Краткая история математических открытий

Около 1800 года до н.э.

В вавилонских табличках объясняется, как решать квадратные уравнения

Около 500 года до н.э.

Пифагор Самосский создает свою знаменитую теорему о прямоугольном треугольнике: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

VII век н.э.

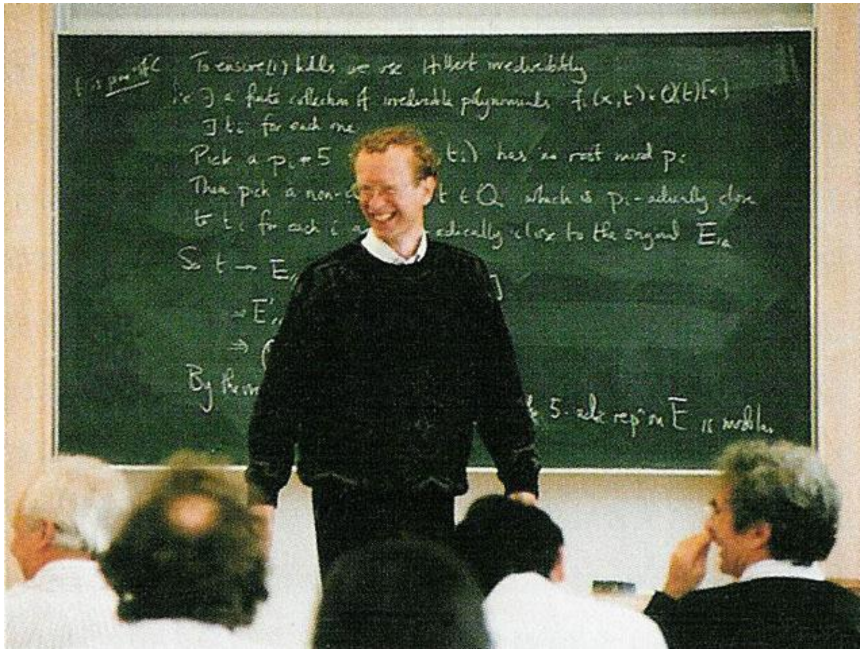
Индийский математик Брахмагупта пишет труд, который считается самым ранним текстом, где ноль осмысливается как полноправное число

1792 год

15-летний Карл Фридрих Гаусс находит плотность распределения простых чисел

1637 год

Пьер Ферма, отец-основатель числовой теории, разрабатывает свою «Последнюю теорему», которая гласит: «Если целое число n больше двух, то уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет натуральных решений a, b и c».



1994 год

Теорема была окончательно доказана в 1994 году британским математиком Эндрю Уайльсом

2002 год

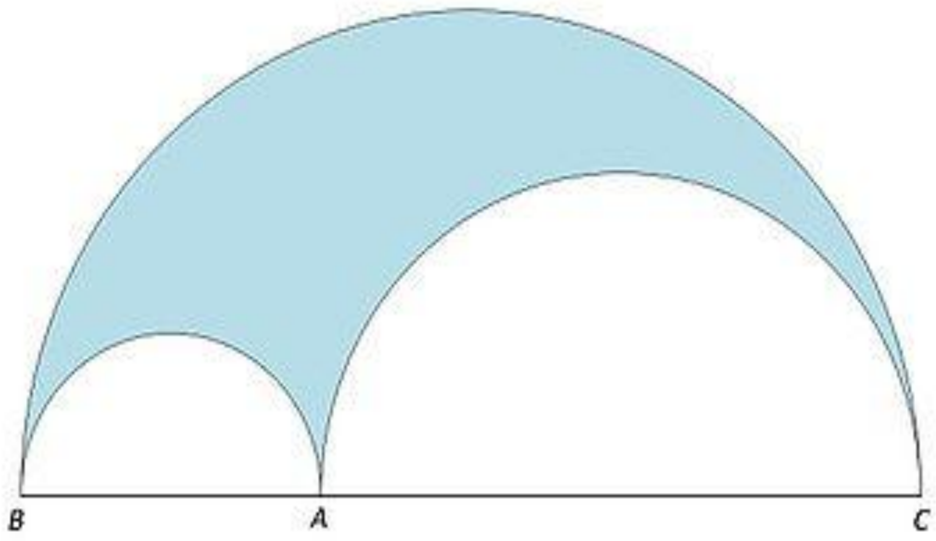
Российский математик Григорий Перельман доказывает гипотезу Пуанкаре, предполагающую математическую возможность существования определенной формы у Вселенной

2011 год. **11а обнаруживает в переводах работ Архимеда неполное доказательство одной из его лемм, и сегодня этот пробел будет ликвидирован.**

Ἀρχιμήδης

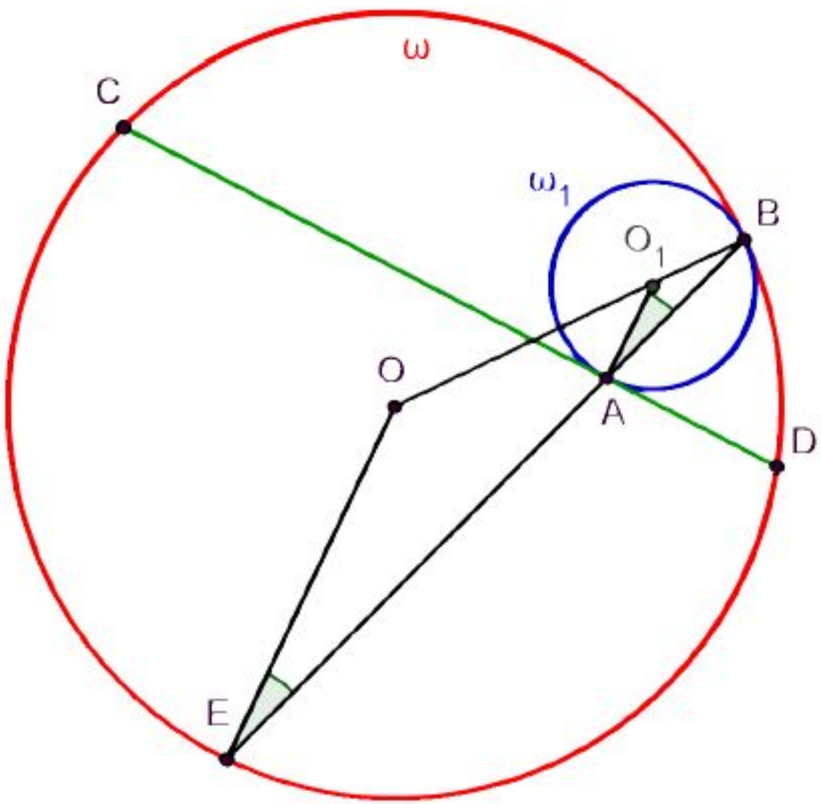
«Архимед» (Доменико Фетти, 1620)

