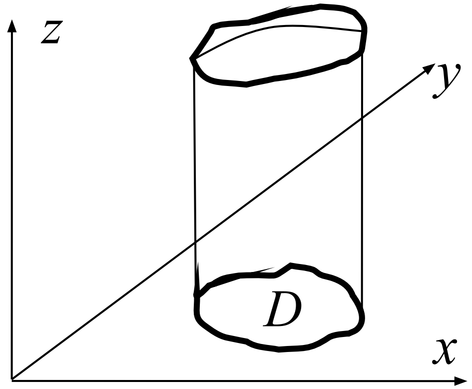
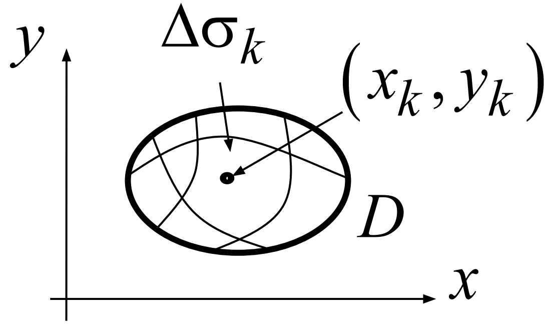
Лекция 2.1
9 ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
9.1 Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл.



$$z = z(x, y) \geq 0$$

- **Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное замкнутой областью D плоскости Oxy, поверхностью z=z(x,y), где z=z(x,y) непрерывна и неотрицательна в области D и цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей – границей области D.**

Разобьем область D на n произвольных частичных областей $\Delta\sigma_k$ (k∈(1,…,n)).



- Выберем в каждой из частичных областей произвольную точку с координатами (x_k, y_k). Объем цилиндрического тела между опорной плоскостью Oxy и поверхностью z=z(x,y) над частичной областью $\Delta\sigma_k$ равен $\Delta V_k \approx z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$. Объем всего цилиндрического тела равен

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k$$

- **Устремим наибольший диаметр частичных областей**
- $\Delta\sigma_k$ **к нулю, при этом** $\max \operatorname{diam}\left(\Delta\sigma_k\right) \to 0$, $n \to \infty$
- **и рассмотрим предел интегральной суммы**

$$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k) \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} z\left(x_k, y_k\right) \Delta\sigma_k$$

- **Если этот предел существует, то очевидно, что**

$$V = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k) \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} z\left(x_k, y_k\right) \Delta\sigma_k$$

Определение.

- **Двойным интегралом от функции z=z(x,y) по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей**

$$\lim_{\substack{\max \operatorname{diam}(\Delta\sigma_k)\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} z(x_k, y_k)\Delta\sigma_k = \iint_D z(x,y)\,d\sigma$$

- $z(x,y)\,d\sigma$ **– подынтегральное выражение;**
- z(x,y) **– подынтегральная функция;**
- $d\sigma$ **- элемент (дифференциал) площади;**
- D **– область интегрирования.**
- **Таким образом,** $V = \iint_D z(x,y)\,d\sigma$

Теорема существования двойного интеграла.

- **Если** z(x,y) **непрерывна в замкнутой ограниченной области** D, **то ее интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел не зависит от способа разбиения области на частичные области** $\Delta\sigma_k$
- **и выбора в них точек** $\left(x_k, y_k\right)$**.**

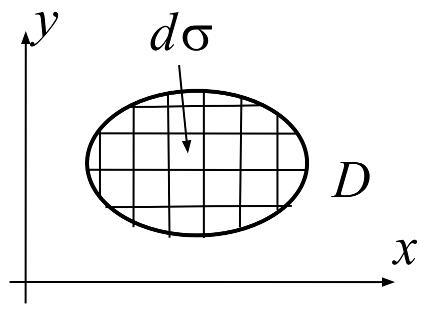
9.2 Свойства двойных интегралов.

