



Четыре замечательные

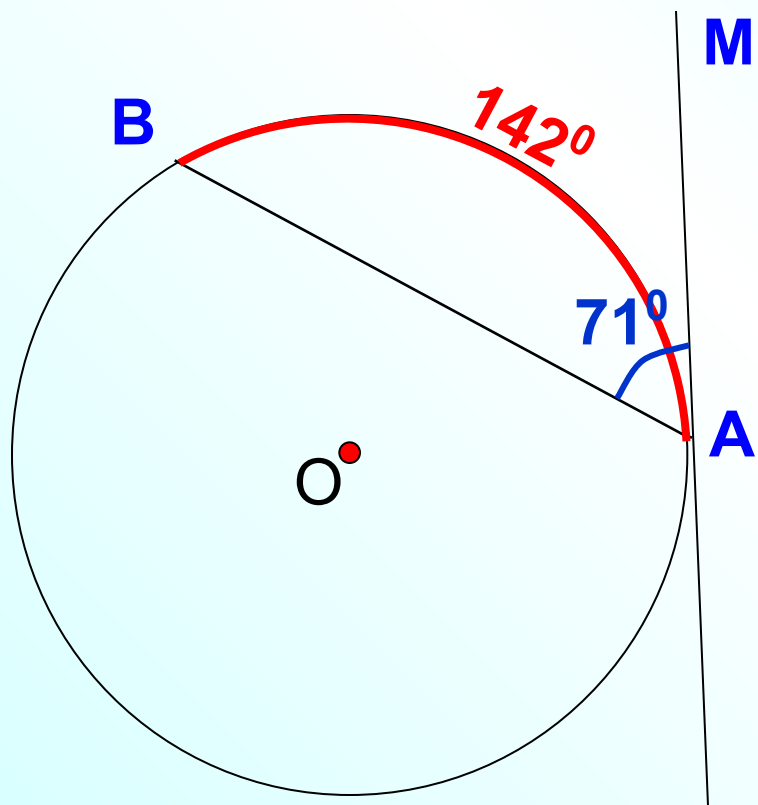
8 класс

точки треугольника

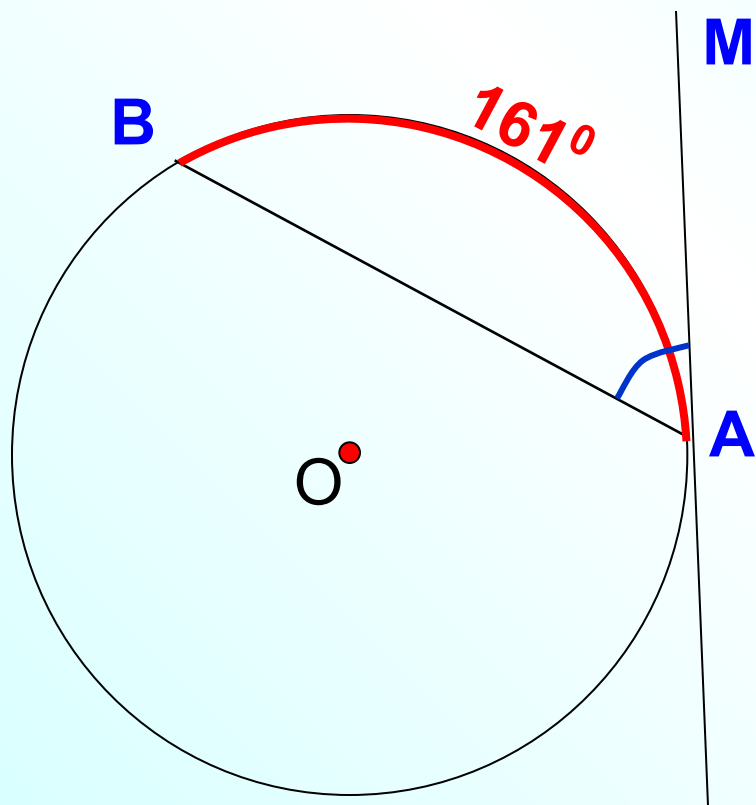
Л.С. Атанасян

Геометрия 7-9

Блиц-опрос. Найдите угол MAB .



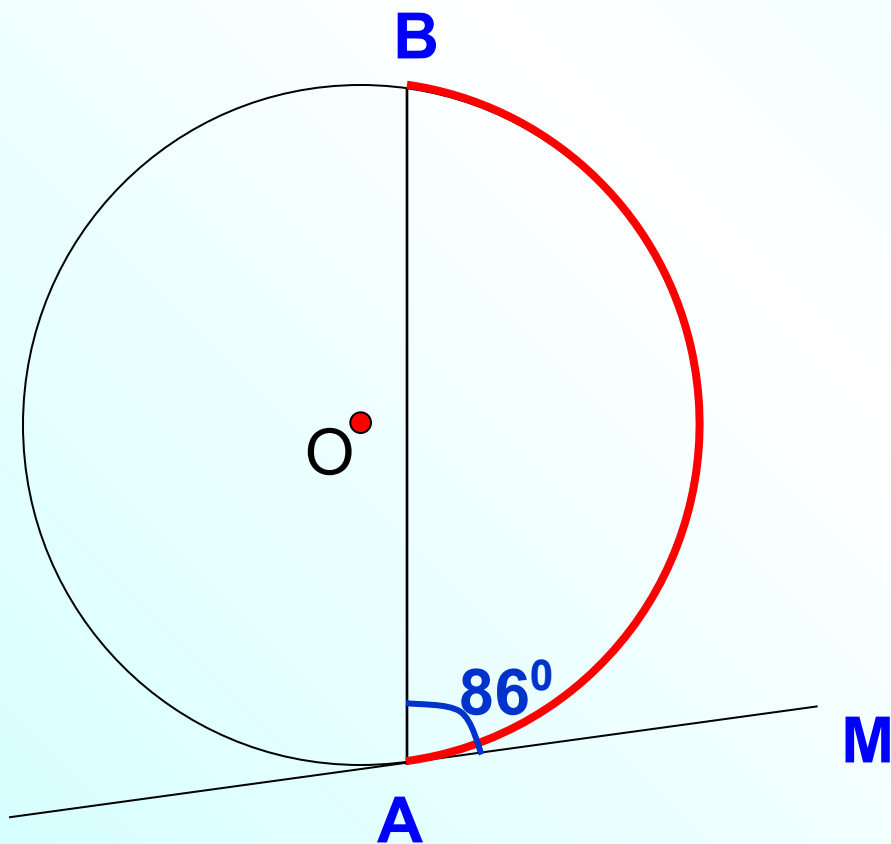
Блиц-опрос. Найдите угол МАВ.



$$161^{\circ} : 2 = 160^{\circ}60' : 2 = 80^{\circ}30'$$

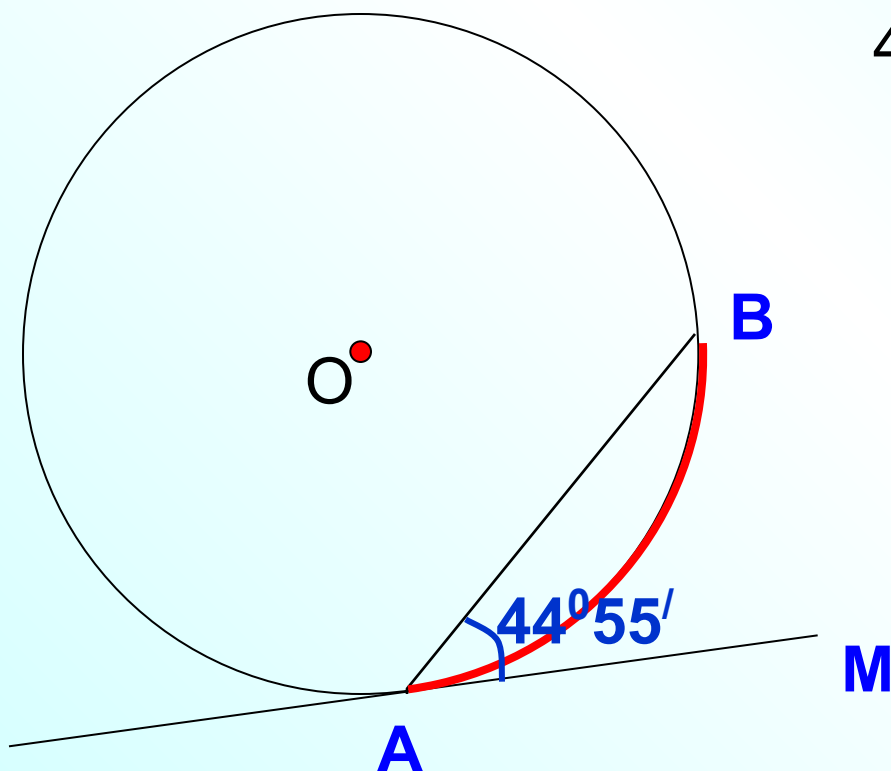
Блиц-опрос. Найдите дугу АВ.

$$86^{\circ} \cdot 2 = 172^{\circ}$$



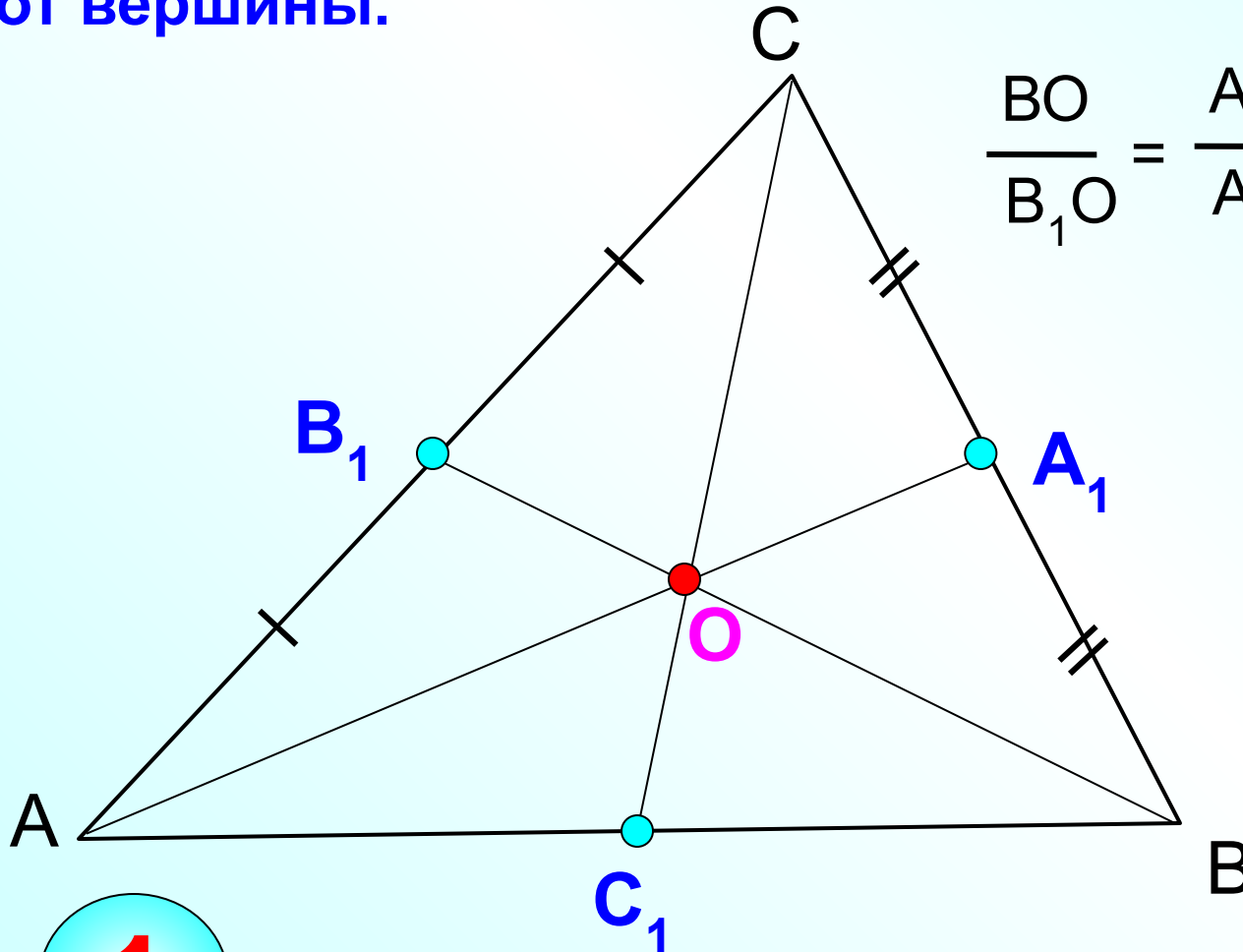
Блиц-опрос. Найдите дугу АВ.

$$44^{\circ}55' \cdot 2 = 88^{\circ}110' = 89^{\circ}50'$$



Свойство медиан треугольника.