Дата рождения:	287 год до н. э.
Место рождения:	Сиракузы
Дата смерти:	212 год до н. э.
Место смерти:	Сиракузы
Научная сфера:	Математика, механика, инженерия


B
A
C


C.S. OSBORNE & CO. No. 70

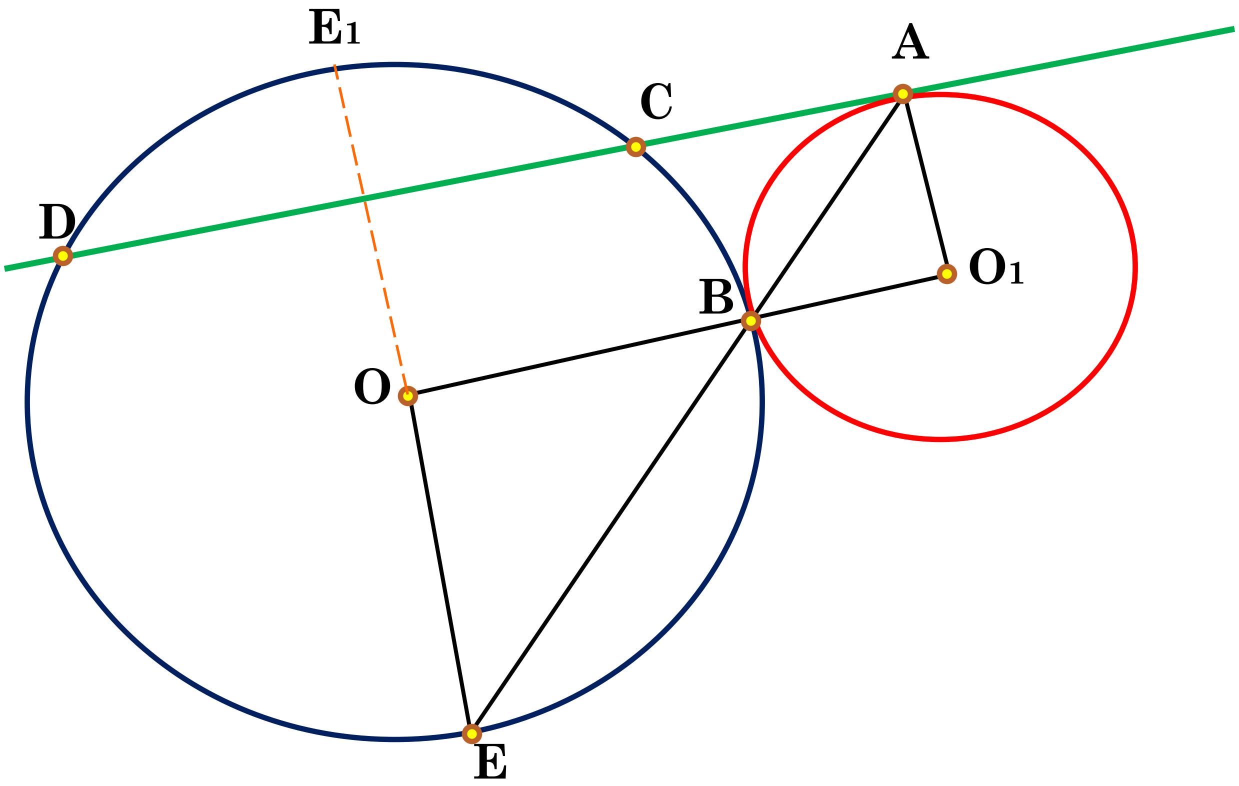
Лемма. **Даны две касающиеся окружности ω и ω_1 и прямая *CD*, касающаяся одной из них и пересекающая другую (рис. 5). Пусть *B* — точка касания окружностей, *A* — точка касания прямой и окружности, *E* — вторая точка пересечения прямой *AB* и окружности ω. Докажите, что *E* — середина дуги *CD*.**

