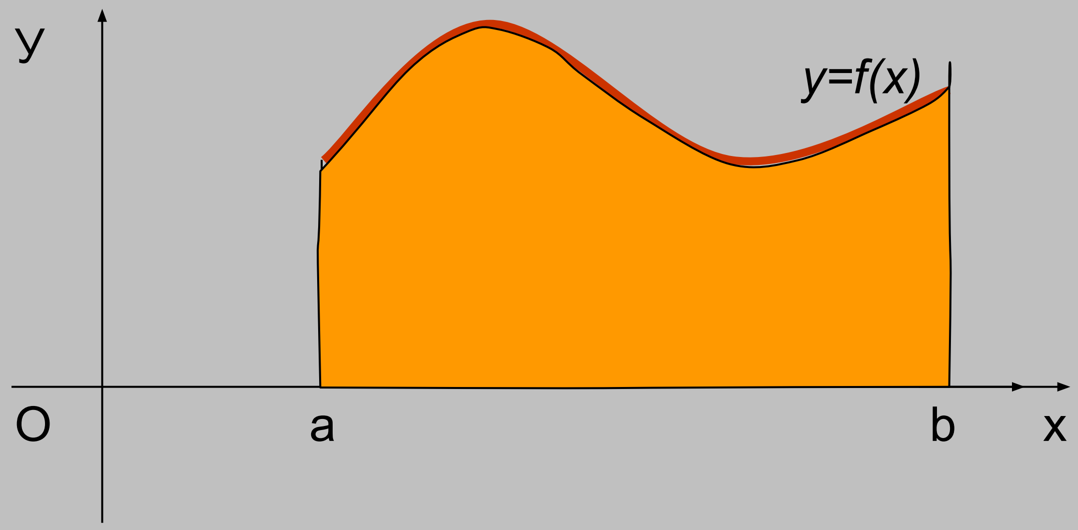
# Вычисление объемов тел вращения

Применение интеграла

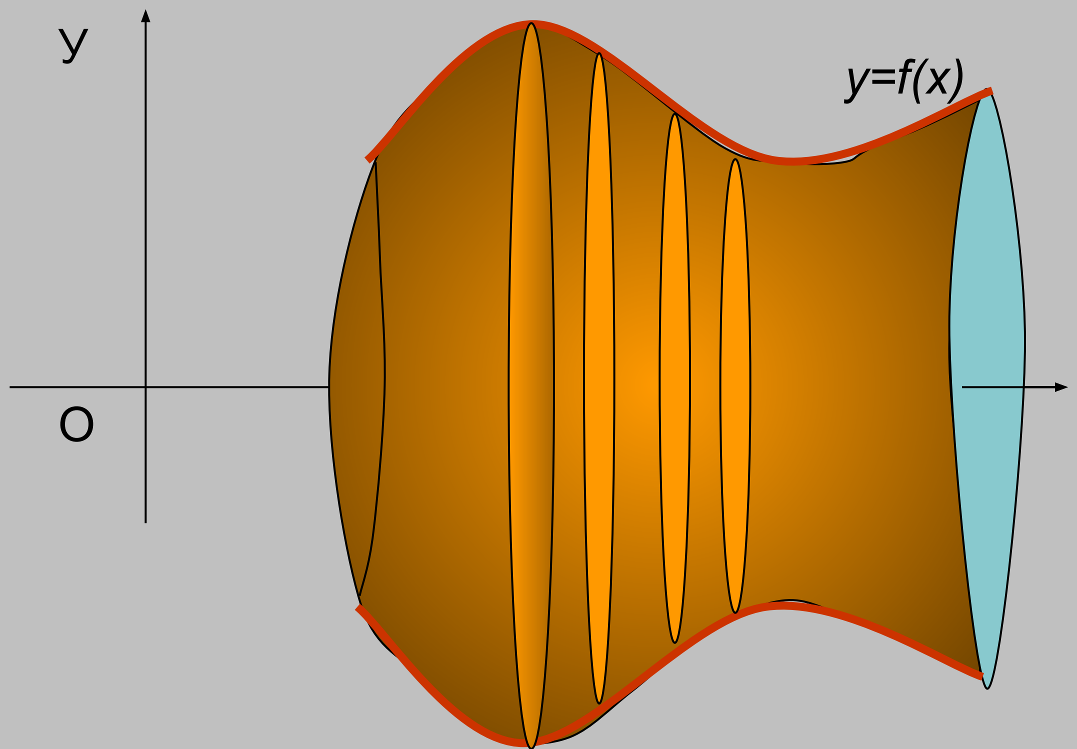



# Постановка задачи

Пусть функция y = f(x) определена, неотрицательна и непрерывна на отрезке [a; b],
тогда график кривой *y=f(x)* на [a; b], ось OX, прямые x = a, x = b образуют криволинейную трапецию.