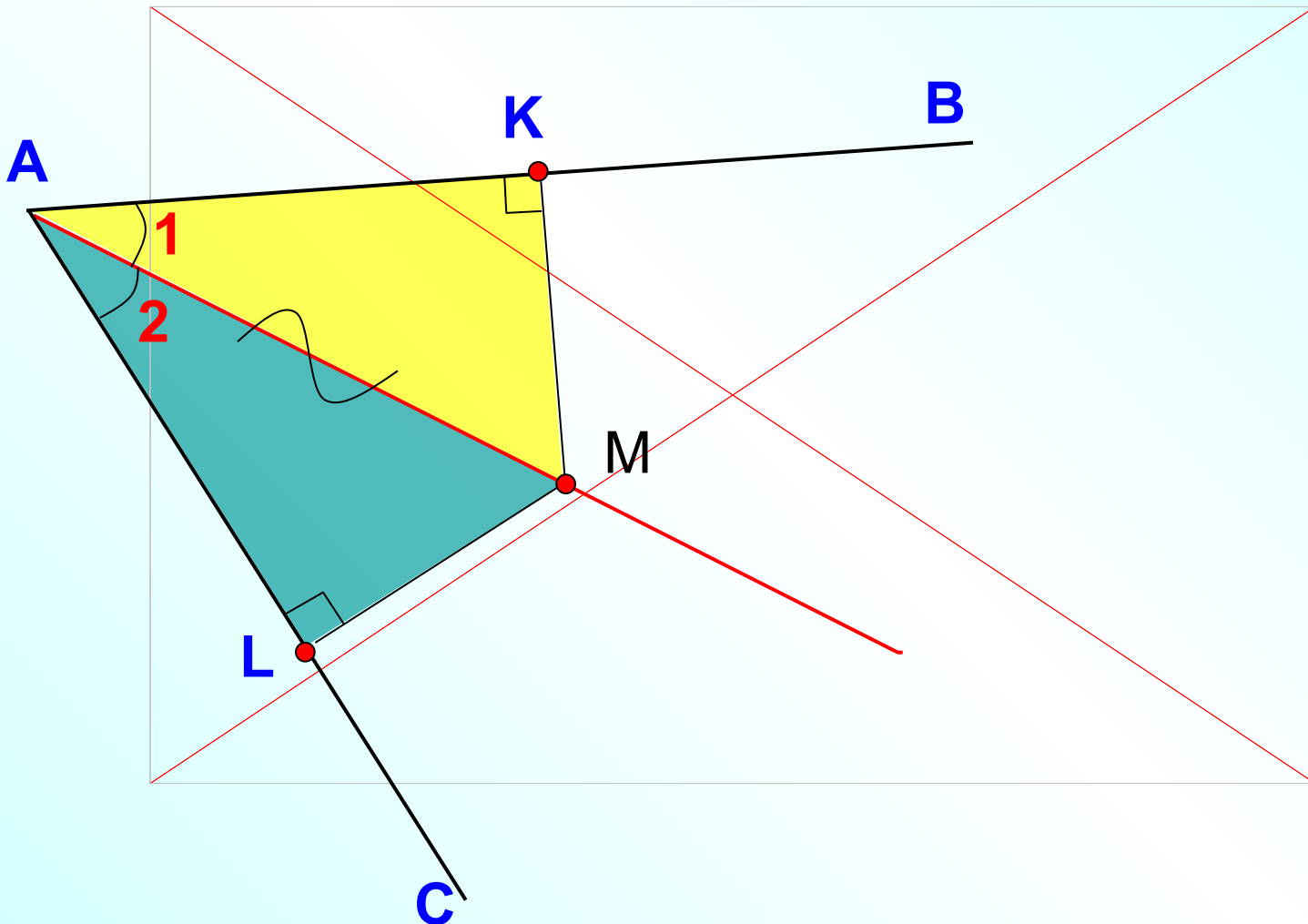
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



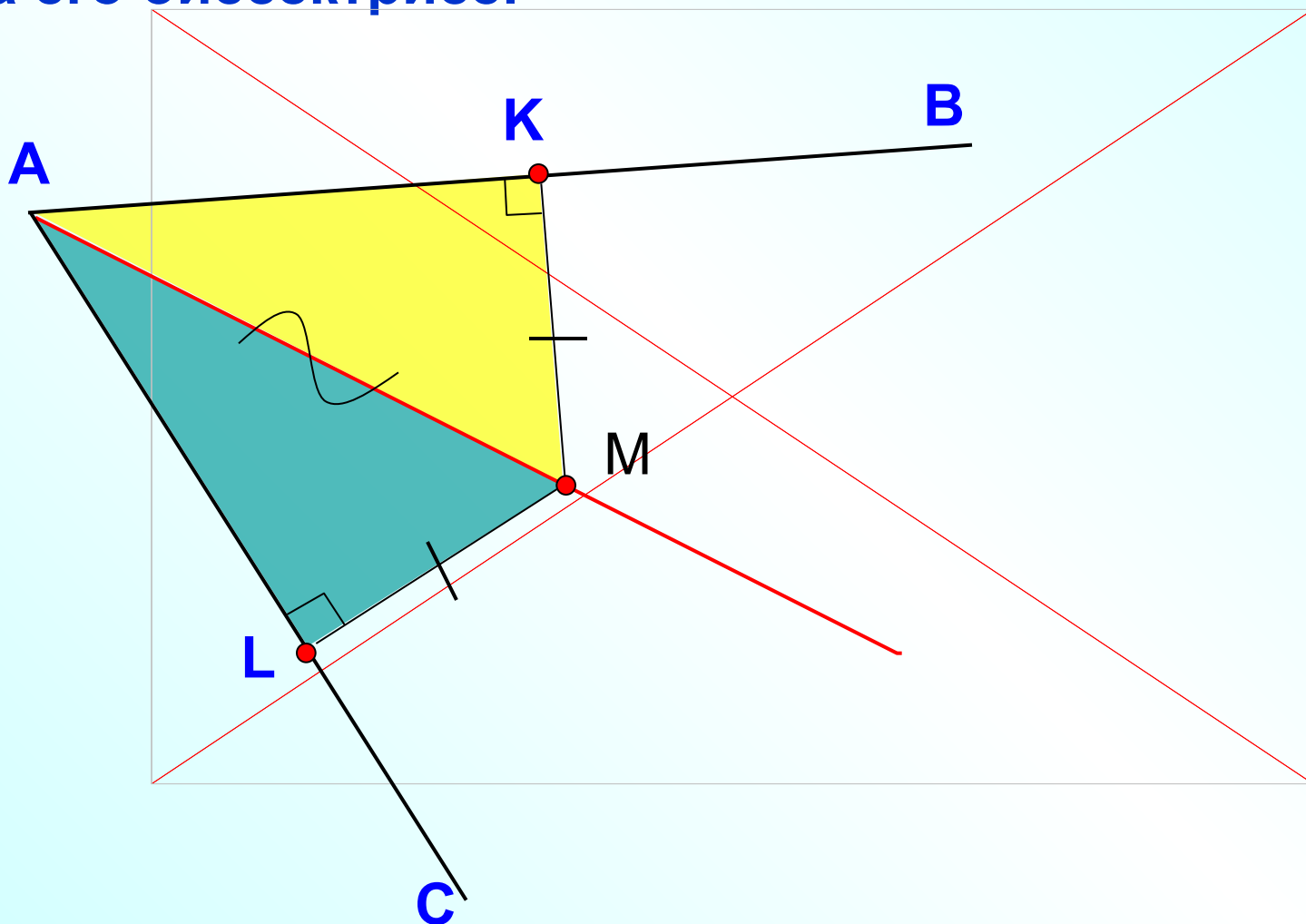
$$\frac{BO}{B_1O} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{CO}{C_1O} = \frac{2}{1}$$

1

Теорема Каждая точка биссектрисы
неразвернутого угла **равноудалена** от его сторон.

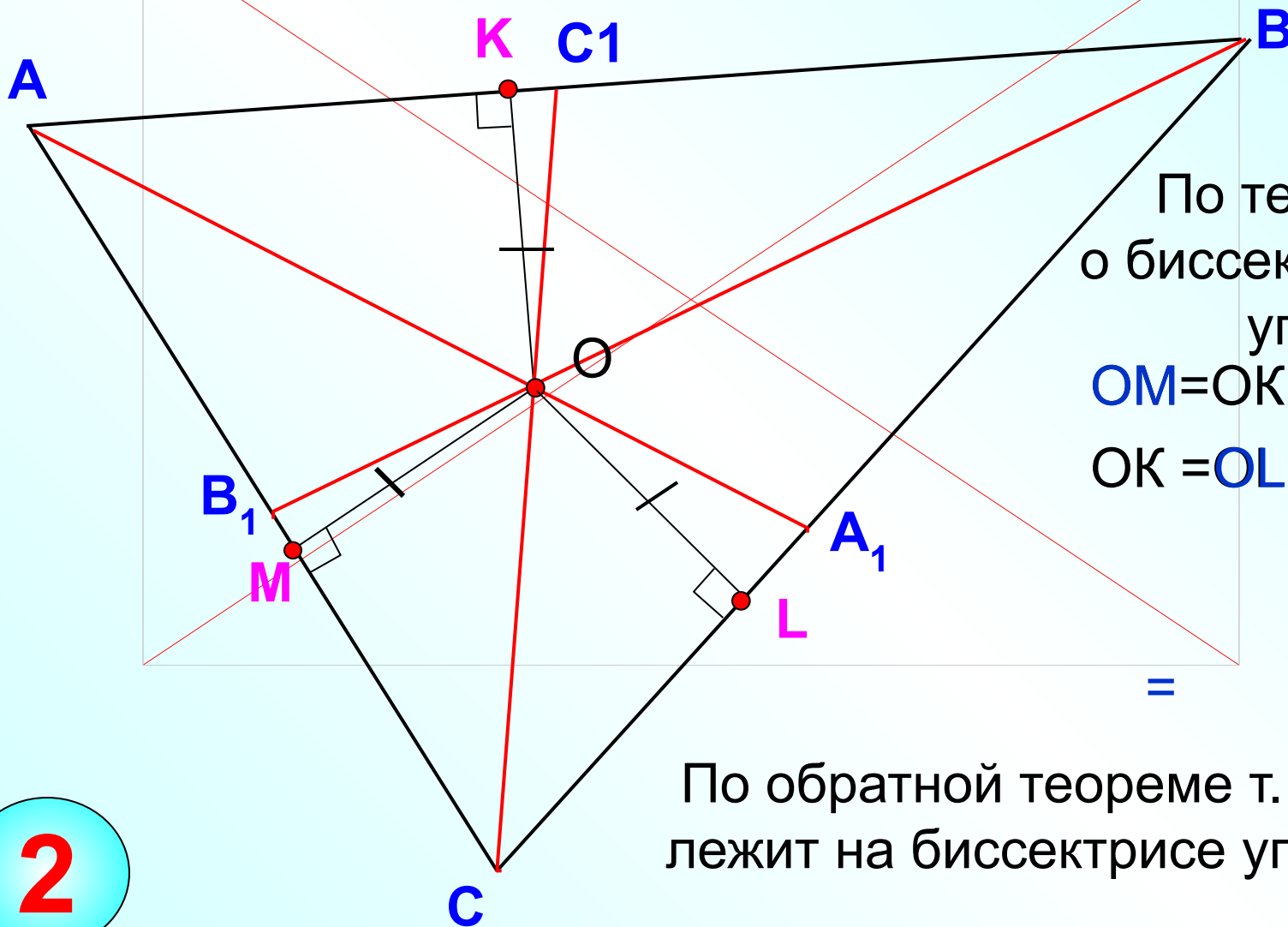


Обратная теорема Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.