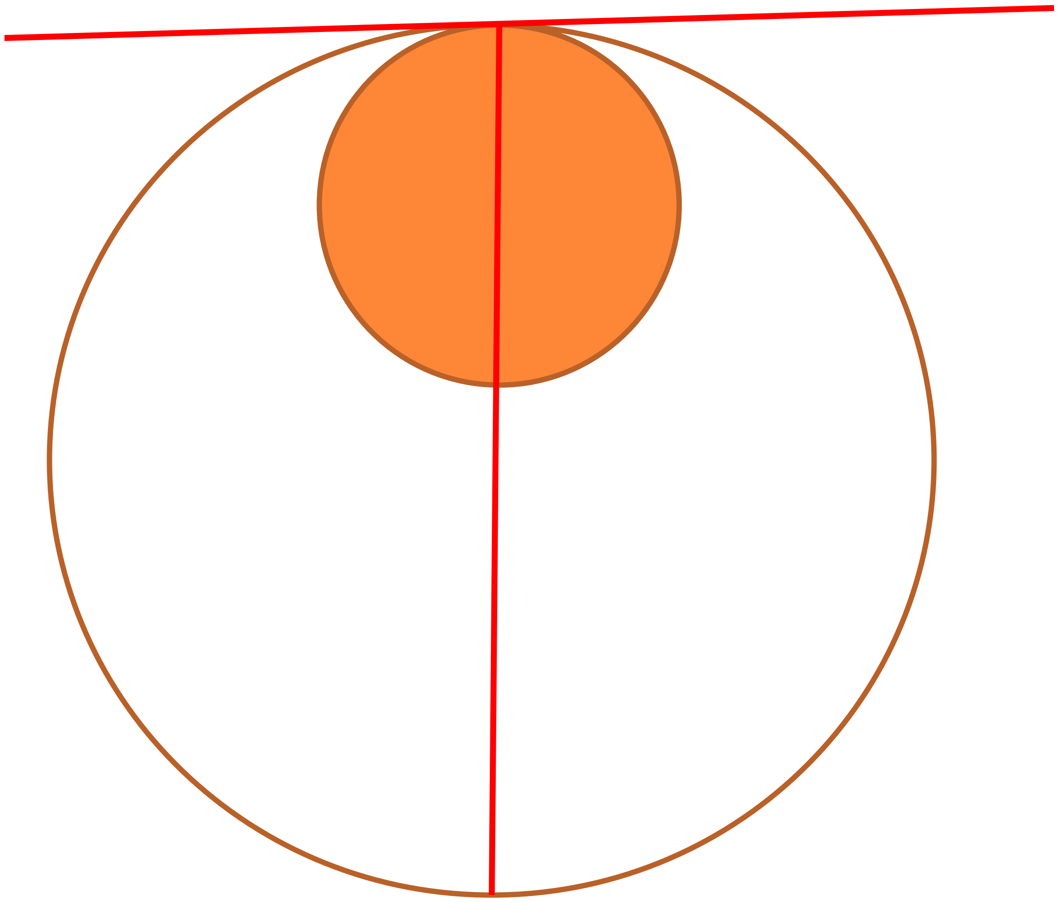


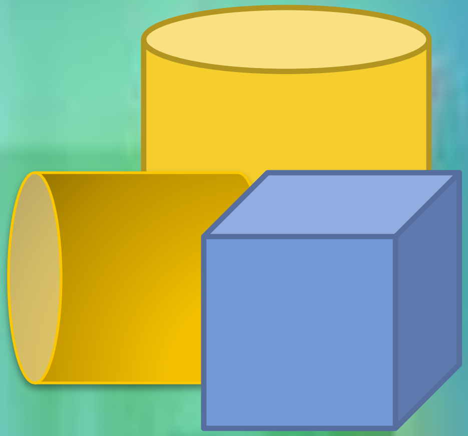
Другие случаи расположения окружностей рассматриваются аналогично. Заметим, что точки C и D могут слиться, т. е. рассматриваемая прямая может и касаться окружности. В этом случае прямая AB пройдет через точку E такую, что KE — диаметр данной окружности. ▼

Лемма Архимеда. Пусть прямая пересекает данную окружность в точках C и D Рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке B а прямой CD в точке A Тогда прямая AB проходит через середину одной из двух дуг CD на которые данная окружность разделена прямой CD

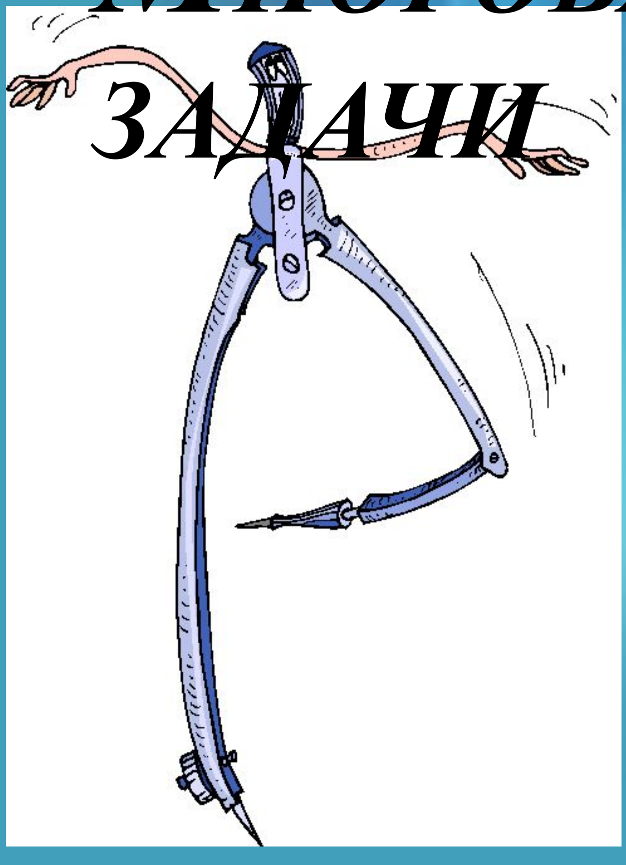
Лемма Архимеда. Пусть прямая пересекает данную окружность в точках K и M. Рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке P, а прямой KM в точке L. Тогда прямая PL проходит через середину одной из двух дуг KM, на которые данная окружность разделена прямой KM.