Рассмотрим тело, образованное вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси OX и найдем его объем.

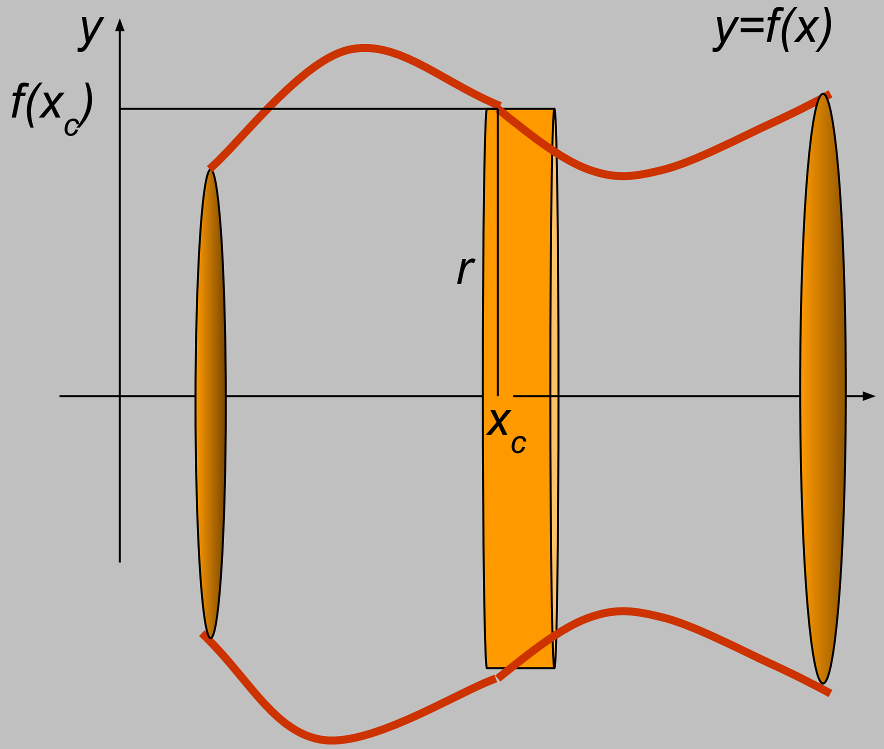
Разобьем отрезок [a;b] на n частей произвольным образом, через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную к оси ОХ и найдём площади полученных поперечных сечений.




Очевидно, что любое поперечное сечение тела вращения – круг. Радиус круга равен значению функции в $x_c$

Площадь этого круга – $S(x) = \pi \cdot f^2(x_c)$

Построим на каждом промежутке цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси OX,
а основанием является сечение - круг.