Следствие

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



По теореме
о биссектрисе
угла

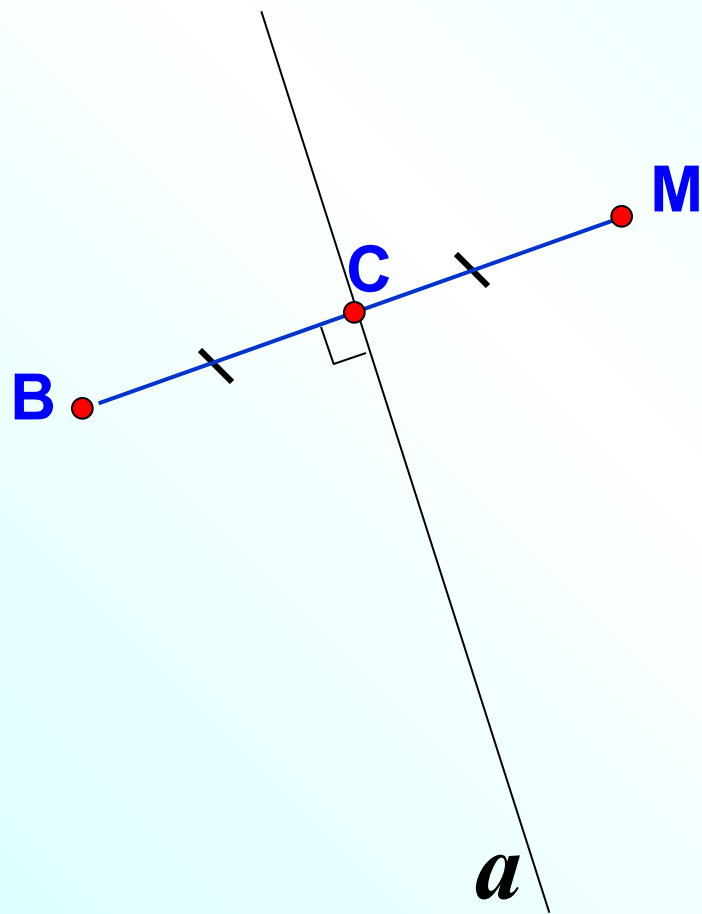
$$OM = OK$$

$$OK = OL$$

По обратной теореме т. O
лежит на биссектрисе угла C

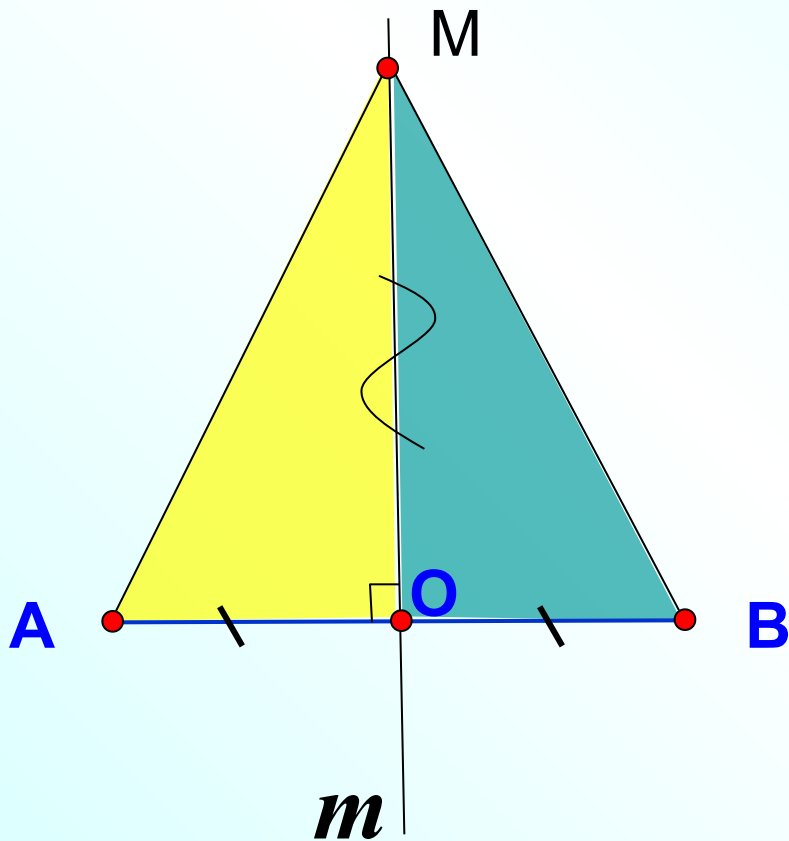
2

Определение Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярно к нему.



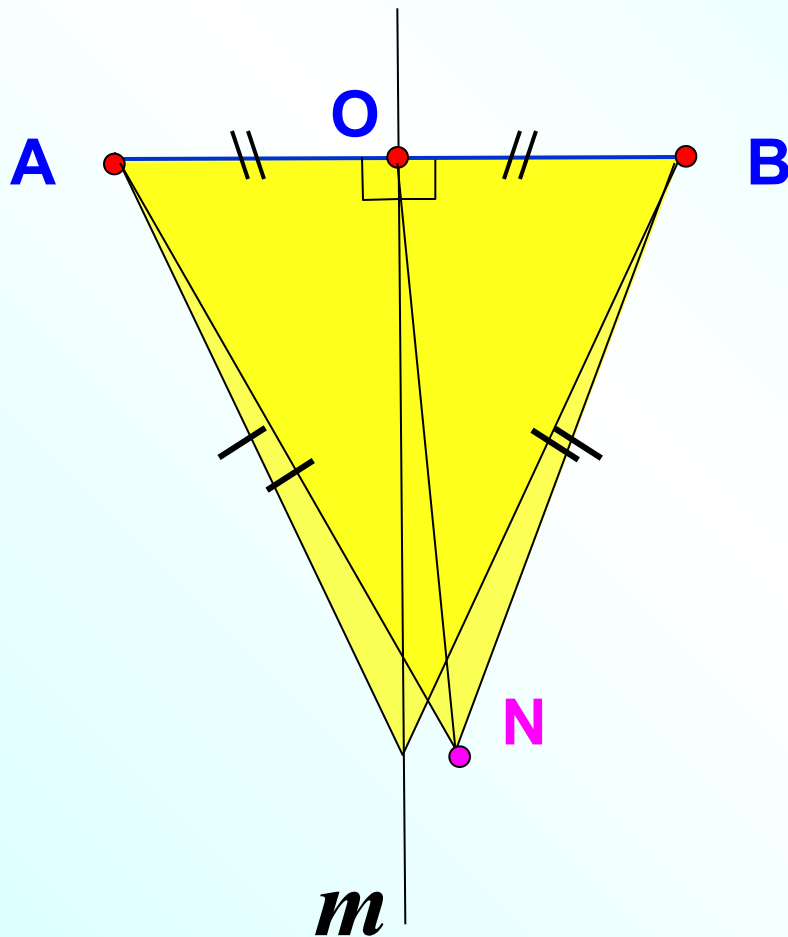
Прямая ***a*** — серединный перпендикуляр к отрезку.

Теорема Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

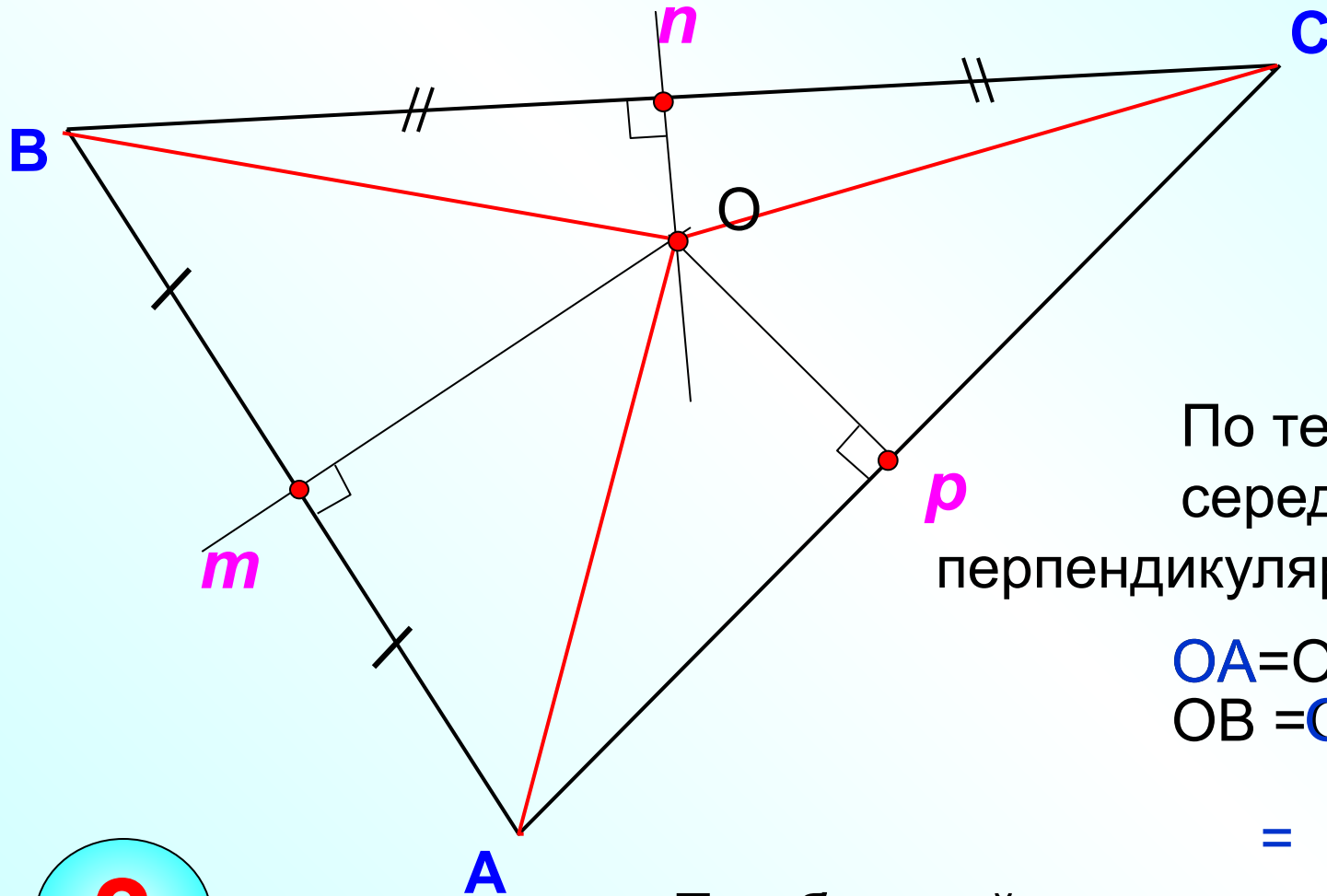


Обратная теорема

Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.



Следствие Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.



По теореме о
серединном
перпендикуляре к отрезку

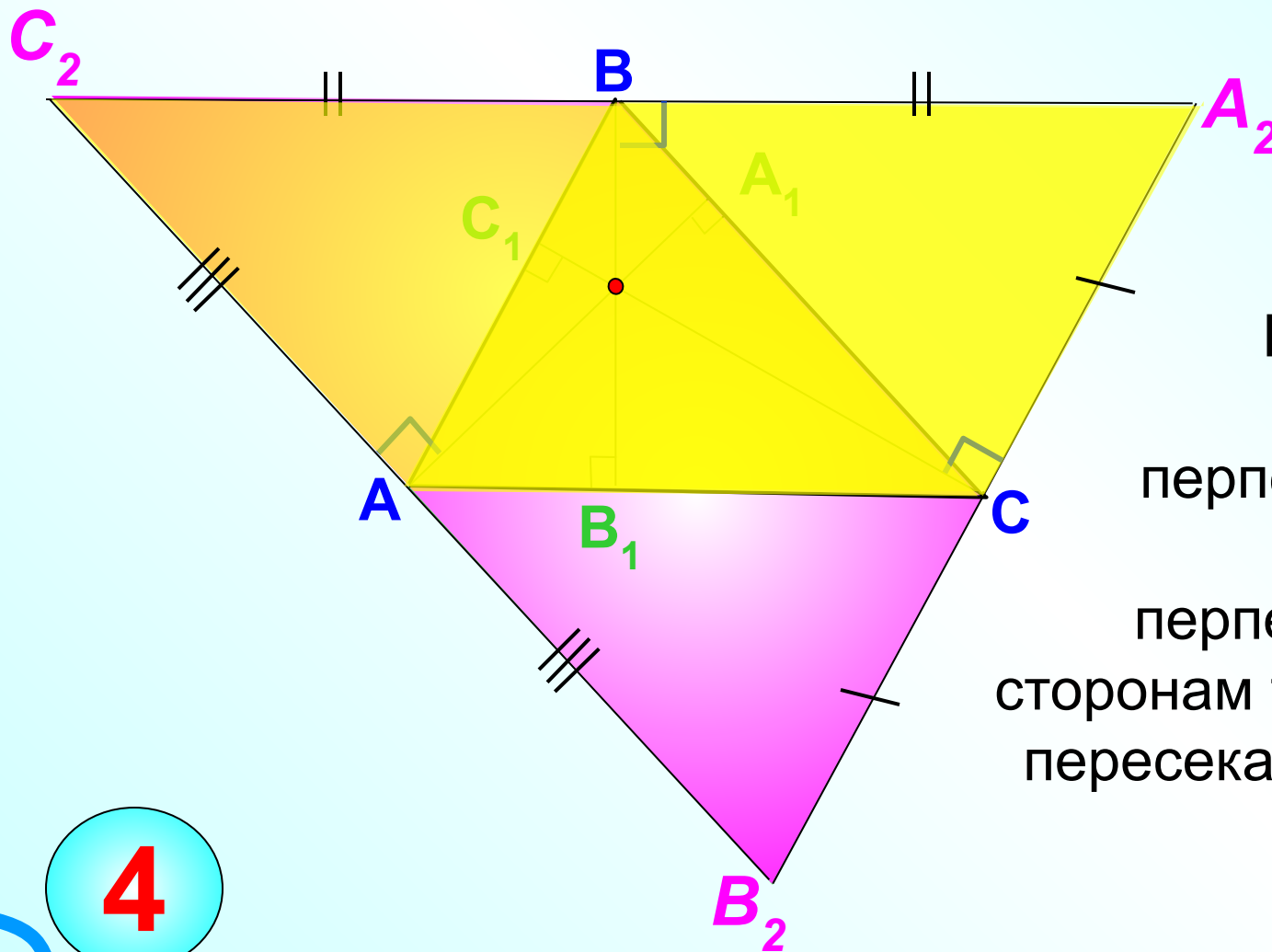
$$\begin{aligned} OA &= OB \\ OB &= OC \end{aligned}$$

=

По обратной теореме т. O лежит на
сер. пер. к отрезку AC

3

Теорема Высоты треугольника
(или их продолжения) пересекаются в одной точке.



По теореме о
серединных
перпендикулярах:
серединные
перпендикуляры к
сторонам треугольника
пересекаются в одной
точке.

