться?

Решение.

1) Получатся следующие наборы: **БА, БР, АР, АБ, РБ, РА.**

По формуле 1

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$$

получаем: 6 наборов

2) Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АБ, АР, РР, РБ, РА.**

По формуле 2

$$\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

получаем 9 наборов

Решить: Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

Перестановки

Перестановками из n элементов называются размещения из этих n элементов по n (Перестановки - частный случай размещений).

- **Число перестановок без повторений** (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

- **Число перестановок с повторениями** (k различных элементов, где элементы могут повторяться m_1, m_2, \dots, m_k раз и $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$$



НАПРИМЕР

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие перестановки из этих букв можно получить?

Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) буква А повторяется два раза?

Решение.

1) Получатся наборы: БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ.

По формуле (1) получаем: $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ наборов.

2) Получатся наборы: **БАРА, БРАА, БААР, ААРБ, ААБР, АБАР, АРАБ, АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.**

По формуле (2) получаем:

$$P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3 \cdot 4 = 12. \text{ наборов}$$

Решить: Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Сочетания

Сочетаниями из n элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом (отличие сочетаний от размещений в том, что в сочетаниях не учитывается порядок элементов).

- **Число сочетаний без повторений** (n различных элементов, взятых по m) вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- **Число сочетаний с повторениями** (n элементов, взятых по m , где элементы в наборе могут повторяться) вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$



НАПРИМЕР

Возьмем буквы **Б, А, Р**. Какие сочетания из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если: 1) буквы в наборе не повторяются; 2) можно брать по два одинаковые буквы.

Решение.

1) Получатся наборы: **БА** (**БА** и **АБ** - один и тот же набор), **АР** и **РБ**.

По формуле (1) получаем:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

наборов.

2) Получатся наборы: **ББ, БА, БР, АА, АР, РР**.

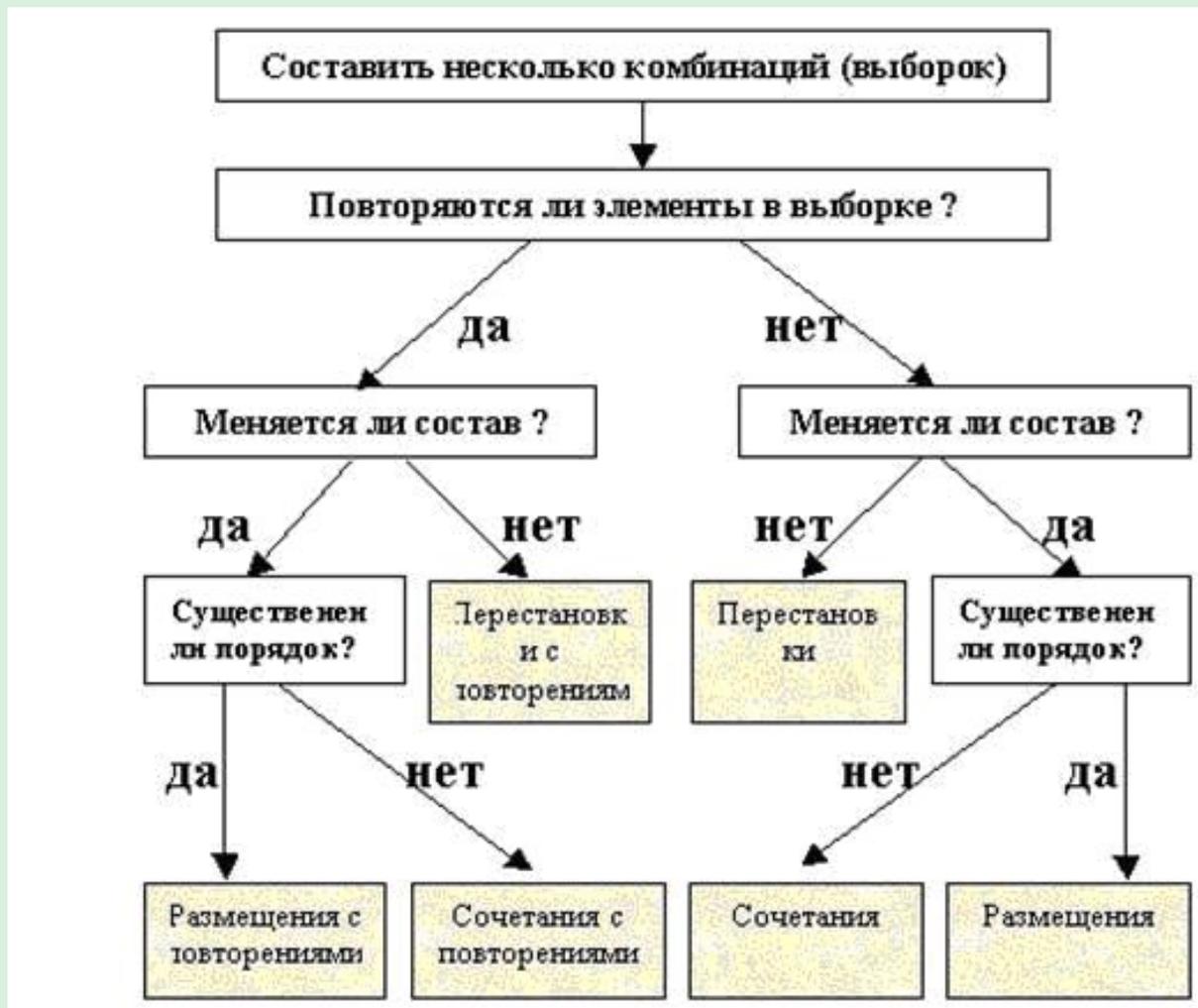
По формуле (2) получаем:

$$\tilde{C}_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 3 \cdot 2 = 6$$

наборов

Решить: Из 20 учащихся надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Схема определения вида комбинации:



Решение задач

- У нас есть 9 разных книг из серии “Занимательная математика”.
Сколькими способами можно:
 1. Расставить их на полке.
 2. Подарить три из них победителям школьной олимпиады, занявшим первые три места.
- У бармена есть 6 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай ровно 3 различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?
- В группе из 20 студентов надо выбрать 2 представителей для выступления на конференции. Сколькими способами можно это сделать?
- В группе из 20 студентов, среди которых 2 отличника, надо выбрать 4 человека для участия в конференции. Сколькими способами можно выбрать этих четверых, если отличники обязательно должны попасть на конференцию?
- Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин.



Закон умножения

Определение

Закон умножения в комбинаторике: число сочетаний (способов, комбинаций) в независимых наборах умножается.

Другими словами, пусть имеется A способов выполнить одно действием B способов выполнить другое действие. Пусть также эти действия независимы, т.е. никак не связаны между собой. Тогда можно найти число способов выполнить первое и второе действие по формуле: $C = A \cdot B$.

Закон умножения — это логическое «И», при котором нас интересует одновременное выполнение и первого, и второго действия.



НАПРИМЕР

В корзине лежат 8 белых шаров и 12 черных. Сколькими способами можно достать из этой корзины 2 белых шара и 2 черных?

Решение

Всего в корзине $n = 8$ белых шаров, из которых надо выбрать $k = 2$ шара.

Это можно сделать $C_8^2 = \dots = 28$ различными способами.

Кроме того, в корзине имеется $n = 12$ черных шаров, из которых надо выбрать опять же $k = 2$ шара. Число способов сделать это равно

$C_{12}^2 = \dots = 66$.

Поскольку выбор белого шара и выбор черного — события независимые, общее число комбинаций считается по закону умножения: $C = 28 \cdot 66 = 1848$. Как видим, вариантов может быть довольно много.



Закон сложения

- *Закон сложения* в комбинаторике: если два взаимоисключающих действия можно выполнить A и B способами соответственно, то эти события можно объединить. При этом возникнет новое событие, которое можно выполнить $X = A + B$ способами.

Другими словами, при объединении взаимоисключающих действий (событий, вариантов) число их комбинаций складывается.

Можно сказать, что закон сложения — это логическое «ИЛИ» в комбинаторике, когда нас устраивает любой из взаимоисключающих вариантов.



НАПРИМЕР

В корзине лежат 9 черных шаров и 7 красных. Мальчик достает 2 шара одинакового цвета. Сколькими способами он может это сделать?

Решение

Если шары одинакового цвета, то вариантов немного: оба они либо черные, либо красные. Очевидно, что эти варианты — взаимоисключающие.

В первом случае мальчику предстоит выбрать $k = 2$ черных шара из 9 имеющихся. Число способов сделать это равно $C_9^2 = \dots = 36$. $n =$

Аналогично, во втором случае выбираем $k = 2$ красных шара из 7 возможных. Число способов равно $C_7^2 = \dots = 21$. $n =$

Осталось найти общее количество способов. Поскольку варианты с черными и красными шарами — взаимоисключающие, по закону сложения имеем: $X = 36 + 21 = 57$.

