Комплексные числа

ПЛАН:

1. Основные понятия. Формы записи.
2. Действия над комплексными числами:
   a) Сложение комплексных чисел;
   b) Вычитание комплексных чисел;
   c) Умножение комплексных чисел;
   d) Деление комплексных чисел ;

Вычислите:

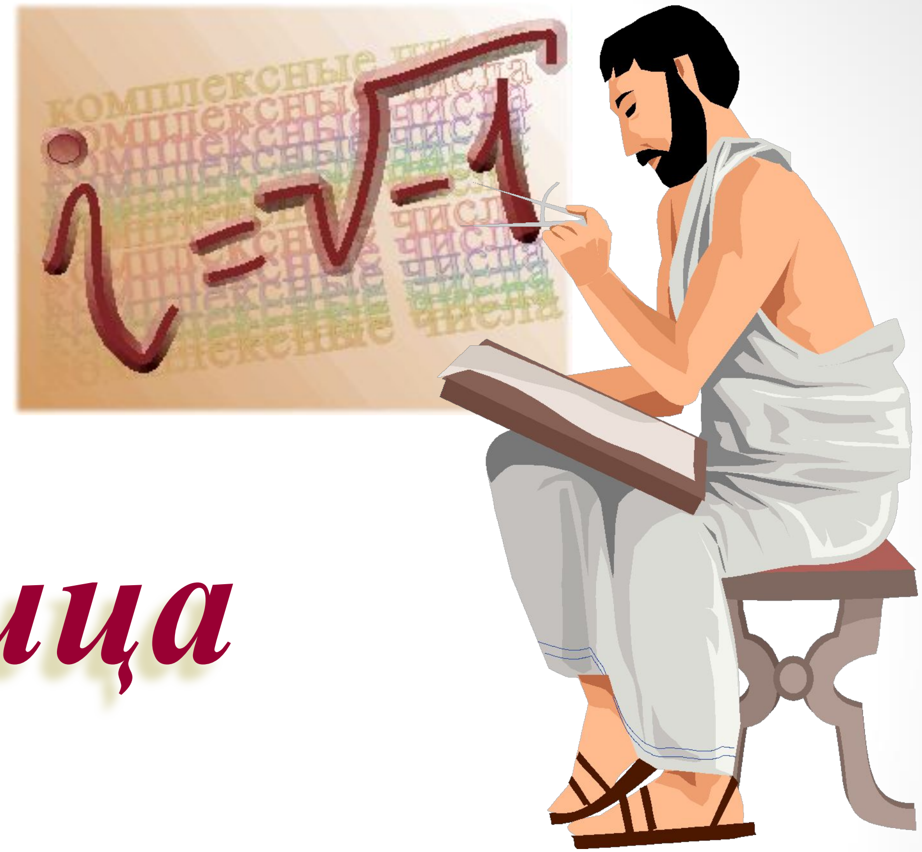
$\boxed{\sqrt{144}}\ \boxed{=12}$

$\boxed{\sqrt{6{,}25}}\ \boxed{=2{,}5}$

$\boxed{\sqrt{-900}}$

$\boxed{\sqrt{\frac{64}{256}}}\ \boxed{=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}$

Мнимая единица



***i* – начальная буква французского слова**

imaginaire – «мнимый»

Например,

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36\cdot(-1)} =$$

$$= \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$i^1 = \boxed{i} \qquad i^2 = \boxed{-1}$$

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = \boxed{-i}$$

$$i^4 = i^3 i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = \boxed{1}$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = \boxed{i}$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = \boxed{-1}$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = \boxed{-i}$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = \boxed{1}$$

Компле́ксные числа

Определение 1. **Числа вида** $a + bi$,

где a **и** b **– действительные числа,**

i **– мнимая единица,** $\boxed{i^2 = -1}$

называются ***компле́ксными.***

a* – *действительная часть компле́ксного числа,
b* – *мнимая часть компле́ксного числа

Например, $Z_1 = 6+2i$ или $Z_2 = 1-5i$.

Основные понятия.

Два комплексных числа называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i\ ;$$

$$z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2\ ; \beta_1 = \beta_2$$

Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком мнимой части, называются *комплексно- сопряженными.*

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$z_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$$

Примеры.

Пример 1.

$$z_1 = 5 + 3i\ ;$$

$$z_2 = 25/5 + 15/5i$$

$$\alpha = 5 = 25/5$$

$$\beta = 3 = 15/5$$

$$Вывод: z_1 = z_2$$

Пример 2.

$$z_1 = 5 + 3i\ ;$$

$$z_2 = 5 - 3i$$

$$Вывод: z_1\ и\ z_2$$

комплексно - сопряженные числа.

Найти x и y из равенства:

$$2y + 4xi = 13 - 6i;$$

Решение.

Используя условие равенства комплексных чисел имеем

$2y = 13$,

$4x = -6$, тогда

$$\boxed{x = -1{,}5; \quad y = 6{,}5.}$$

Формы записи комплексных чисел.

1. Алгебраическая.
2. Тригонометрическая.
3. Показательная.

Любое комплексное число можно записать в любой форме.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение и вычитание комплексных чисел.

Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется комплексное число,

определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2)$$

Сложение

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Вычитание

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$z_1 = 12 + 3i,\ z_2 = 5 - 7i.$

Найти: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

а) $z_1 + z_2 = (12 + 3i) + (5 - 7i) =$
$= (12 + 5) + (3i - 7i) = \underline{17 - 4i;}$

б) $z_1 - z_2 = (12 + 3i) - (5 - 7i) =$
$= (12 - 5) + (3i + 7i) = \underline{-7 + 10i;}$

Действия над комплексными числами

Умножение комплексных чисел.