4

Замечательные ТОЧКИ треугольника.

Точка
пересечения

медиан

Точка
пересечения

биссектрис

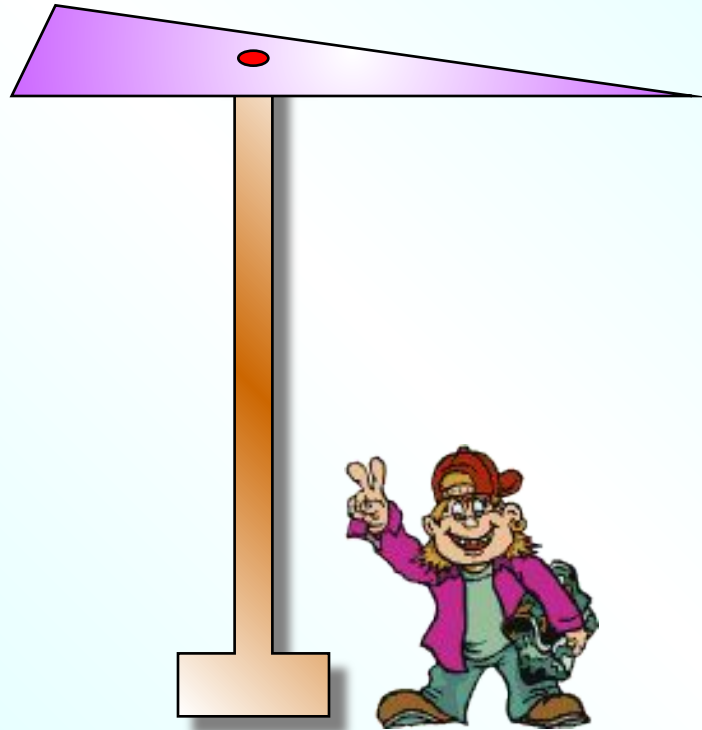
Точка
пересечения

высот

Точка
пересечения
серединных
перпенди

куляров

Треугольник, который опирается на острие иглы в точке пересечения медиан, находится в равновесии!

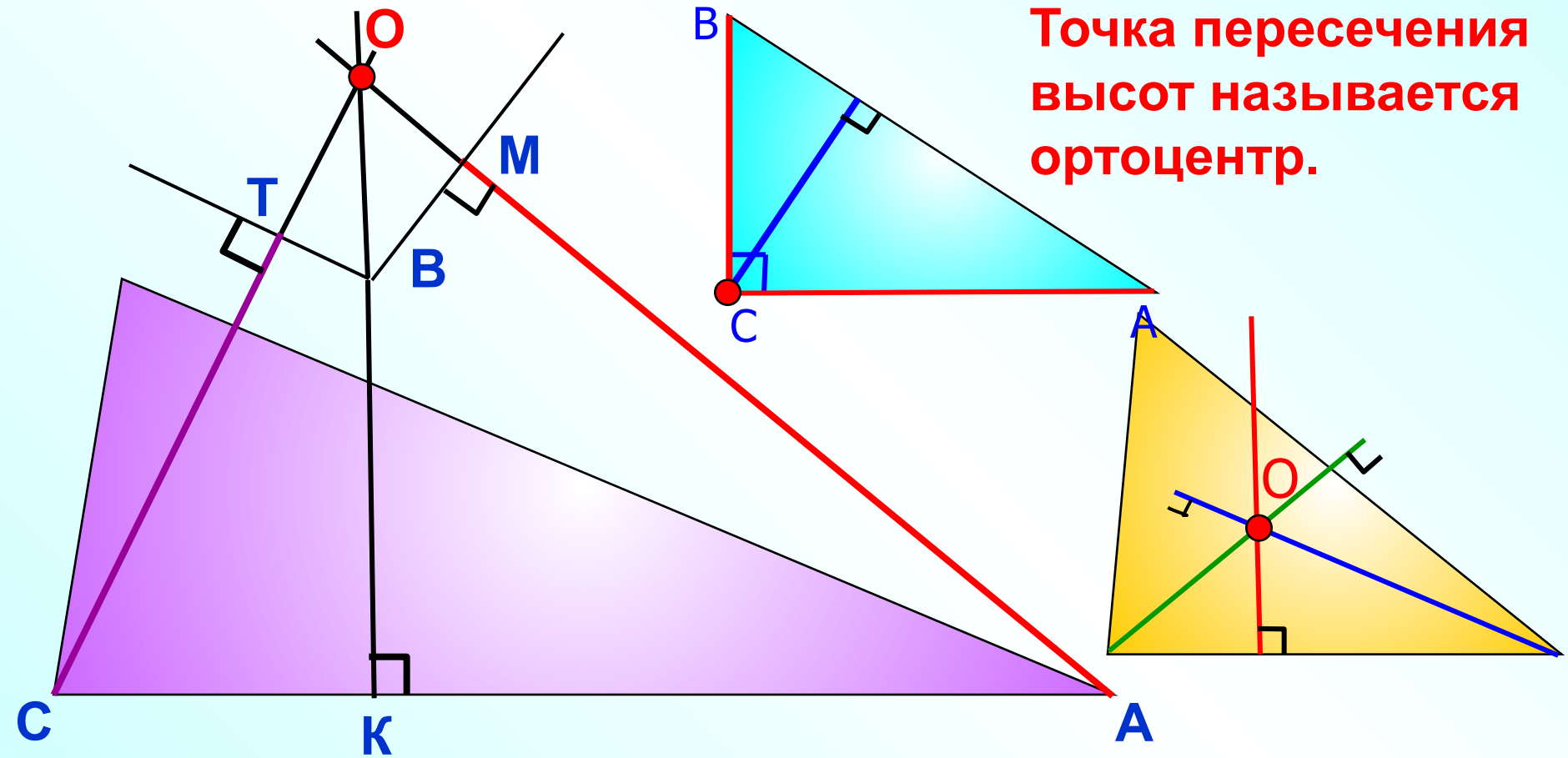


Точка, обладающая таким свойством, называется
центром тяжести треугольника.

Высоты **прямоугольного треугольника** пересекаются в вершине C .

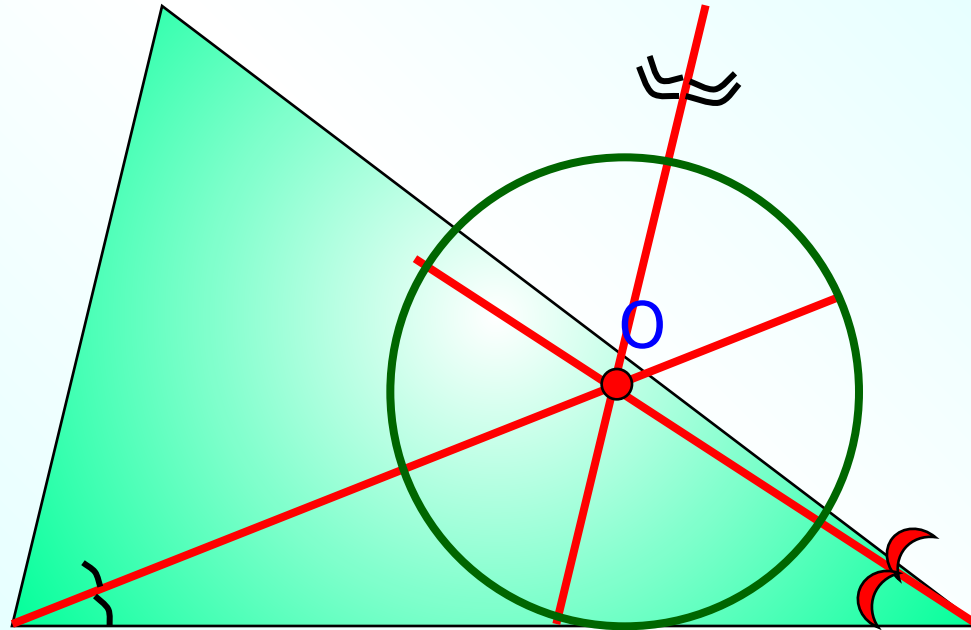
Высоты **остроугольного треугольника** пересекаются в точке O , которая лежит во внутренней области треугольника.

**Точка пересечения
высот называется
ортоцентр.**



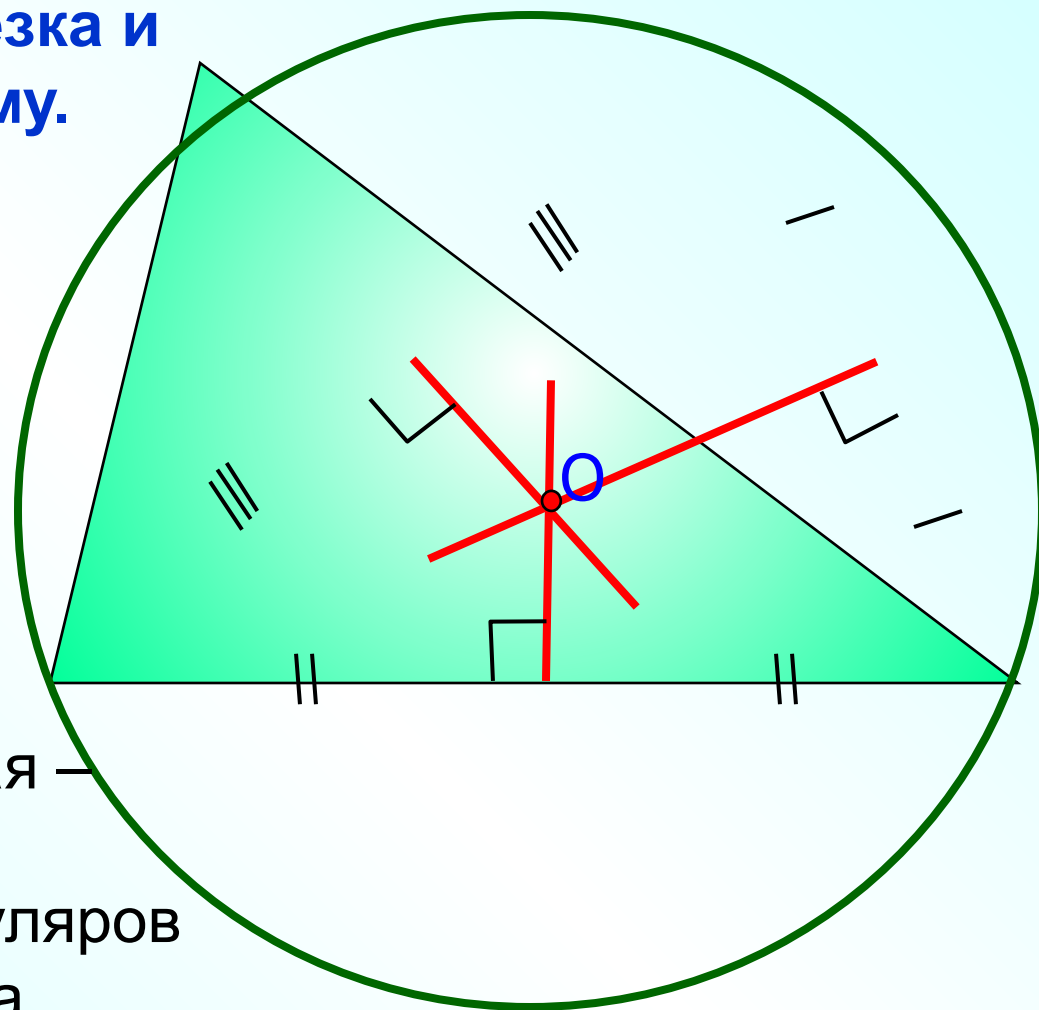
Высоты **тупоугольного треугольника** пересекаются в точке O , которая лежит во внешней области треугольника.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой** треугольника.



Эта точка замечательная – точка пересечения биссектрис является центром вписанной окружности.

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярно к нему.