E1
A
C
D
B
O1
O
E



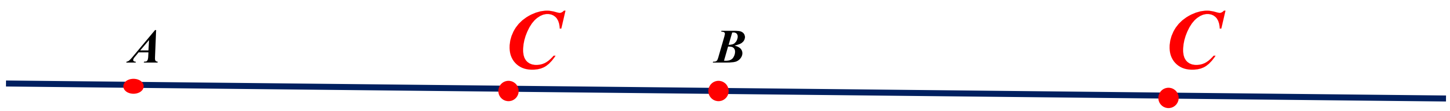


Многовариантные задачи

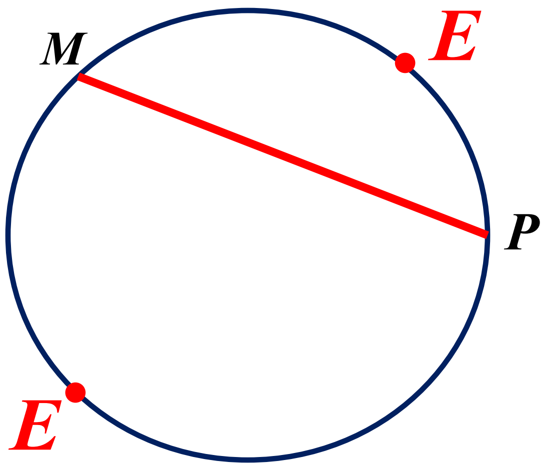


Неоднозначность условия

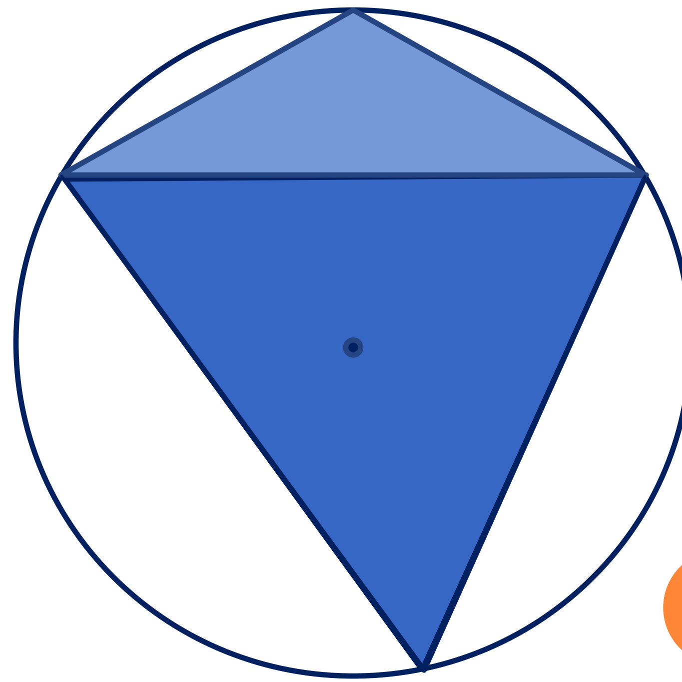
1).



2).



3).



Задача *.Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна 20 . πайдите площадь этого треугольника, если его основание равно 12.*

$$C = 2\pi R = 20\pi <=> R = 10$$

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle C} <=> \sin\angle C = \frac{12}{2 \cdot 10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\angle C = \pm\frac{4}{5}$$

2 случай $\cos\angle C_2 = -\frac{4}{5}$

$$AB^2 = 2AC_2{}^2 - 2AC_2{}^2\cos\angle C_2$$

$$AC_1{}^2 = \frac{AB^2}{2(1-\cos\angle C_2)} = \frac{144}{2 \cdot \frac{9}{5}} = 40$$

$$S_{\Delta ABC_2} = \frac{1}{2}AC_2{}^2\sin\angle C_2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{3}{5} = 12$$

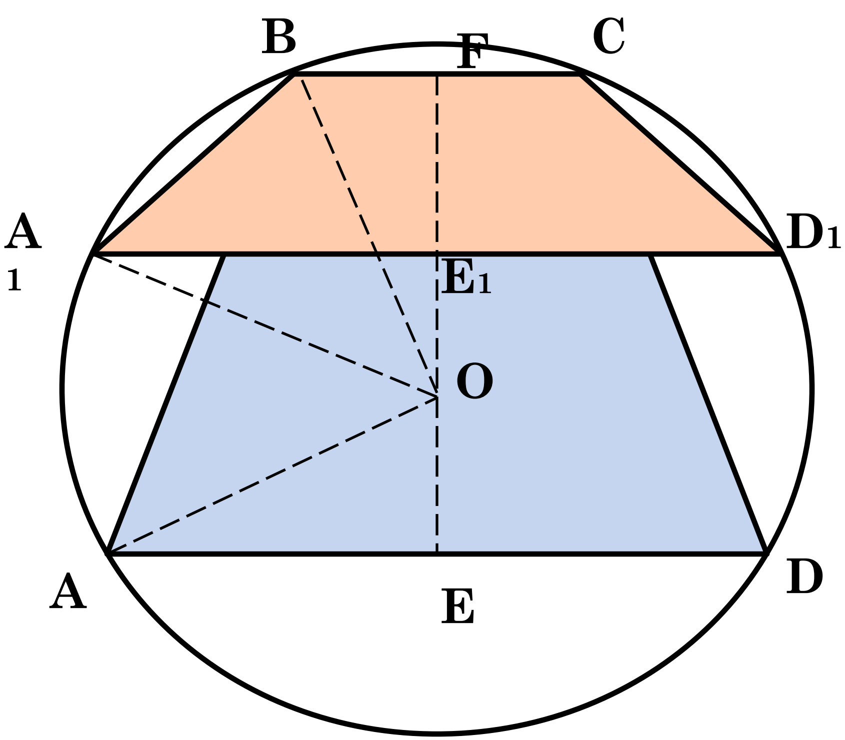
Ответ: 108; 12

Задача. ***Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции***.

● *Трапеция вписана в некоторую окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.*

● *Радиус (диаметр), перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.*

● *Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.*



1).центр О окружность лежит внутри трапеции, высота ***EF = EO*** □***+OF*** .

Из ΔAOE *AO=25 , AE=20*

$$OE = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$

Из ΔBFO BO=25, BF=7

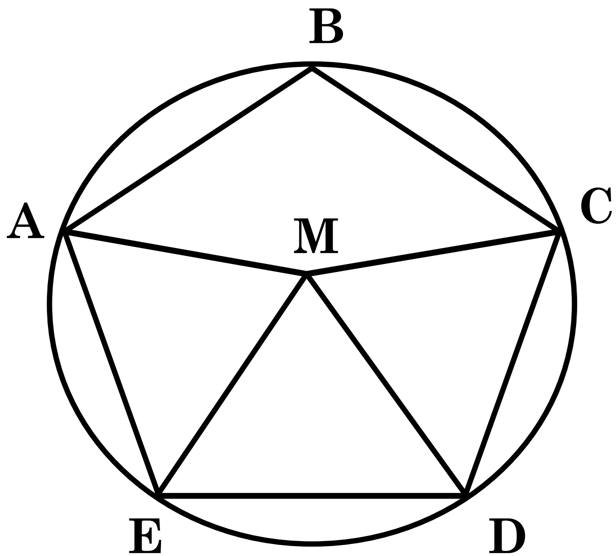
$$OF = \sqrt{BO^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$