- 1) $\iint\limits_D \left(z_1(x,y) \pm \ldots \pm z_n(x,y)\right) d\sigma = \iint\limits_D z_1(x,y)\,d\sigma \pm \ldots \pm \iint\limits_D z_n(x,y)\,d\sigma$
- 2) $\iint\limits_D cz(x,y)\,d\sigma = c\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma$
- 3) $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.
- **Тогда** $\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} z(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} z(x,y)\,d\sigma$

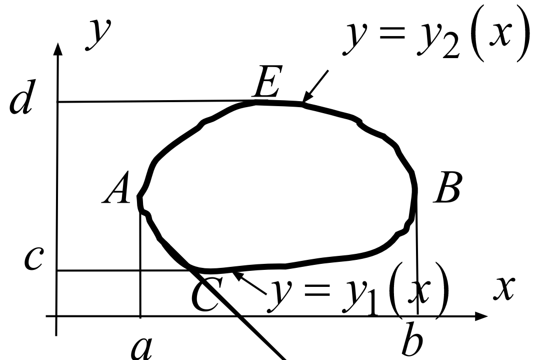
Свойства двойных интегралов.

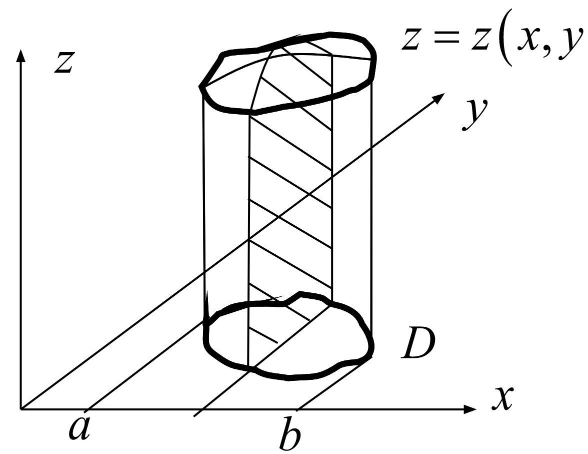
- **4) Если** ∀(x,y)∈D $z_1(x,y) \geq z_2(x,y)$
- **то** $$\iint\limits_D z_1(x,y)\,d\sigma \geq \iint\limits_D z_2(x,y)\,d\sigma$$
- **5) Если** в D $m = z_{наим}$ **,** в D $M = z_{наиб}$ **,**
- **то** $mS \leq \iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma \leq MS$ **, где** $S = \iint\limits_D d\sigma$ **.**
- **6)** $$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = z(\xi,\eta)S,\ (\xi,\eta)\in D$$
- $z(\xi,\eta)$ **- среднее значение** z **в области** D**.**

9.3 Вычисление двойных интегралов.



- Разобьем область D с помощью линий,
- параллельных осям координат
- с шагом dx и dy соответственно.
- Тогда $d\sigma = dxdy$ и, следовательно,
- $$\iint\limits_D z(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D z(x,y)\,dxdy$$.
- При вычислении двойного интеграла будем использовать формулу
- $$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (9.1)$$,
- где $S(x)$ - площадь поперечного сечения тела плоскостью x=const.
- Предположим, что любая прямая, параллельная осям Ox или Oy, пересекает границу области D не более чем в двух точках.





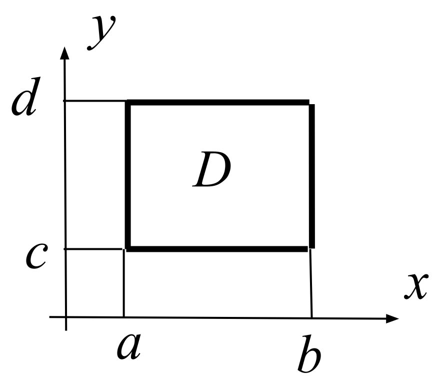
$$S(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$$

- **Здесь при вычислении интеграла по dy считается, что x – постоянная.**
- **Согласно (9.1) получим:** $V=\iint\limits_{D} z(x,y)\,dxdy=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy\right)dx=$
- $$=\int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy \quad . \qquad \textbf{(9.2)}$$

- Изменив порядок интегрирования, аналогично получим
- $$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx \quad . \qquad (9.3)$$
- Правые части формул (9.2) и(9.3) называются повторными (или двухкратными) интегралами.
- Процесс расстановки пределов интегрирования называется приведением двойного интеграла к повторному.