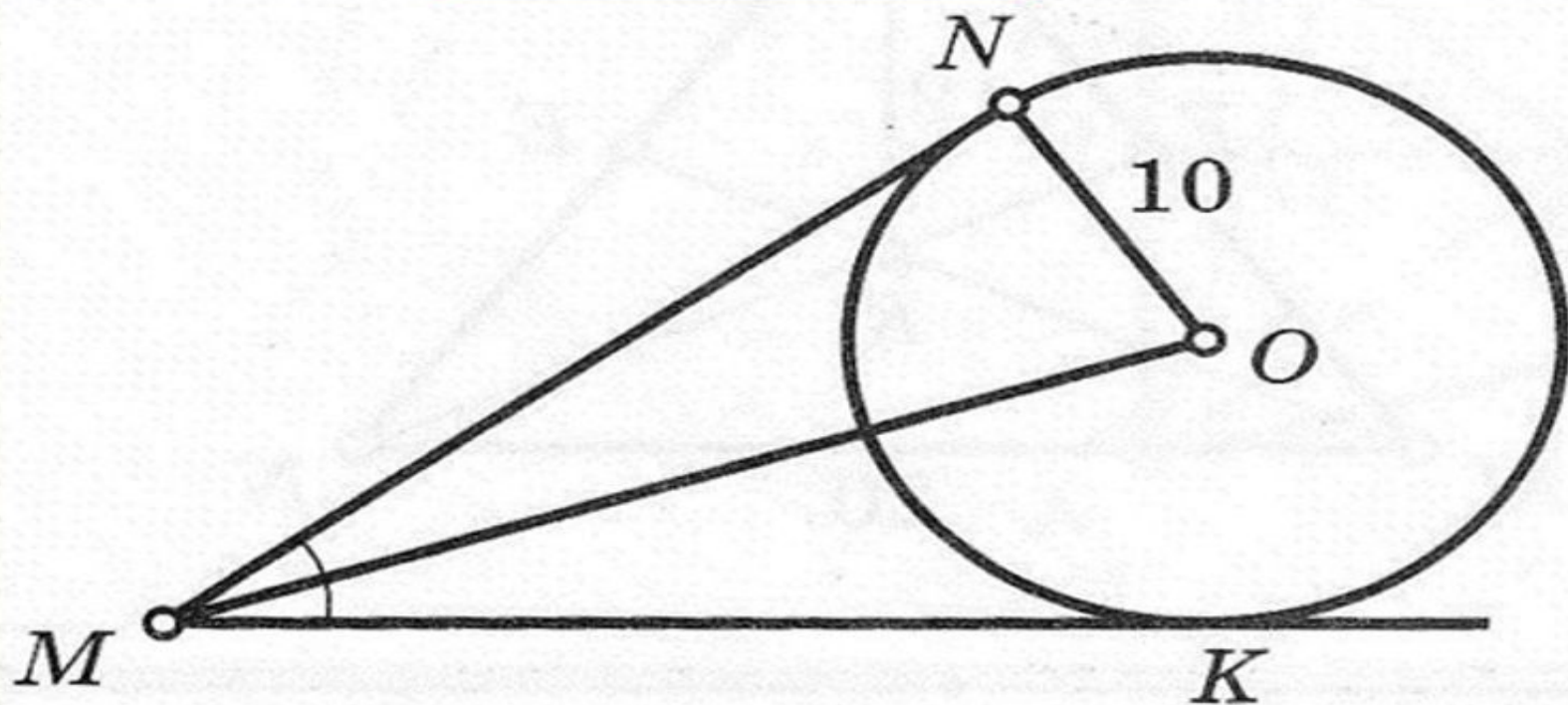


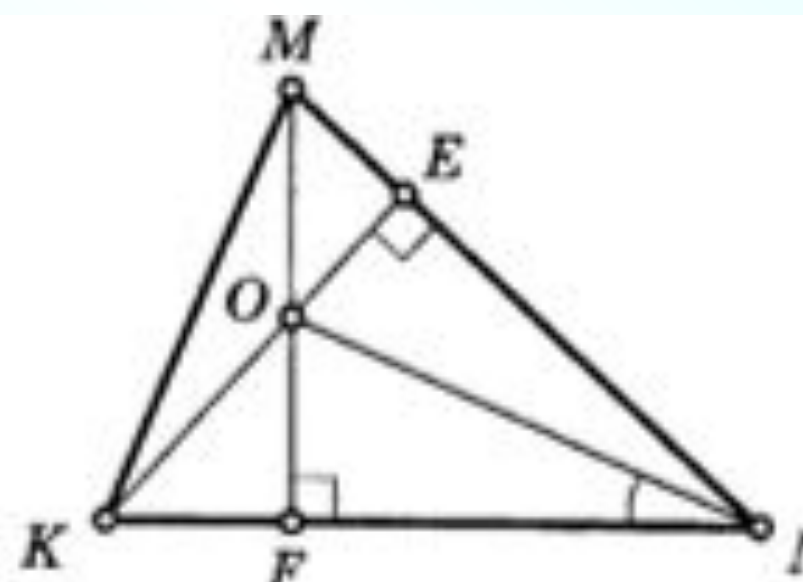
Эта точка замечательная — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является центром описанной окружности.

1

Дано: $ON = 10$, $\angle NMK = 60^\circ$

Найти: OM





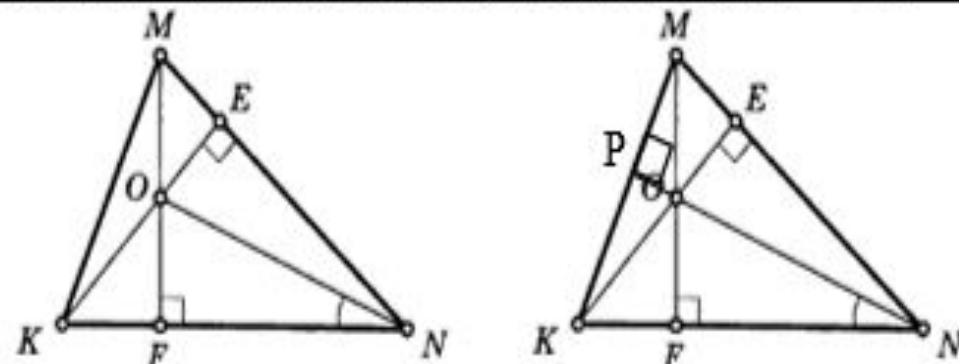
Дано: $\triangle KMN$;
KE, MF – высоты;
 $\angle MKN = 66^\circ$.

Найти: $\angle FNO$ - ?

Пример 2. По данным рисунка найдите угол FNO , если угол $MKN = 66^\circ$.

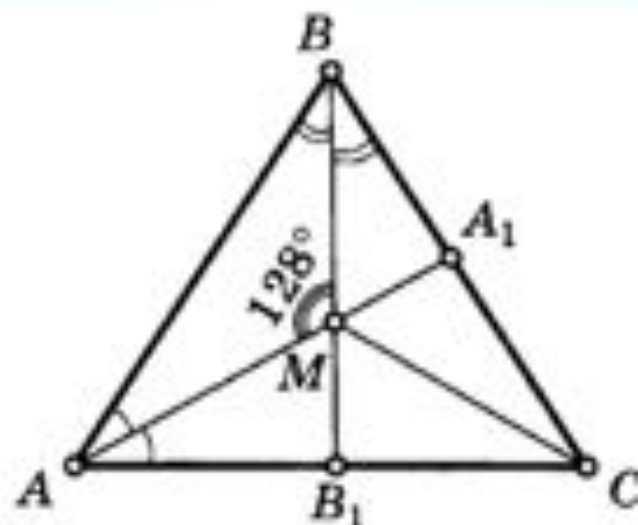
Дано: $\triangle KMN$;
 KE, MF – высоты;
 $\angle MKN = 66^\circ$.

Найти: $\angle FNO$ - ?



Решение:

- 1) Продолжим NO до пересечения со стороной KM . $KM \cap NO = P$;
 - 2) O – точка пересечения высот $\Rightarrow NP$ – высота $\triangle KMN \Rightarrow NP \perp KM \Rightarrow \triangle KPM$ – прямоугольный;
 - 3) $\triangle KPM$ – прямоугольный $\Rightarrow \angle PKN + \angle KNP = 90^\circ$ (по свойству острых углов прямоугольного треугольника);
 $\angle KNP = 90^\circ - \angle PKN = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$;
 $\angle KNP = \angle FNO = 24^\circ$.
- Ответ: $\angle FNO = 24^\circ$.



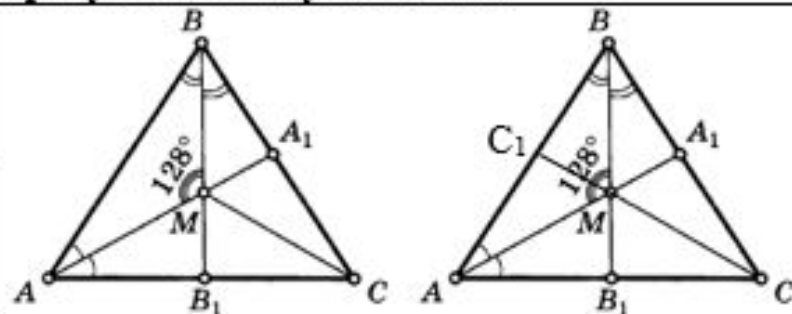
Дано: $\triangle ABC$;
 AA_1, BB_1 – бис-сы;
 $\angle AMB = 128^\circ$.

Найти: $\angle MSB_1$ - ?

Пример 4. По данным рисунка найти угол $\angle MCB_1$?

Дано: $\triangle ABC$;
 AA_1, BB_1 – бис-сы;
 $\angle AMB = 128^\circ$.

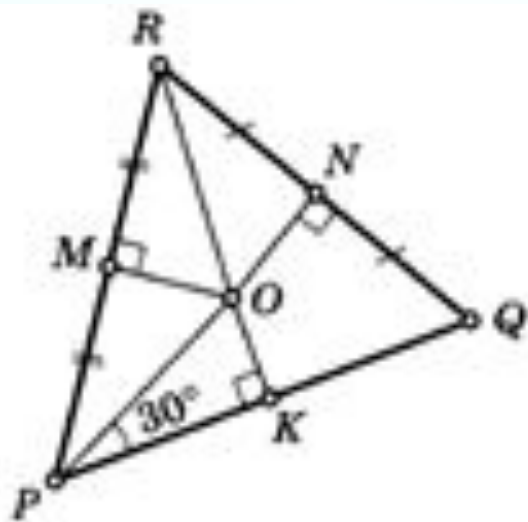
Найти: $\angle MCB_1$ - ?



Решение:

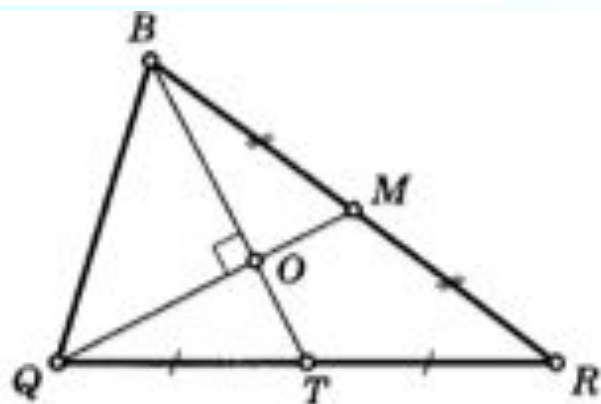
- 1) Продлим CM до пересечения с AB , $AB \cap CC_1 = C_1$,
 M – точка пересечения биссектрис треугольника $\Rightarrow CC_1$ – биссектриса треугольника ABC (по свойству биссектрис треугольника);
 - 2) Рассмотрим $\triangle ABM$: $\angle AMB + \angle BAM + \angle ABM = 180^\circ \Rightarrow \angle BAM + \angle ABM = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$;
 - 3) BB_1, AA_1 – биссектрисы $\triangle ABC \Rightarrow \angle A = 2\angle BAM, \angle B = 2\angle ABM$;
 - 4) По теореме о сумме углов треугольника: $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (2\angle BAM + 2\angle ABM) = 180^\circ - 2(\angle BAM + \angle ABM) = 180^\circ - 2 \cdot 52^\circ = 76^\circ$;
 - 5) CC_1 – биссектриса $\angle C \Rightarrow \angle MCB_1 = \angle C : 2 = 38^\circ$.
- Ответ:** $\angle MCB_1 = 38^\circ$.

ДЗ



Дано: $\triangle PRQ$;
 OM, ON – серед. перп.;
 $\angle OPK = 30^\circ$;
 $RO = 20$.

Найти: OK - ?

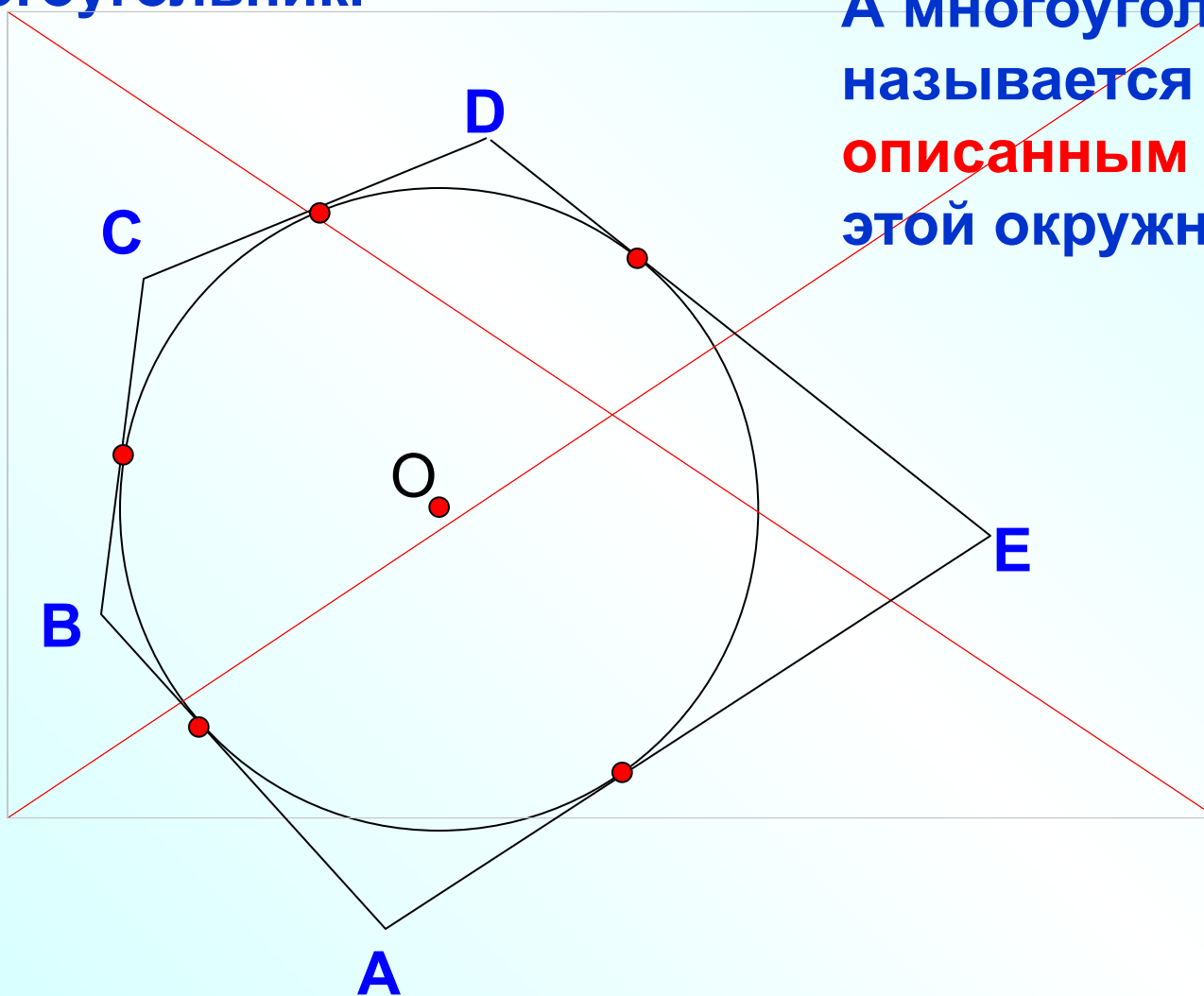


Дано: $\triangle BQR$;
 QM, BT – медианы;
 $QM \perp BT$;
 $QM = 9$;
 $BT = 12$.