Умножением комплексных чисел $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ и $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ называется число, получаемое при умножении этих чисел по правилам алгебры как двучлены.

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a_1 + i \cdot b_1\right) \cdot \left(a_2 + i \cdot b_2\right) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + i \cdot b_2 \cdot a_1 + i^2 \cdot b_1 \cdot b_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2\right) + i \cdot \left(b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1\right)$$

Умножение

$$(a+bi)(c+di) =$$

$$= ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 =$$

$$-1$$

$$=(ac-bd) + (ad+bc)\,i$$

Выполните действия:

$$(2+3i)(5-7i) =$$

$$= (10+21) + (-14+15)i = 31+i$$

$$(5+3i)(5-3i) = 25-9i^2 = 34$$

$$(2-7i)^2 = 4 - 28i + 49i^2 = -45-28i$$

$$25m^2+16 = 25m^2 -16i^2 =$$

$$=(5m-4i)(5m+4i)$$

Действия над комплексными числами

Деление комплексных чисел.

Чтобы разделить $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ на $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ необходимо умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)}{(a_2 + i \cdot b_2) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Деление

$$\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{2+3i}{5-7i}\cdot\frac{5+7i}{5+7i}$$

$$=\frac{-11+29i}{74}=\boxed{-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i}$$

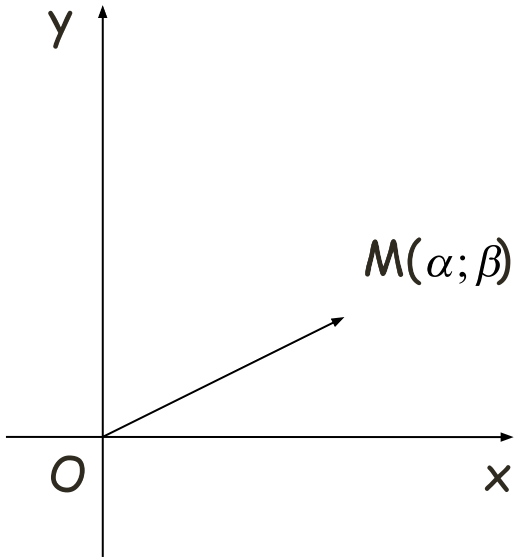
Домашняя работа

Найти сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел:

- $Z_1 = (3 + 5i)$, $Z_2 = (7 – 2i)$
- $Z_1 = (3 – 2i)$, $Z_2 = (5 + 3i)$
- $Z_1 = (4 + 2i)$, $Z_2 = (– 3 + 2i)$.
- $Z_1 = (– 2 + 3i)$, $Z_2 = (7 – 2i)$

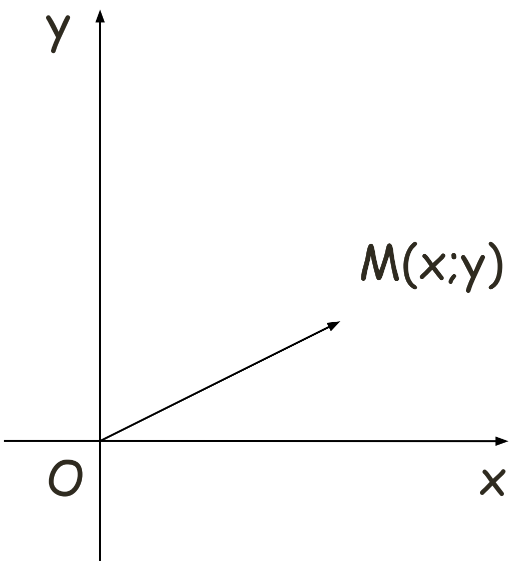
Геометрическое изображение комплексных чисел.

Всякое комплексное число
 можно изобразить точкой
плоскости xOy такой,
что x - действительная часть,
Y - мнимая
И, наоборот, каждую точку
 координатной плоскости
 можно рассматривать как
 образ комплексного числа.



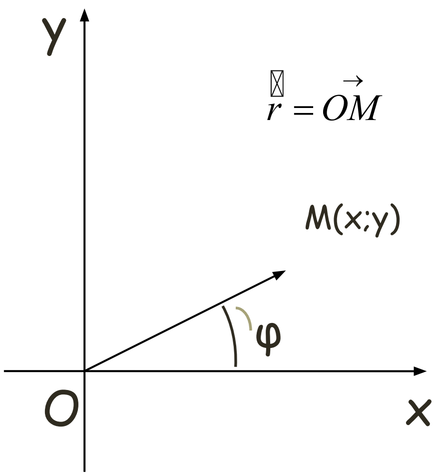
$$Z = \alpha+\beta i,\ M(\alpha,\ \beta)$$

Геометрическое изображение комплексных чисел.



Плоскость, на которой изображается комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.
Ось абсцисс Ox называется *действительной осью*.
Ось ординат Oy называется *мнимой осью*.

<u>Геометрическое изображение комплексных чисел.</u>



Комплексное число можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$.

Длина вектора называется <u>*модулем*</u>

этого числа и обозначается

$|Z|$ или r .

Величина угла между положительным

направлением оси Ox и вектором $\vec{r}$

называется <u>*аргументом*</u> этого

комплексного числа и обозначается

Arg Z или ϕ.

Аргумент комплексного числа

определяется с точностью до