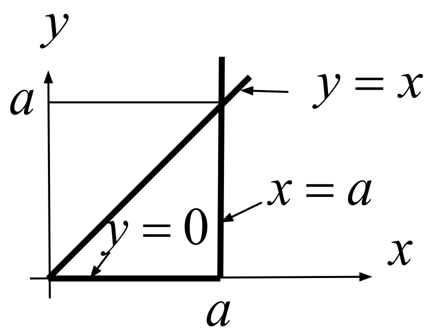
Примеры:

- 1)



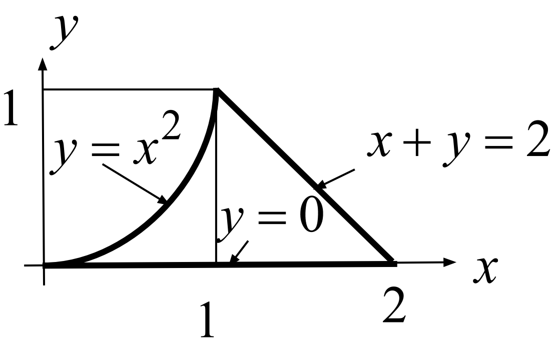
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d z(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b z(x,y)\,dx$$

2)



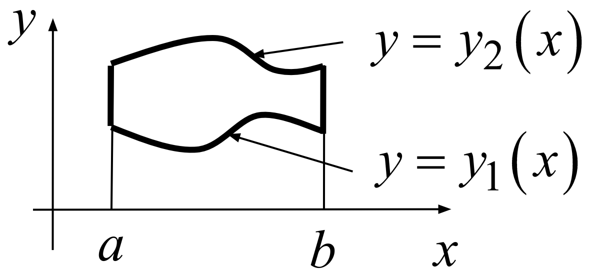
$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^a dx\int\limits_0^x z(x,y)\,dy = \int\limits_0^a dy\int\limits_y^a z(x,y)\,dx$$

3)



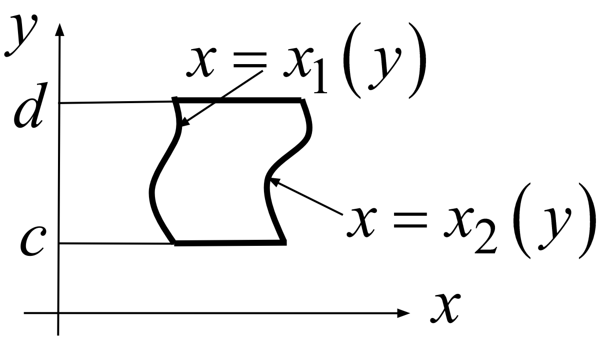
$$\iint_D z(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} z(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} z(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} z(x,y)\,dx$$

4)



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)\,dy$$

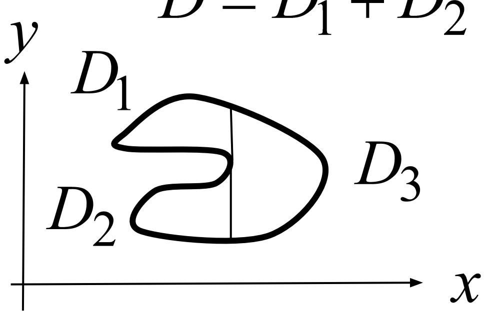
5)



$$\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)\,dx$$

6)

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$



$$\iint\limits_{D} z(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1} z(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} z(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} z(x,y)\,dxdy$$