Радиус круга равен значению функции в $x_c$
Площадь этого круга –

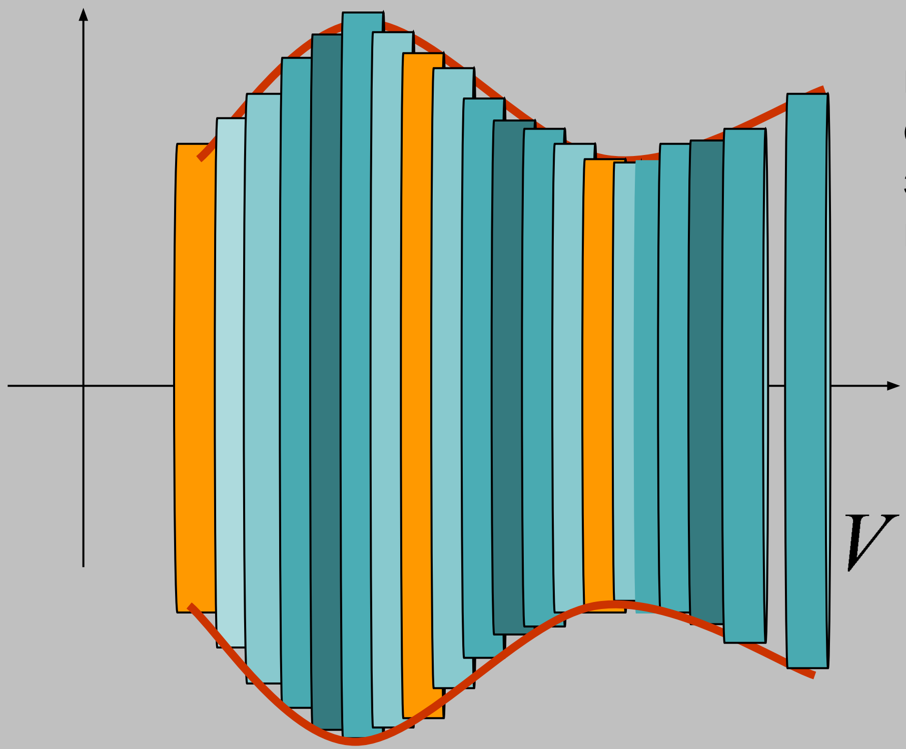
$$S(x) = \pi f^2(x_c)$$

Объём цилиндра –

$$V = S(x) \cdot \Delta x$$

Объем каждого цилиндра с основанием S(x) и высотой $\Delta x$ равен $S(x)\cdot \Delta x$ , а объем всего ступенчатого тела равен сумме объёмов всех цилиндров.

$$V_{CT} = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\cdot \Delta x_k$$



Предел полученной интегральной суммы, который существует в силу непрерывности функции S(x), при $n \to \infty$ называется объемом заданного тела и равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n\to\infty} V_{CT} = \int_a^b S(x)\partial x$$

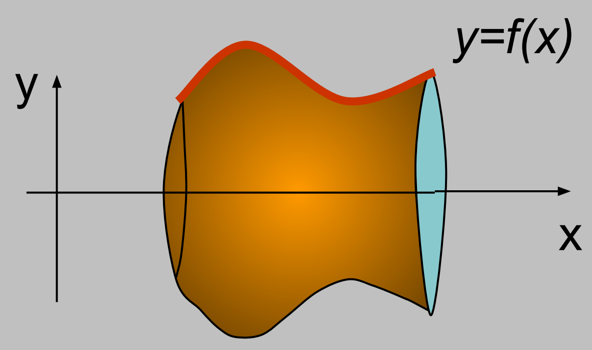
Предел полученной интегральной суммы, при n → ∞ равен определенному интегралу:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x)\cdot\Delta x = \int_a^b S(x)\partial x$$

- Тогда объем тела вращения вокруг оси OX:

$$V = \int_a^b S(x)\partial x = \int_a^b \pi\cdot f^2(x)\partial x = \pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

- Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, образованной функцией y=*f(x)* на отрезке [a;b], вокруг оси OX, то его объём можно найти по формуле:



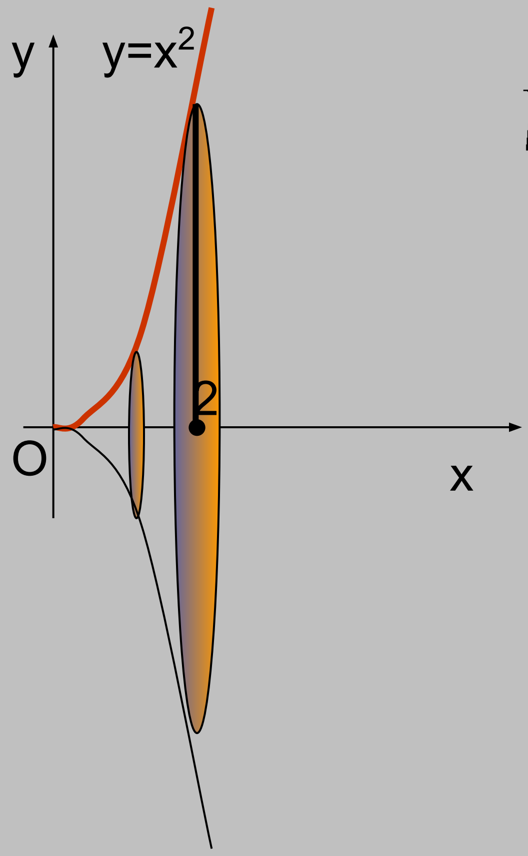

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\partial x}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \partial x$$

# Задача.

Пусть тело образовано вращением параболы $y=x^2$ на отрезке [0;2] вокруг оси ОХ.