Найти: $S_{\triangle BOQ}$ - ?

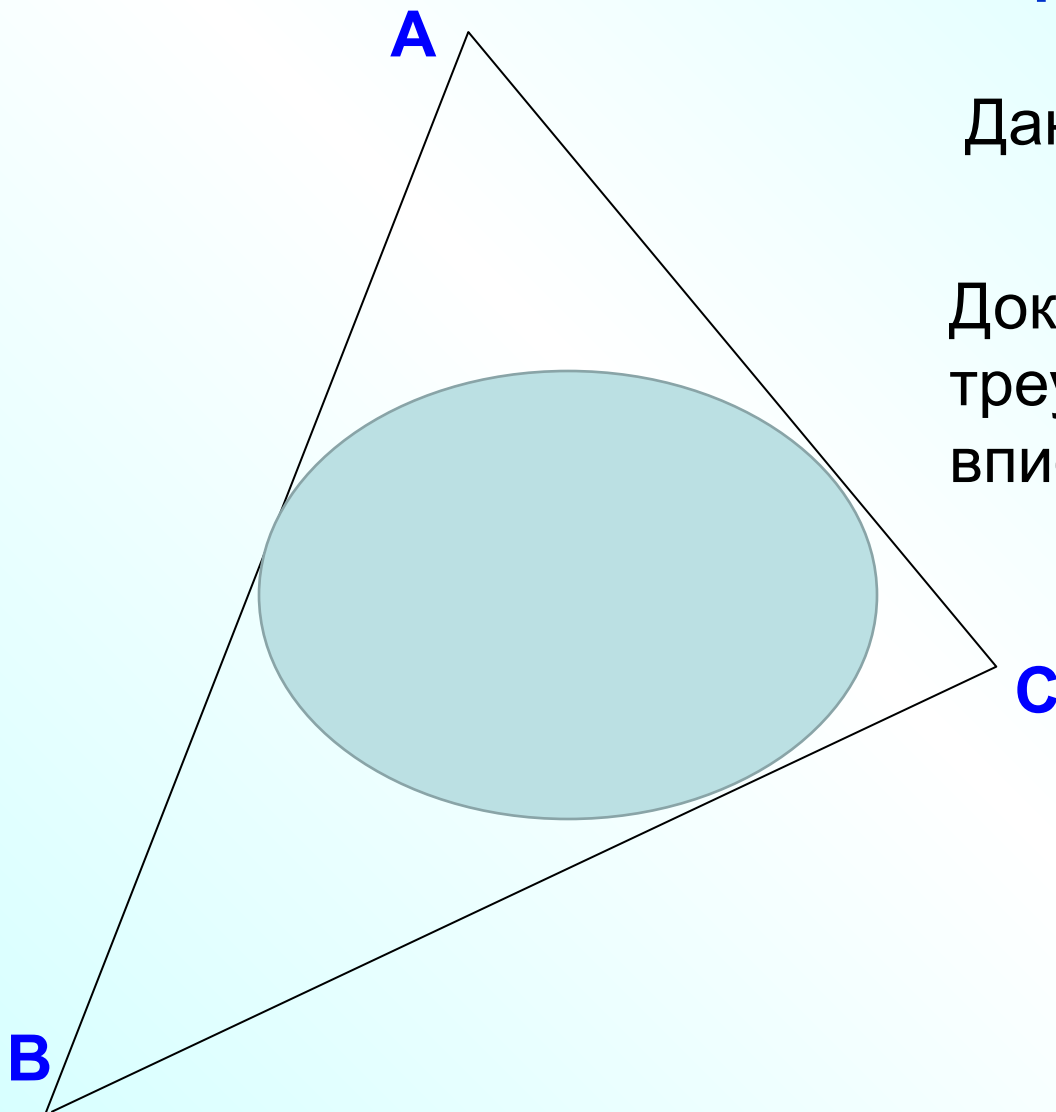
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник.

А многоугольник называется **описанным** около этой окружности.



Теорема

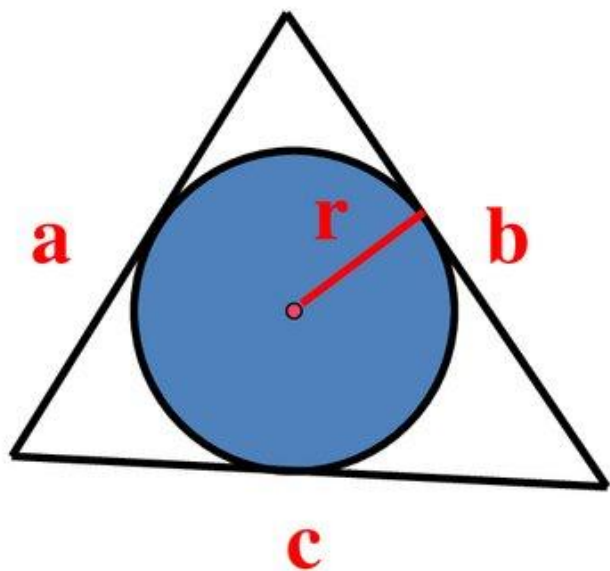
В любой треугольник можно
вписать окружность.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать, что в
треугольник можно
вписать окружность