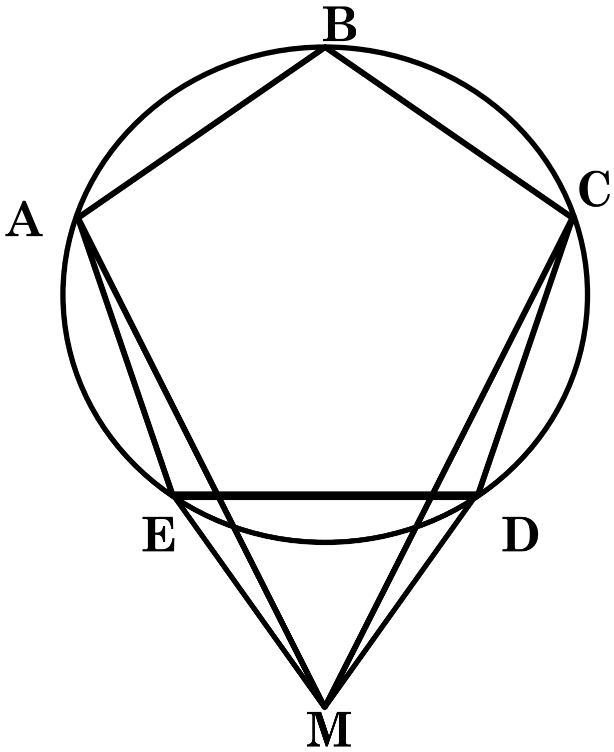
$$FE = FO + OE = 15 + 24 = 39$$

2).*центр О ок*ружности лежит вне трапеции. $FE_1 = FO - OE_1$

$$OE_1 = EO \qquad FE_1 = 24 - 15 = 9$$

Задача. **ABCDE** – правильный пятиугольник. Точка M обладает таким свойством, что $\triangle$ **DEM** - равносторонний. Найти величину угла AMC.





$$\alpha = \frac{180°(5-2)}{5} = 108°$$

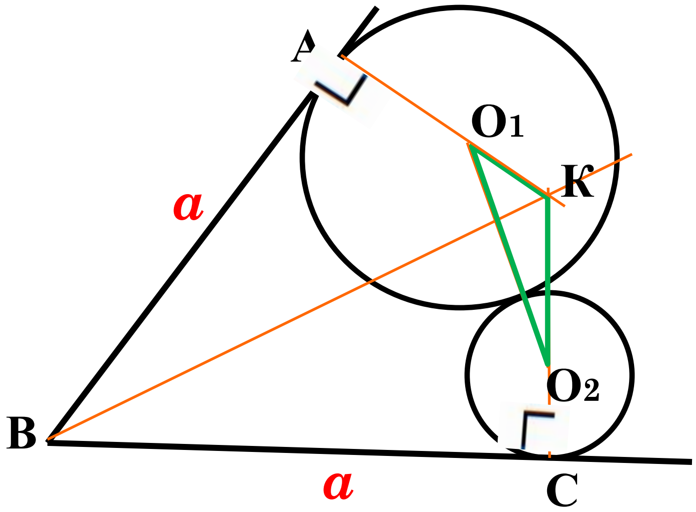
$$\angle MDC = \angle MDE + \angle EDC = 60° + 108° = 168°$$

$$\Delta MDC(MD = DC), \text{ то } \angle CMD = 6°, \angle AME = 6°$$

$$\angle AMC = \angle EMD - 2\angle CMD = 60° - 12° = 48°$$

Задача. **Угол АВС равен 60°, причем АВ= ВС = *а.* Окружность *О1* касается АВ в точке А, а окружность О2 касается ВС в точке С, кроме того эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.**

Задача. **Угол ABC равен 60°, причем AB= BC = *a*. Окружность *O1* касается AB в точке A, а окружность O2 касается BC в точке C, кроме того эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.**



$$\Delta BAK = \Delta BCK \quad \angle ABK = \angle CBK = 30^\circ$$

$$AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$O_2C = r\,;O_1A = 2r;\ O_1O_2 = 3r$$

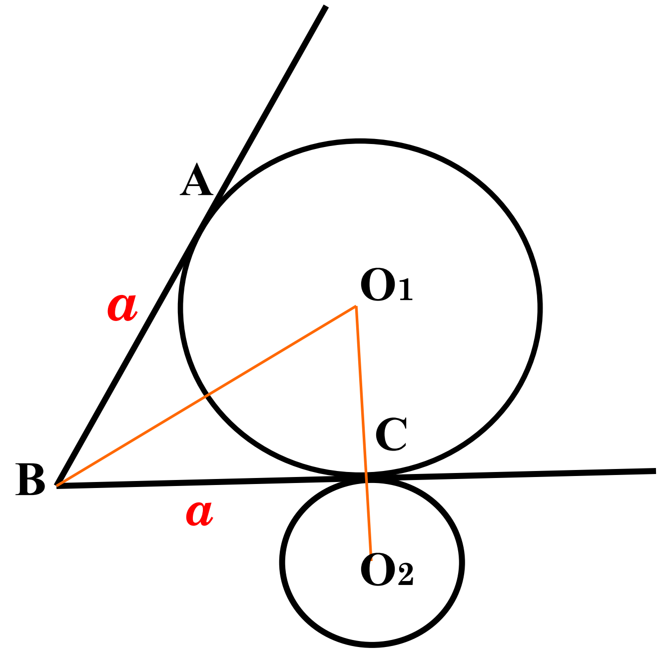
$$O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r;\quad O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r$$

$$\angle AKC = 120^\circ$$

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)cos120^\circ$$

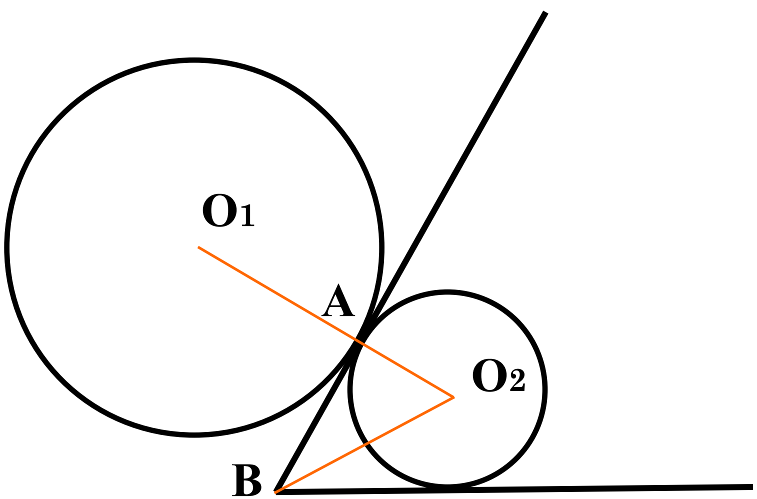
$$r = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4}a$$

Задача. Угол ABC равен 60°, причем AB= BC = *a*. Окружность *O1* касается AB в точке A, а окружность O2 касается BC в точке C, кроме того эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.