Найдите объём тела вращения.




$$V = \int_0^2 S(x)\partial x = \int_0^2 \pi \cdot (x^2)^2 \partial x =$$

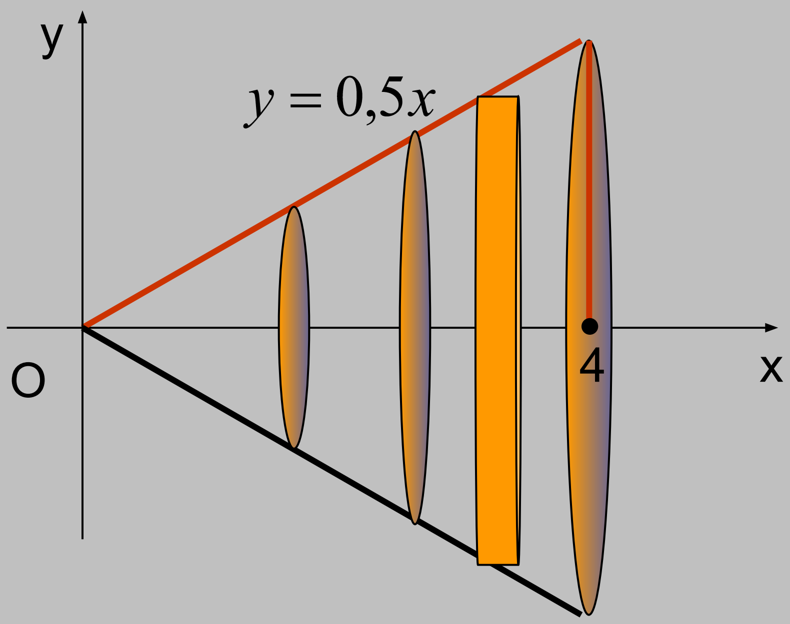
$$= \pi \int_0^2 x^4 \partial x = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5} (куб.ед.)$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

# Задача.

Пусть тело образовано вращением функции y=0,5x на отрезке [0;4] вокруг оси OX.

Найдите объём тела вращения.



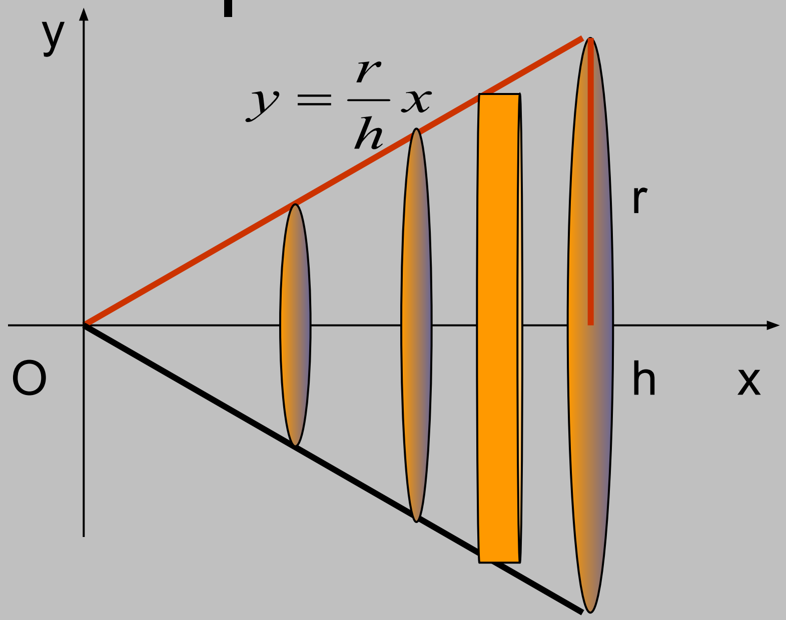

$$V=\pi\int_0^4 (0,5x)^2\partial x=$$

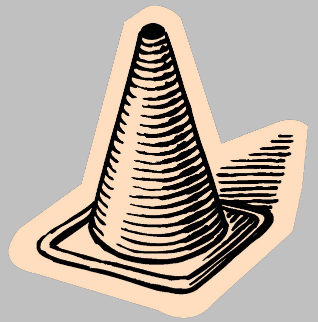
$$=\pi\cdot\frac{0,25x^3}{3}\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{16\pi}{3}(кв.ед.)$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$