Площадь треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности

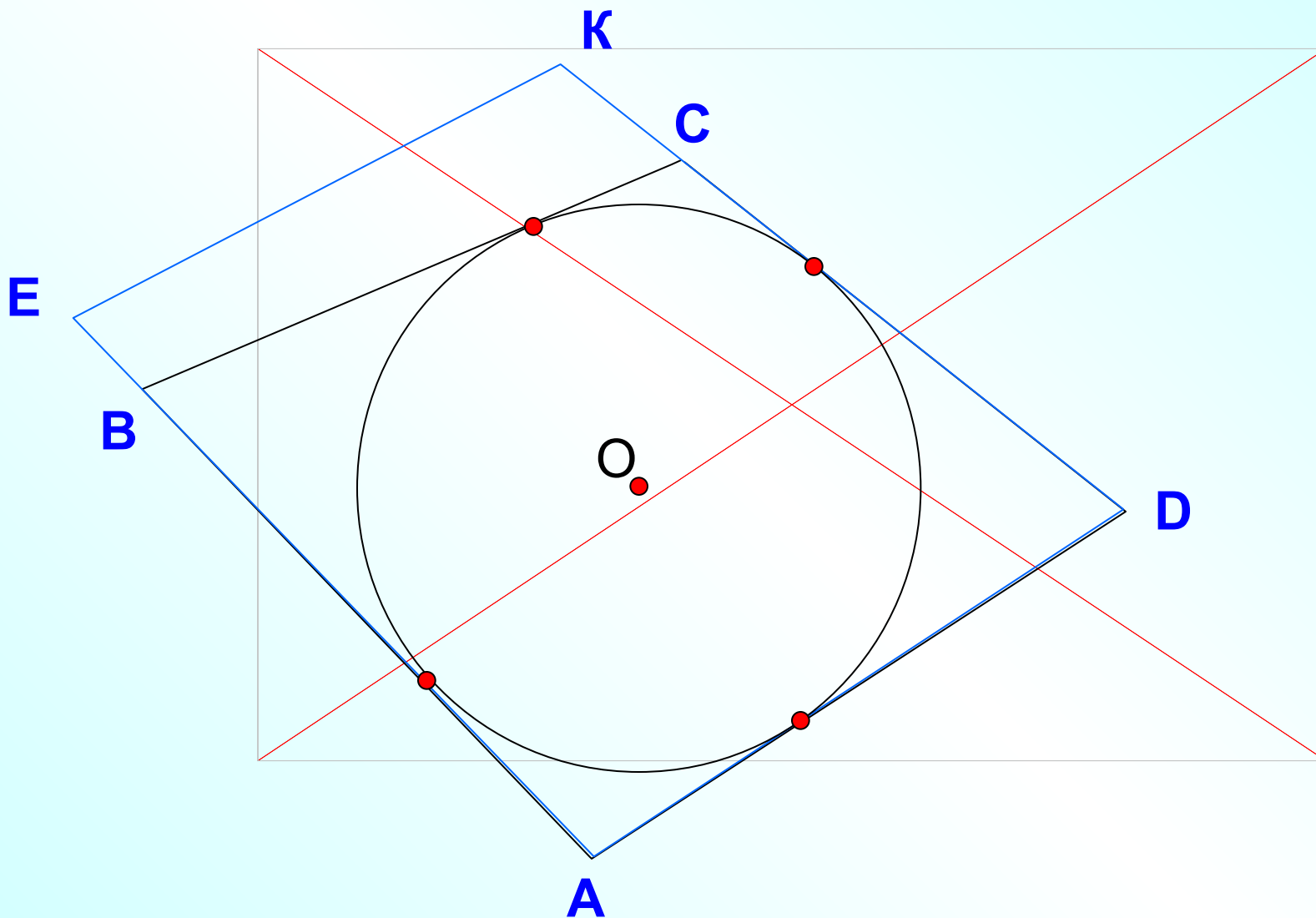


$$S = pr,$$

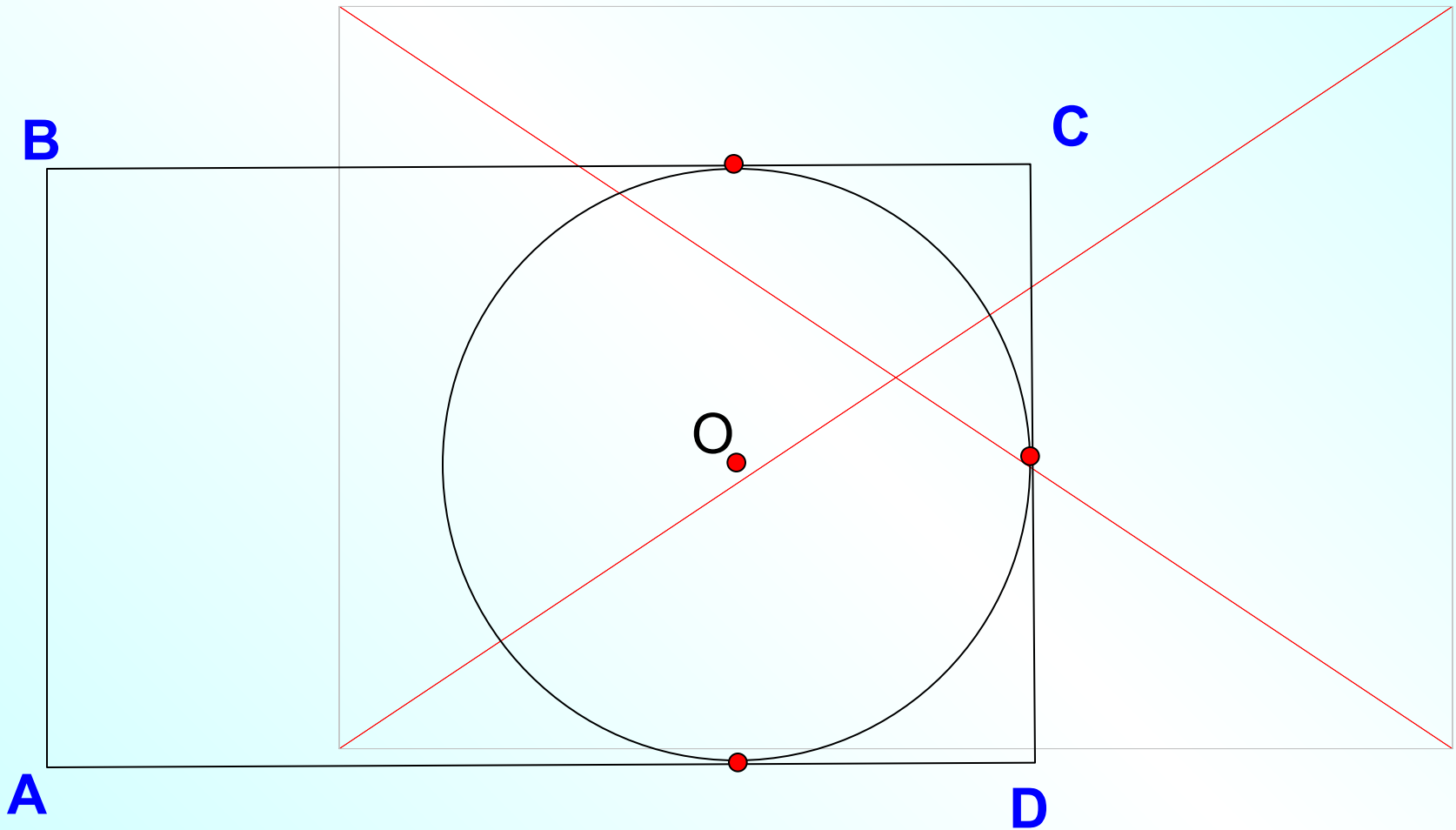
где $p = \frac{a+b+c}{2}$



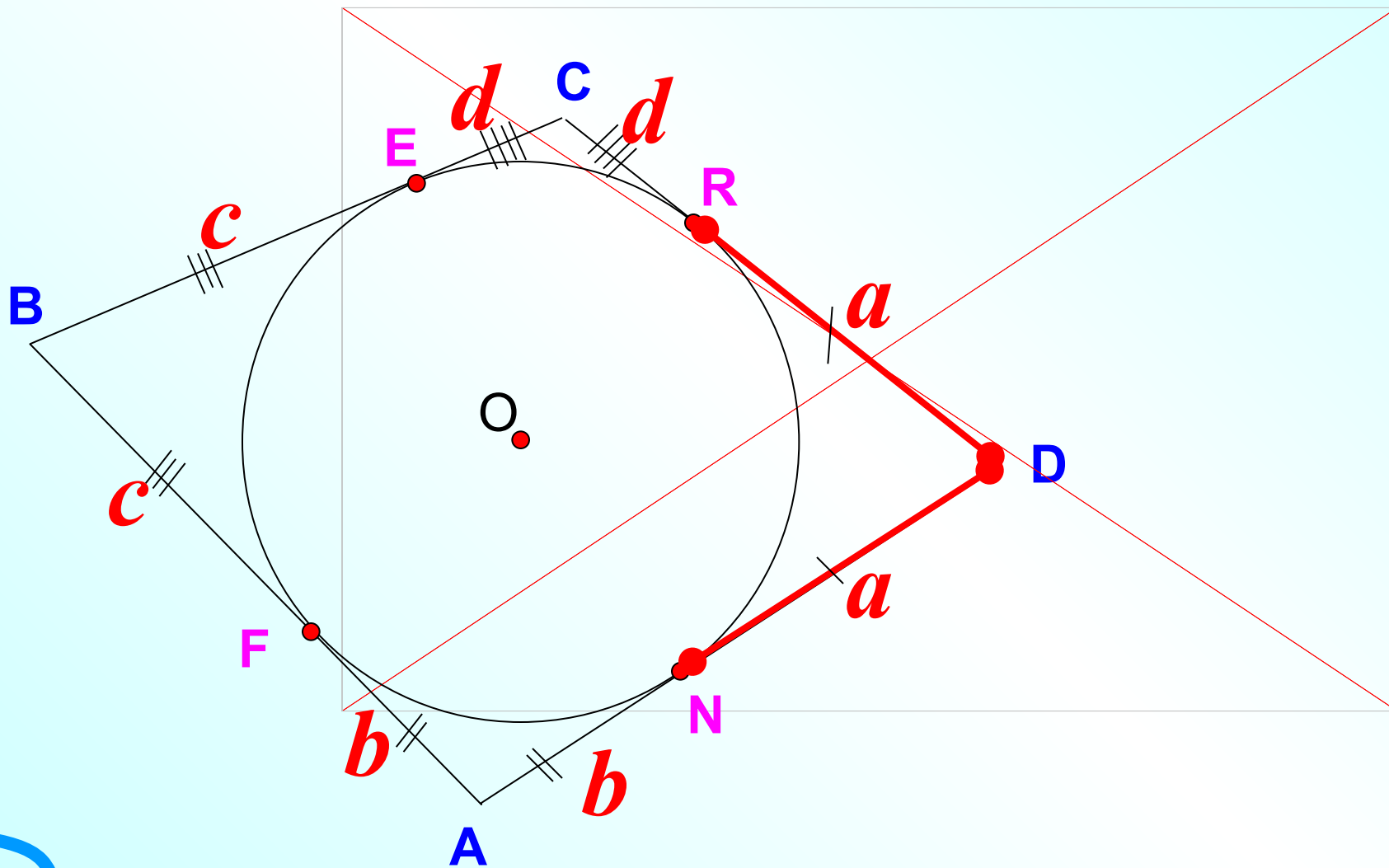
Какой из двух четырехугольников $ABCD$ или $AЕКD$ является описанным?



В прямоугольник нельзя вписать окружность.

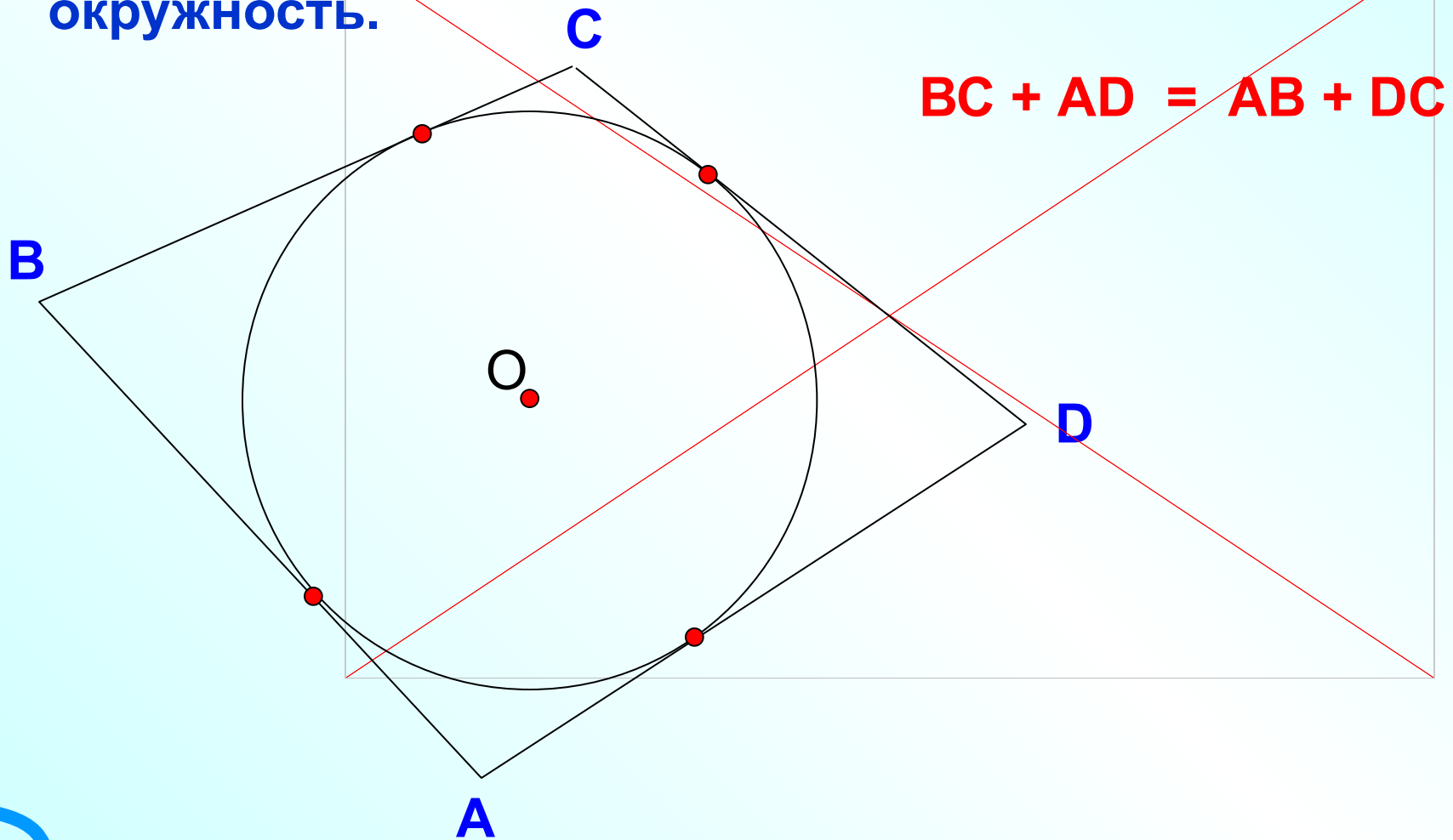


В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



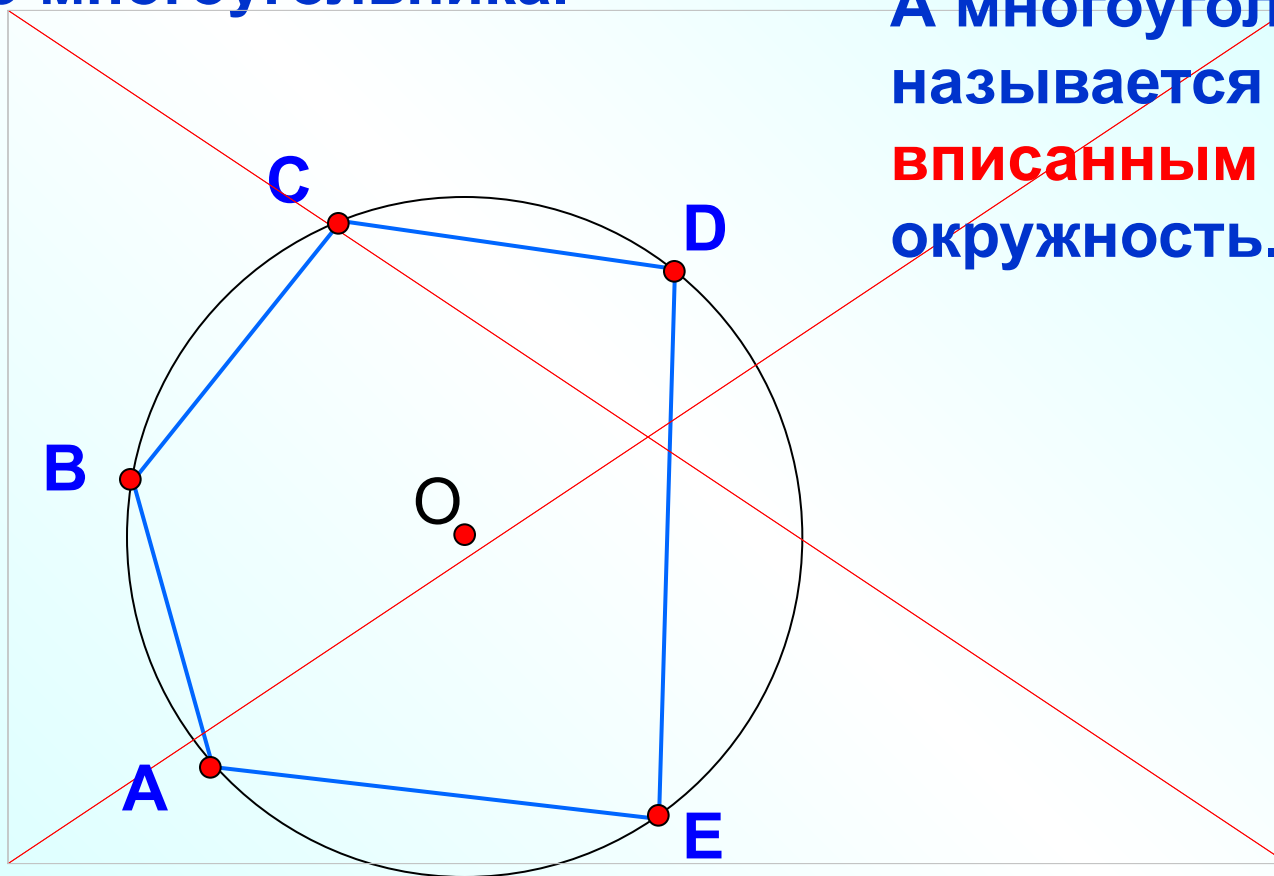
Верно и обратное утверждение.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.