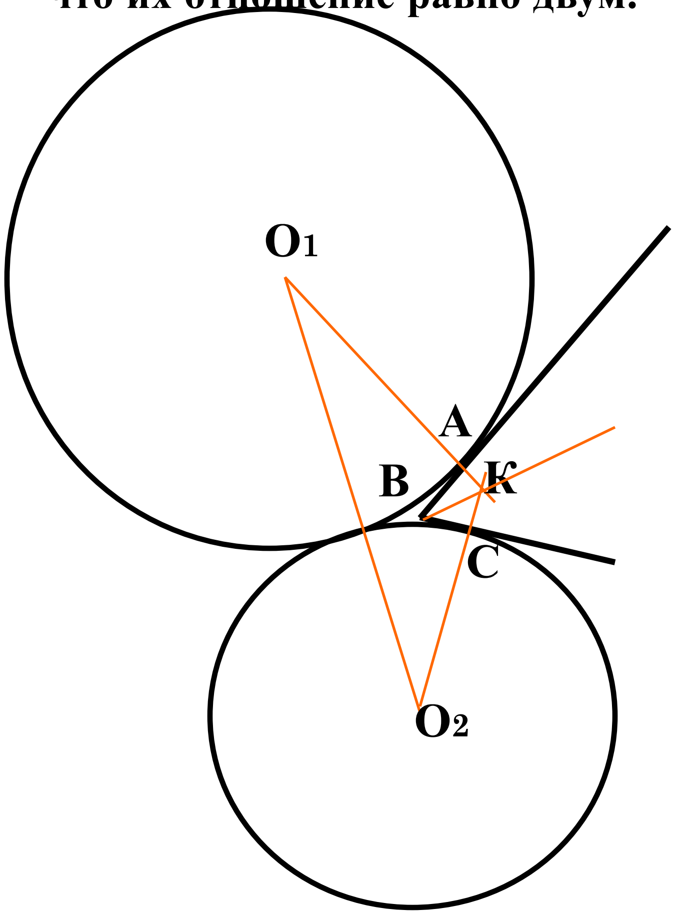
$$\angle BO_1C = 30^\circ$$

$$O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad O_2C = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



$$O_2A = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad O_1A = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Задача. Угол АВС равен 60°, причем АВ= ВС = *а*. Окружность *О1* касается АВ в точке А, а окружность О2 касается ВС в точке С, кроме того эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.



$$O_2C = r\,; O_1A = 2r;\; O_1O_2 = 3r$$

$$AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} + 2r;\;\; O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} + r$$

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + r\right)^2 -$$

$$-2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + r\right)cos120^\circ$$

$$r = \frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{4}a$$

Ответ:

1). $r = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{4}a \qquad R = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{2}a$

2). $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

3). $r = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

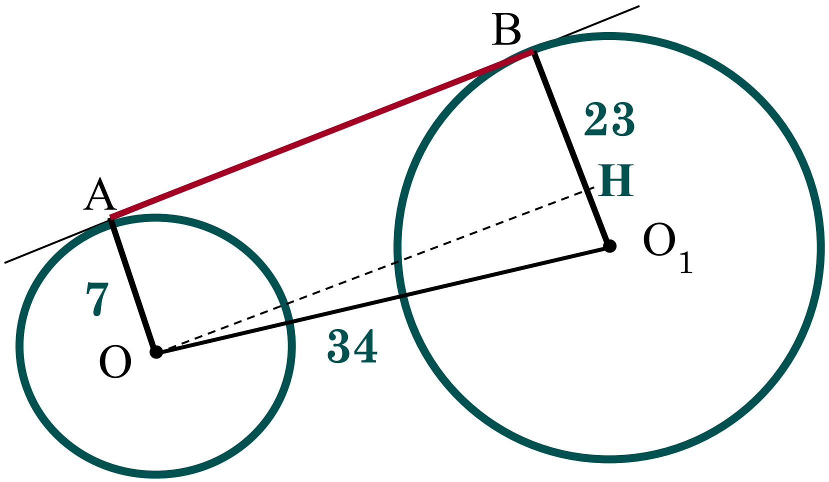
4). $r = \frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{4}a \qquad R = \frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{3}}{2}a$

С 4

Найти длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Решение.

Возможны два случая:



$OABO_1$ – прямая трапеция,

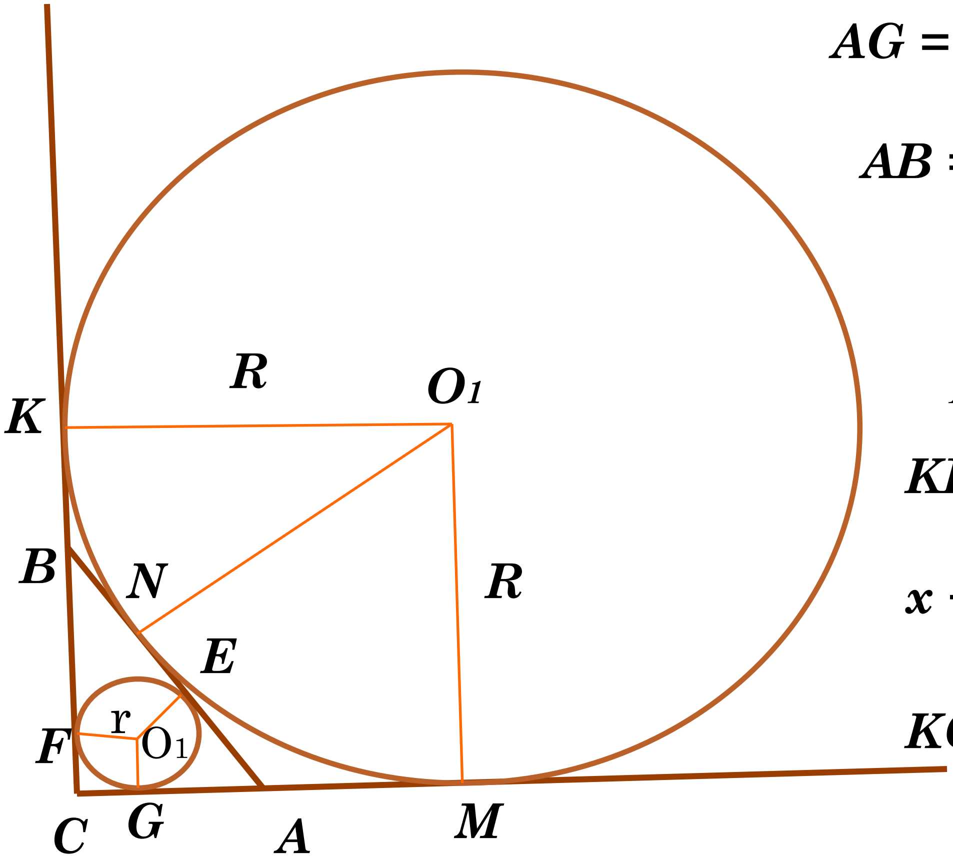
OH=AB - высота

$$AB=\sqrt{OO_1^2-(R-r)^2}=$$

$$=\sqrt{34^2-16^2}=30$$

Ответ: 30 или

Задача с 4. ***Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.***



$AG = AE = 3 - r$, $BF = BE = 4 - r$.

$AB = AE +$□ $BE = 3 - r +$□ $4 - r$.

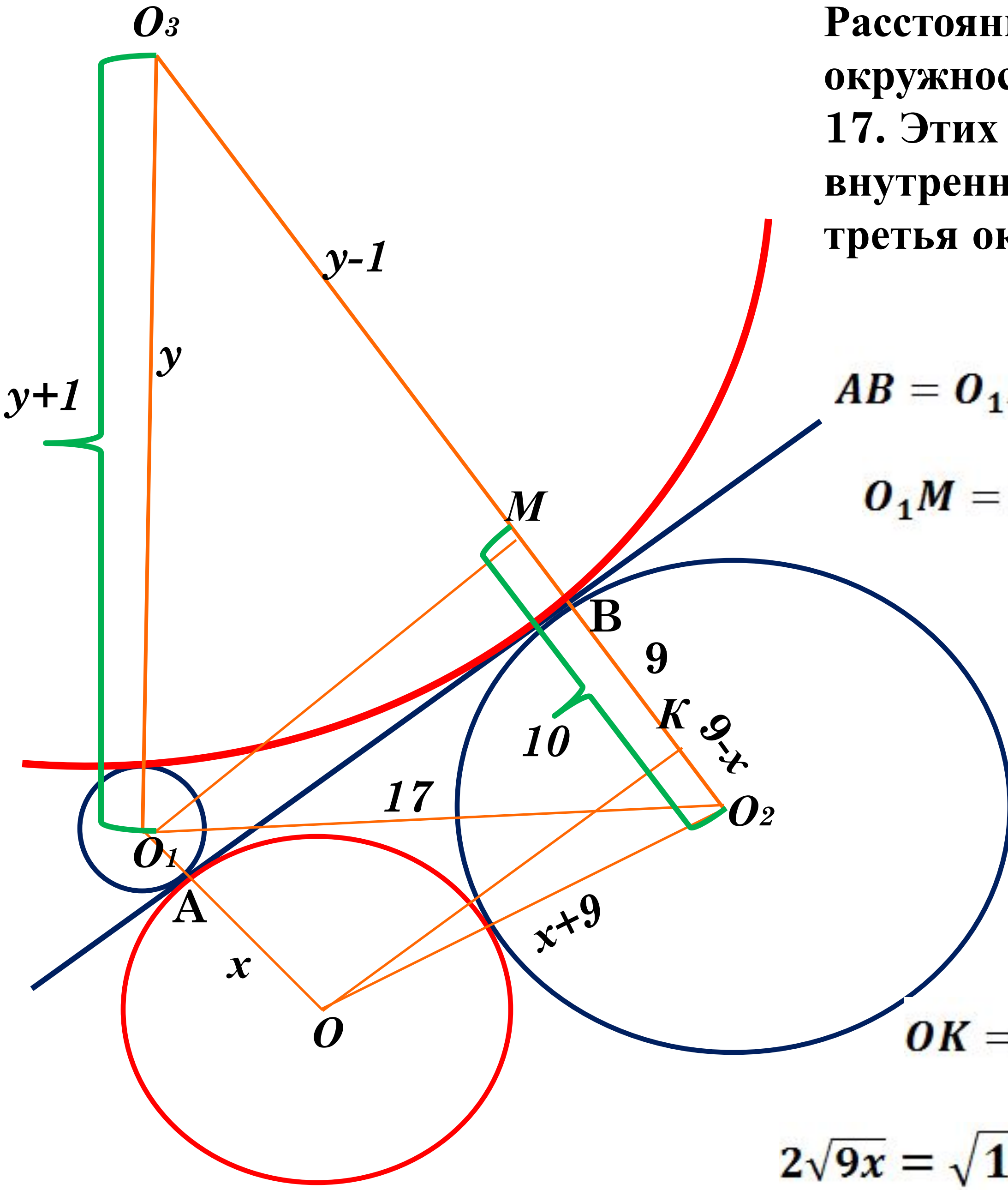
$5 = 7 - 2r$, $r = 1$

$KB = KN$, $NA = AM$

$KB = x$, $KB + AM = 5$, $KC = CM$

$x + 4 = 3 + 5 – x$, $x = 2$

$KC = R = 2+4 = 6$



Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найти ее радиус.