# Рассмотрим конус и найдём его объём



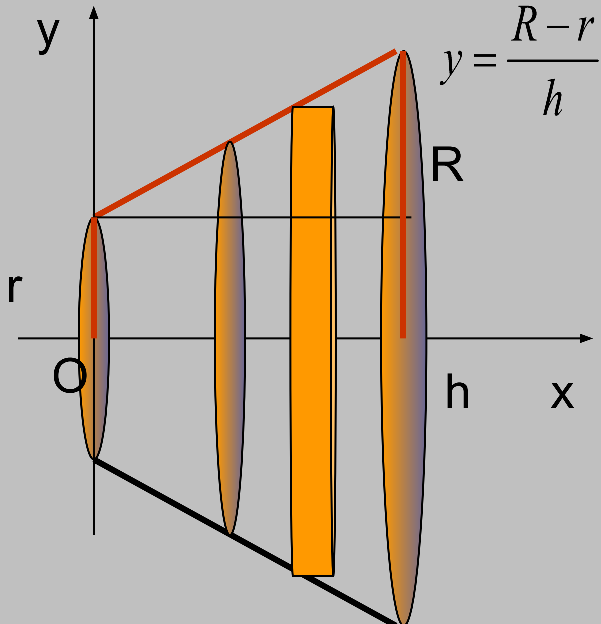



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

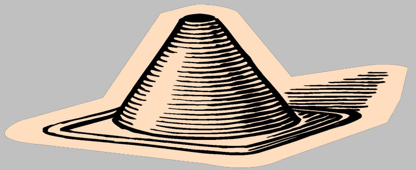
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \partial x = \pi \cdot \frac{r^2 x^3}{h^2 \cdot 3}\Bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\partial x$$

# Рассмотрим усечённый конус и найдём его объём




$$y=\frac{R-r}{h}x+r$$



$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2\partial x=$$

$$=\pi\cdot\frac{h}{R-r}\cdot\frac{\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^3}{\cdot 3}\Bigg|_0^h=$$

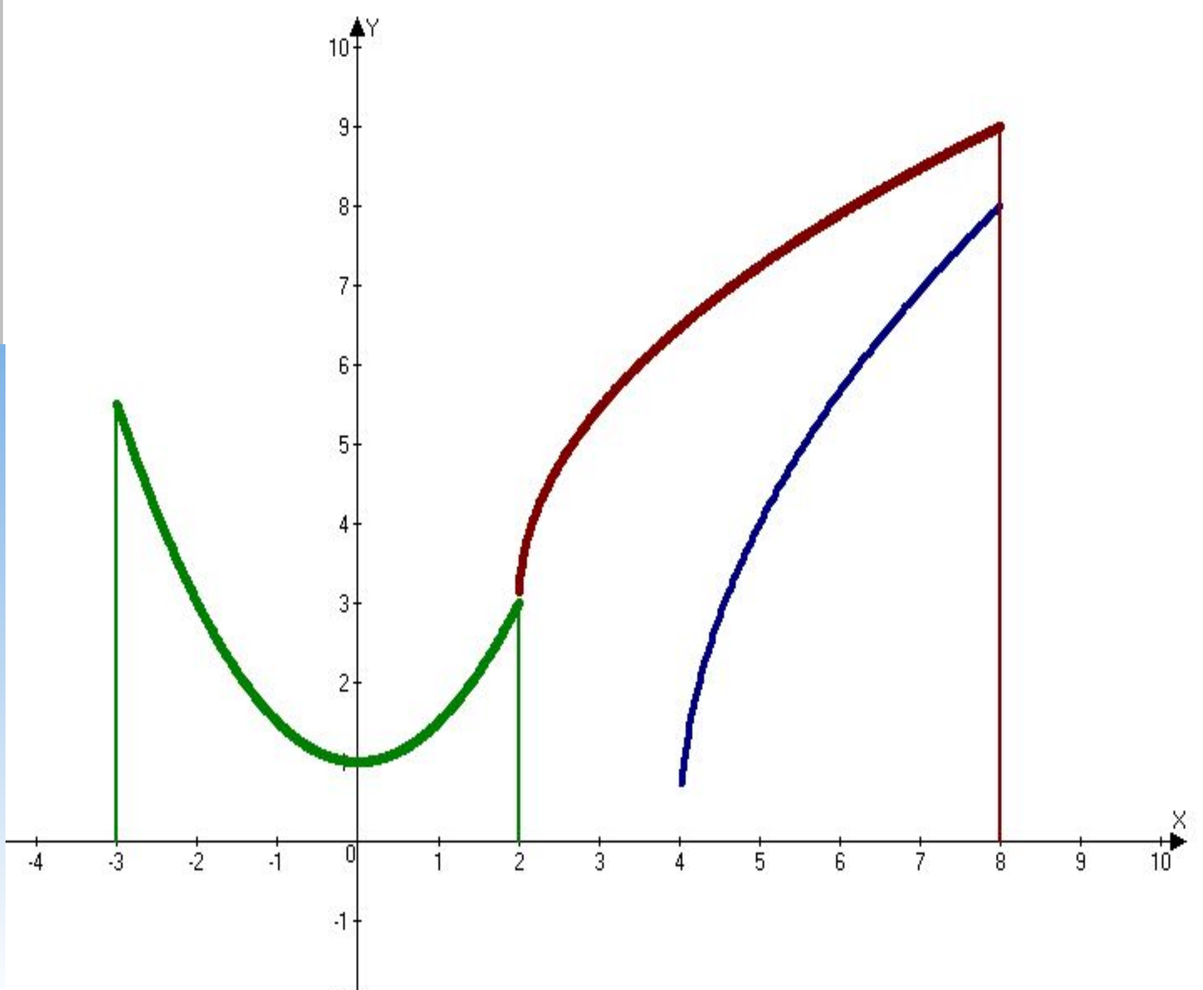
$$=\frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3-r^3\right)=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

