

Комплексные числа

Лекция 14

Определение

Комплексным числом называется

число вида $z = x + yi$,

где $i^2 = -1$, а x и y – вещественные числа.

называется алгебраической формой
записи комплексного числа.

Выражение

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой
записи комплексного числа.

Число x называется действительной частью, y –мнимой частью комплексного числа z .

Это записывают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Если $x = 0$, то число z называют
чисто мнимым.

Если $y = 0$, то получается $z = x + 0 \cdot i$
вещественное число.

Два комплексных числа

$$z = x + iy \quad \text{и} \quad \bar{z} = x - iy$$

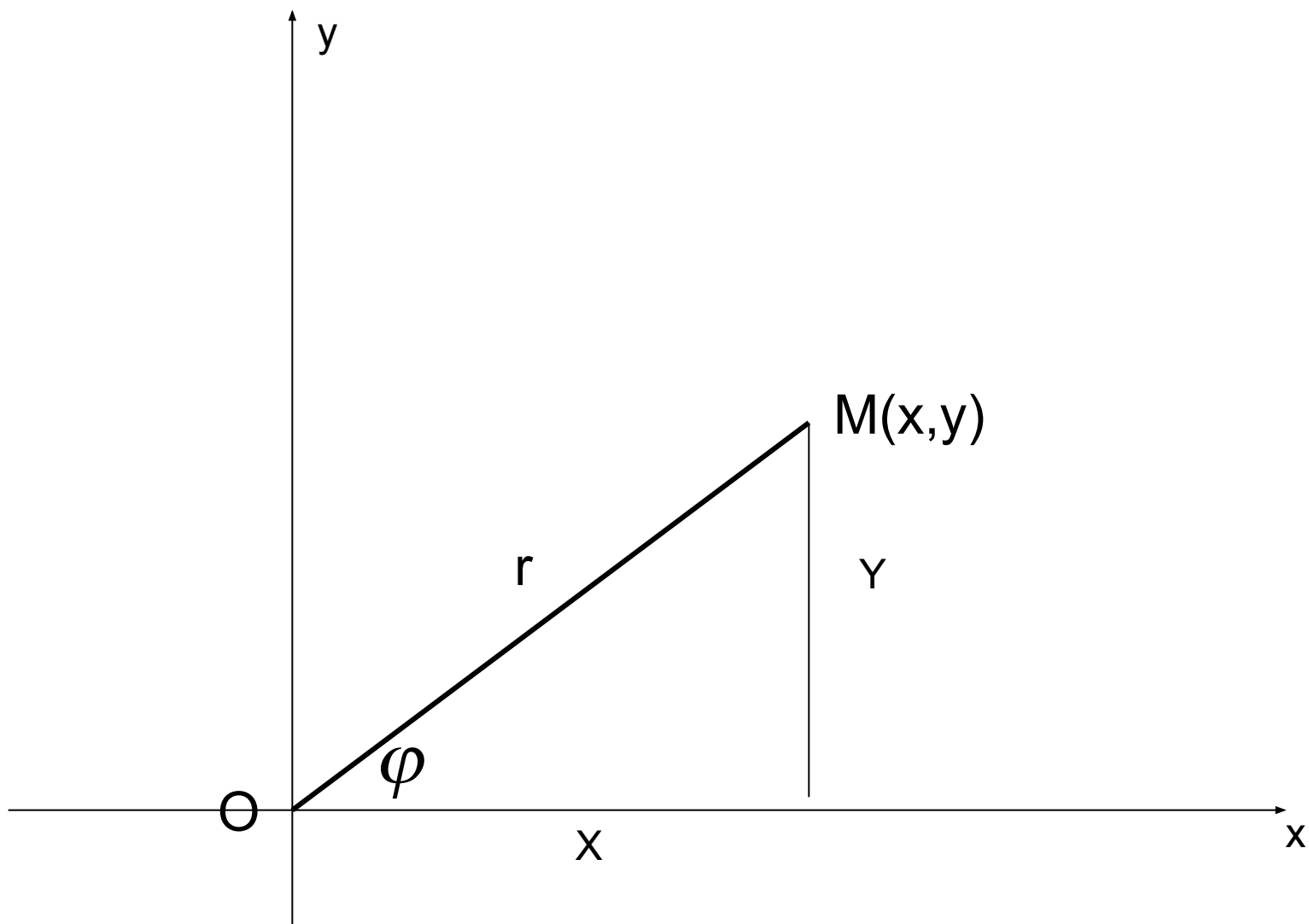
называются сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число z считается равным нулю, если $x=y=0$.

Всякое комплексное число можно изобразить точкой на плоскости, т.к. каждому z соответствует упорядоченная пара вещественных чисел $(x; y)$.

Число $z=0$ ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такую плоскость мы в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс—действительной, а ось ординат— мнимой осью комплексной плоскости.



Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами, где r – расстояние точки от начала координат, а φ – угол, который составляет радиус-вектор этой точки с положительным направлением оси Ox .



Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки. Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат:

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi \quad ,$$

получим тригонометрическую форму записи комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ где}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

φ —аргумент комплексного числа,
который находят из формул

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

или в силу того, что ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$



Пример

Записать в тригонометрической форме
комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{-1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Очевидно точка $z = -1 + i\sqrt{3}$

находится во 2-й четверти и поэтому

$$\varphi = 120^\circ = \frac{2}{3} \pi.$$



Имеем

$$z = 2 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$$

Показательная форма комплексного числа

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi ,$$

получаем показательную форму записи
комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i$$

Действия над комплексными числами

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\&= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = \\&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i\end{aligned}$$

Действия над комплексными числами

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i \cdot \phi_1} r_2 \cdot e^{i \cdot \phi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i \cdot \phi_1}}{r_2 \cdot e^{i \cdot \phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Формула Муавра

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Извлечение корня

В тригонометрической форме корень n -й степени вычисляют по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1$$

, а в показательной—по формуле .

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k}{n}} .$$

Аргумент комплексного числа.

Аргумент комплексного числа можно брать с точностью до 2π . Это значит, что аргументы сопряженных чисел отличаются знаком. Так, например, аргументом числа $z = 1 - i$ можно считать значения

$$\frac{7\pi}{4} \text{ или } \frac{\pi}{4}$$

Пример . Возвести число $z = \sqrt{3} - i$
в пятую степень.

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Тогда по формуле Муавра получим

$$z^5 = 2 \left[\cos \left(-\frac{5}{6} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{6} \pi \right) \right] =$$
$$= 2 \left(\cos \frac{5}{6} \pi - i \sin \frac{5}{6} \pi \right) =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \\ &= -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -(\sqrt{3} + i) = -\bar{z}. \end{aligned}$$

Найти $\sqrt[3]{-1} - 1 = \cos \pi + i \sin \pi$.

$$\sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 : z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

$$k = 1 : z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} = \\ = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

.

$$\begin{aligned}k = 2 : z_1 &= \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} = \\&= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \\&= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \\&= \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

.