$$AB = O_1M = OK = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{189}$$

$$O_1M = \sqrt{(y+1)^2 - (y-1)^2} = 2\sqrt{y}$$

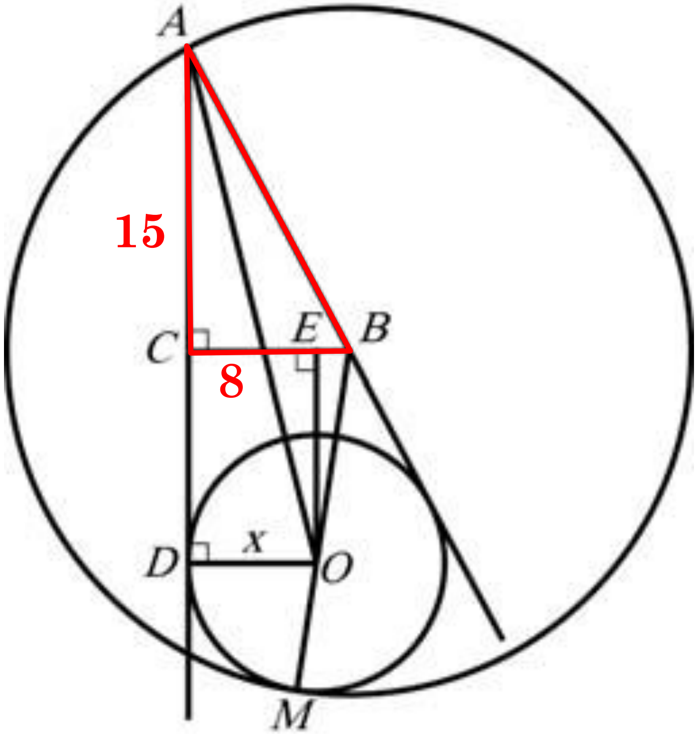
$$2\sqrt{y} = \sqrt{189} \quad y = \frac{189}{4}$$

$$OK = \sqrt{(x+9)^2 - (x-9)^2} = 2\sqrt{9x}$$

$$2\sqrt{9x} = \sqrt{189} \qquad x = \frac{189}{36} = \frac{21}{4}$$

Дан прямоугольный треугольник *ABC с катетами AC=15 и BC=8.*
С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17.

Найдите радиус окружности, вписанной в угол *BAC и* касающейся окружности S.



$\angle BAC = \alpha$. *Тогда* $tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$ $\quad cos\alpha = \frac{15}{17}$

$sin\alpha = \frac{8}{17}$

x - радиус искомой окружности, O – ее центр, D– точка касания с лучом AC, M – точка касания с окружностью S, E– проекция точки O на прямую BC.

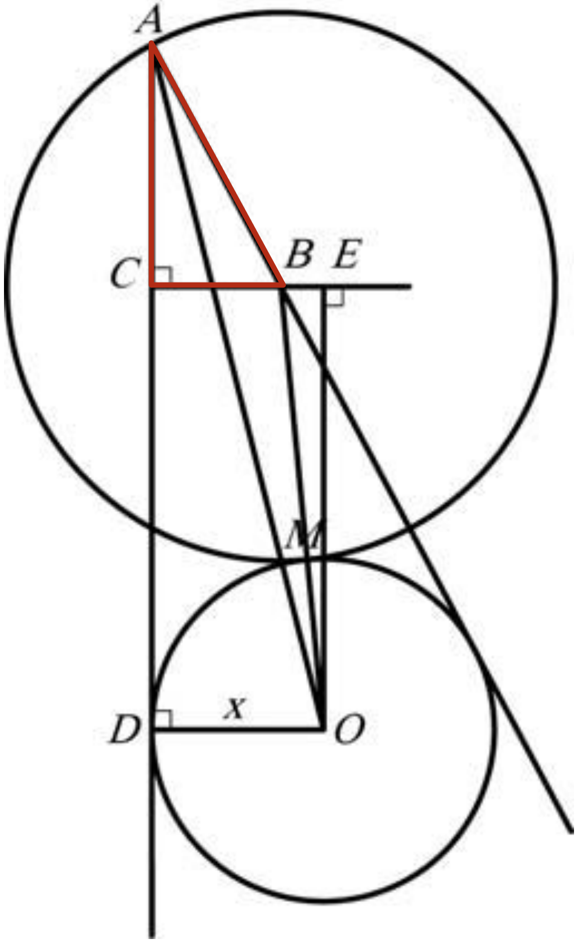
AO –биссектриса,то

$$ctg\angle OAD = ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = 4$$

$ctg\angle OAD = \frac{AD}{x} \Rightarrow 4x$ **BO = BM - OM = 17-□ x,**

$BE = |BC - CE| = |BC - OD| = |8 - x| \quad BO^2 = OE^2 + BE^2$

$(17 - x)^2 = (4x - 15)^2 + (8 - x)^2 \qquad 16x^2 - 102x = 0 \Rightarrow x = \frac{51}{8}$



Во втором случае

BO=BM+MO=17+x

OE=CD= $|AD - AC| = |4x - 15|$

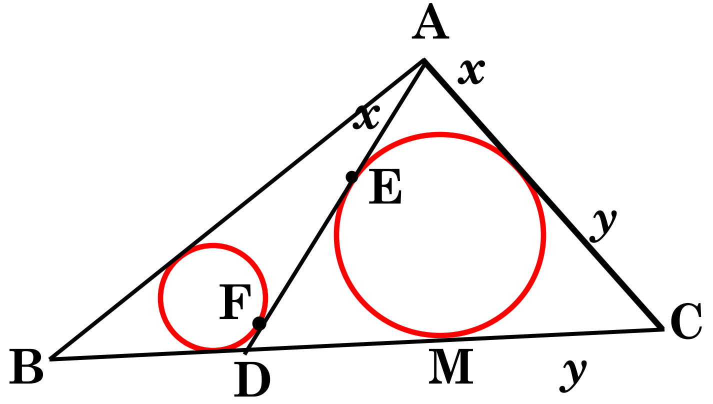
BE= $|CE - BC|$ **=** $|OD - BC|$ **=** $|X - 8|$

$$(17 + x)^2 = (4x - 15)^2 + (x - 8)^2$$

$$16x^2 - 170x = 0 \qquad x = \frac{85}{8}$$

Ответ $x = \frac{85}{8}$ $\qquad x = \frac{51}{8}$

В треугольнике ABC AB=7, BC=9, CA=4.Точка D лежит на прямой BC так, что BD:DC=1:5. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.



Случай 1

BD=1,5; DC=7,5

AE=DM; 2DE=AD – *x* + *DC* – *y* =

=*AD+7,5-4=AD+3,5*

2DF=BD+AD-7 =AD+1,5-7=AD-5,5

2DE-2DF=AD+3,5-AD+5,5=9; FE=4,5

Случай 2 $BC=\frac{9}{4};\ BC=\frac{45}{4};$

$$2DE=AD+DC-4=AD+\frac{45}{4}-4$$

$$2DF=AD+DB-7=AD+\frac{9}{4}-7$$

$$EF=DE-DF=\frac{1}{2}\left(\frac{45}{4}-4-\frac{9}{4}+7\right)=6$$