*** Найдите объём тела, если его поверхность получена вращением фигуры образованной графиками функций:

$$y = 0{,}5x^2 + 1, \text{ на } [-3; 2]$$

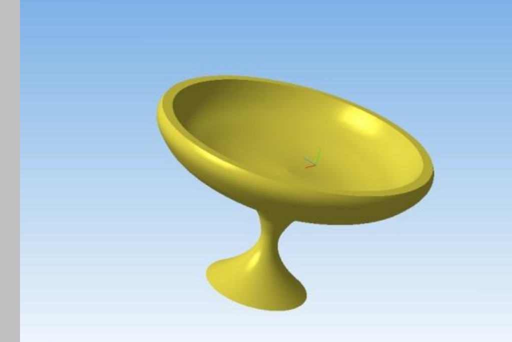
$$y = \sqrt{6x-12} + 3, \text{ на } [2; 8]$$

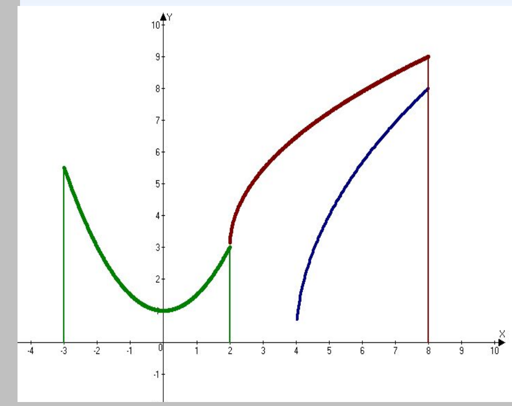
$$y = 4\sqrt{x-4}, \text{ на } [4; 8]$$



# Вычисление определённых интегралов

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\partial x$$





$$V = V_{основания} + V_{чаши} - V_{выемки}$$

$$V_{основания} = \pi \int_{-3}^{2} \left(0{,}5x^2 + 1\right)^2 \partial x = \pi \int_{-3}^{2} (0{,}25x^4 + x^2 + 1)\partial x$$

$$= \pi \cdot 30\tfrac{5}{12}\, куб.ед.$$

$$V_{чаши} = \pi \int_{2}^{8} \left(\sqrt{6x-12} + 3\right)^2 \partial x = \pi \int_{2}^{8} (6x - 12 + 6\sqrt{6x-12} + 9)\partial x$$

$$= \pi \cdot 306\ куб.ед.$$

$$V_{выемки} = \pi \int_{4}^{8} \left(4\sqrt{4x-4}\right)^2 \partial x = \pi \int_{4}^{8} 16(4x-4)\partial x = \pi \cdot 128\, куб.ед.$$

$$V_{кубка} = 208\tfrac{5}{12}\pi \approx 654.4 куб.ед$$