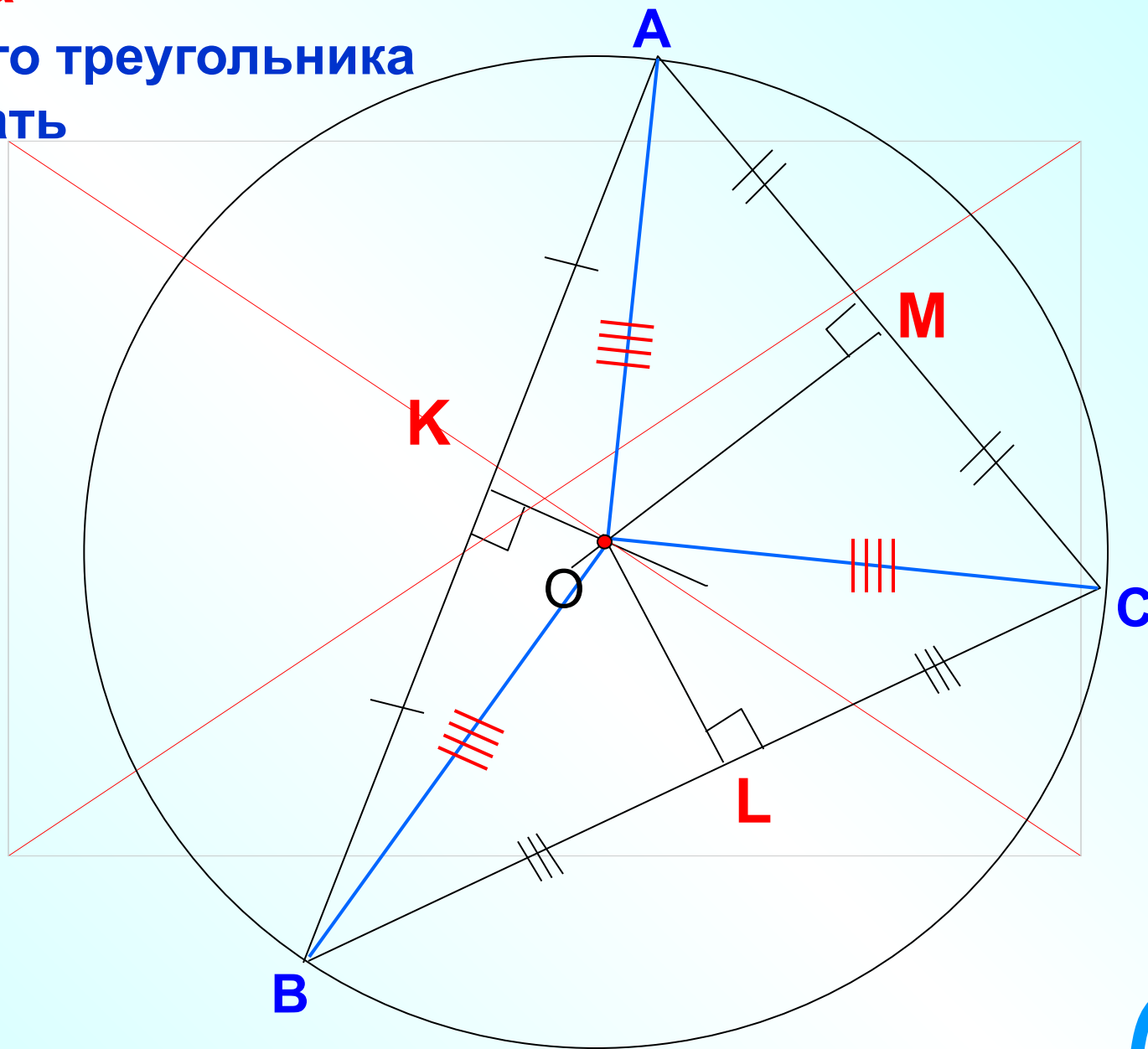
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника.

А многоугольник называется **вписанным** в эту окружность.

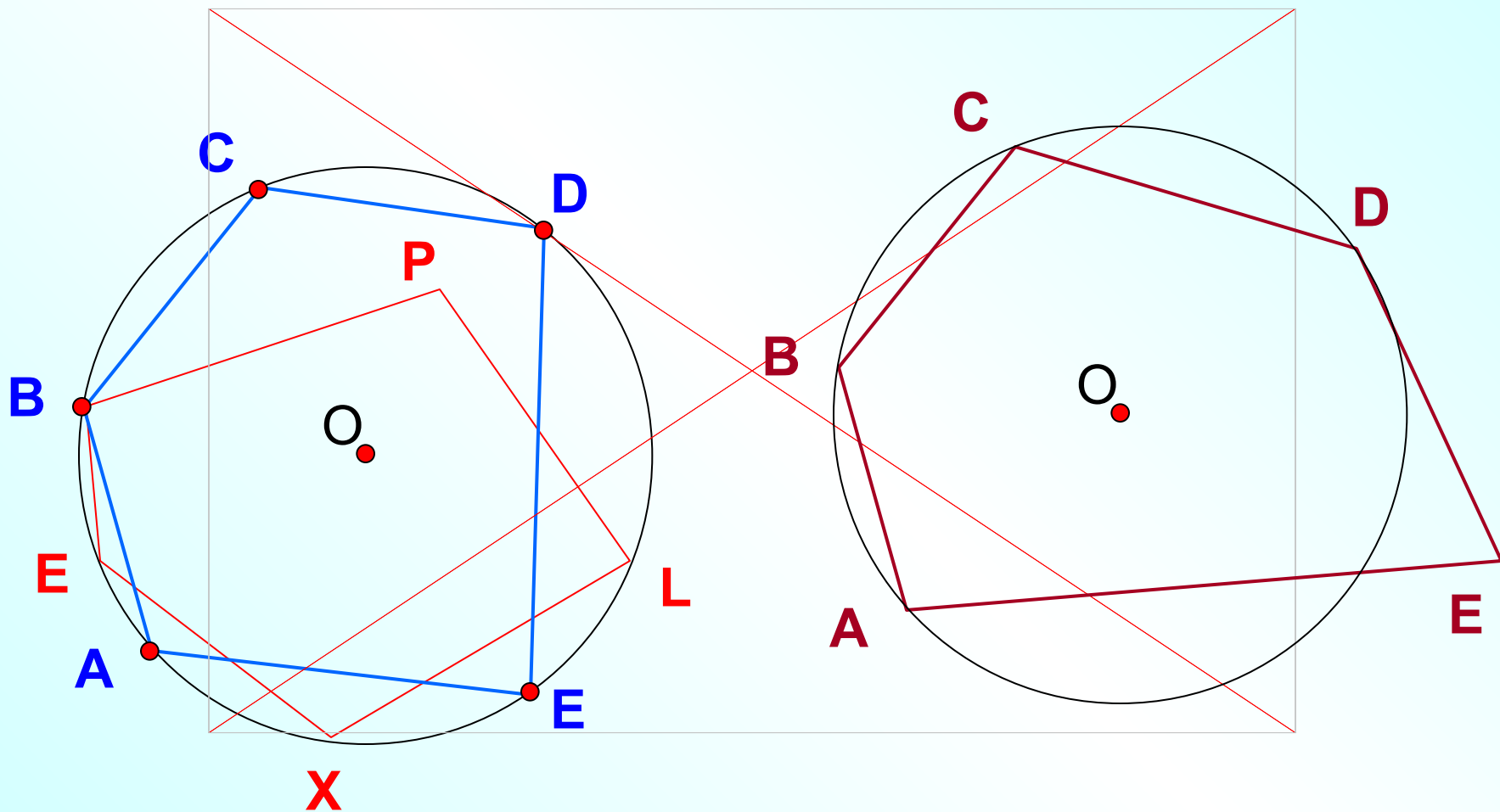


Теорема

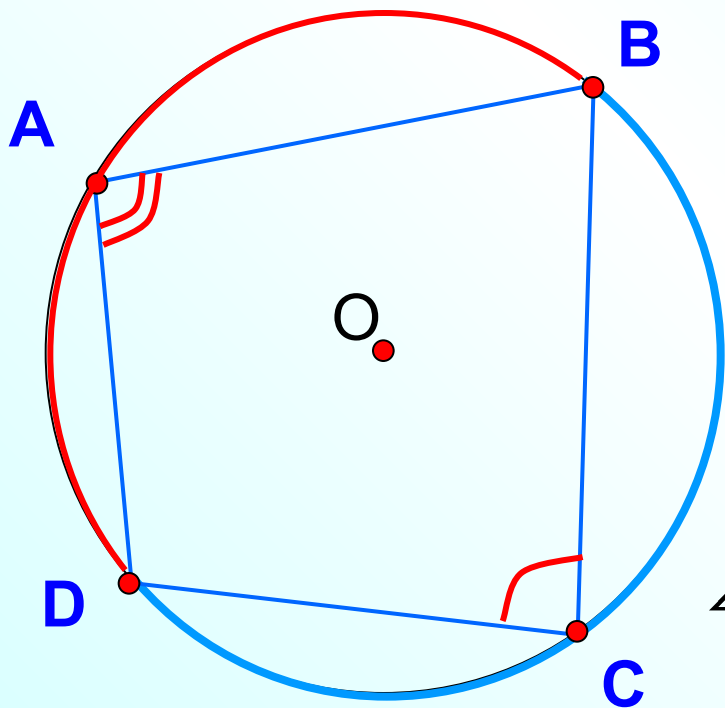
Около любого треугольника
можно описать
окружность.



Какой из многоугольников, изображенных на рисунке является вписанным в окружность?



В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° .



$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$$

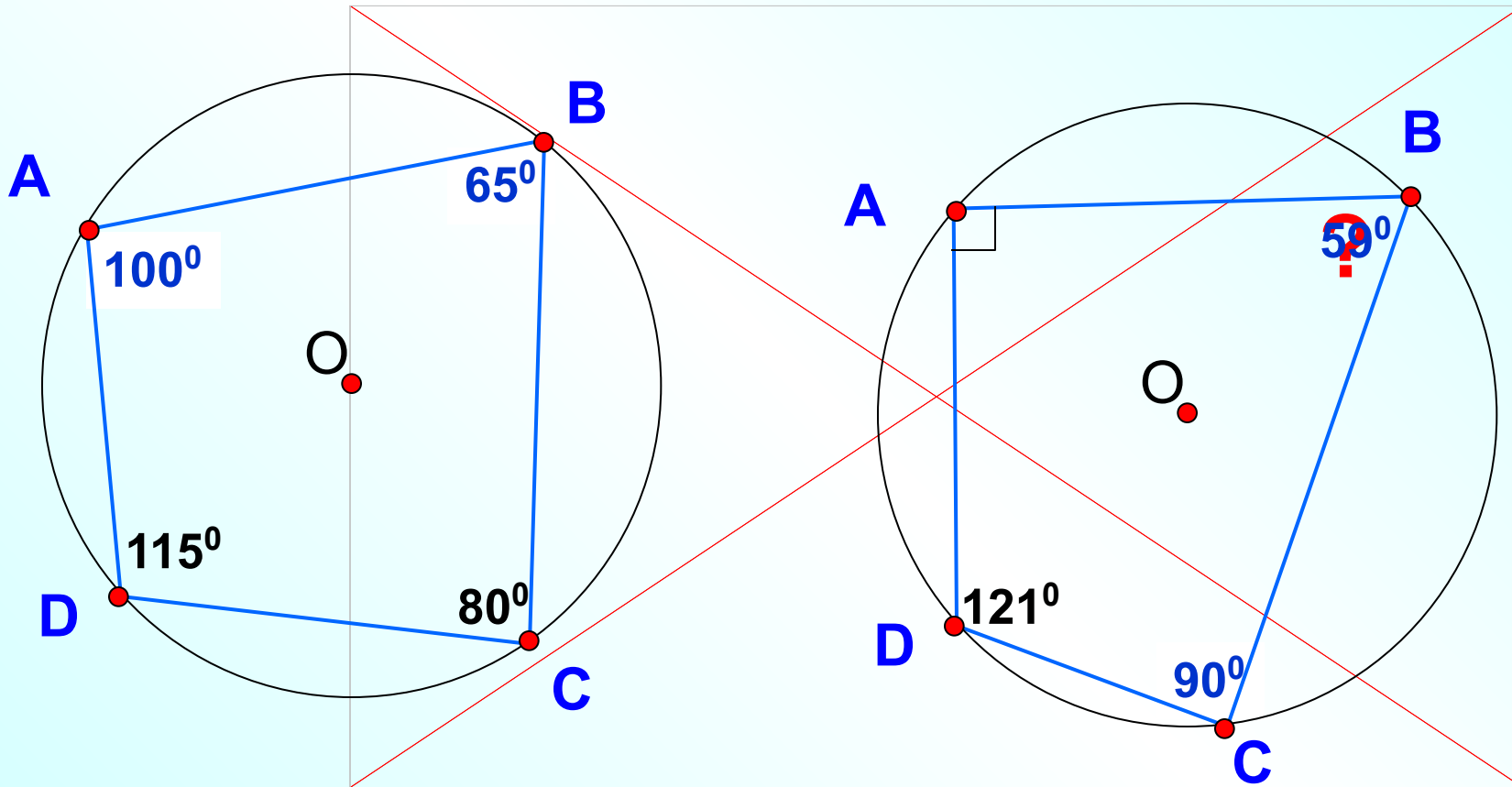
+

$$\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD)$$

$$\angle A + \angle C = 180^{\circ}$$

Найти неизвестные углы четырехугольников.



Верно и обратное утверждение.

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно вписать окружность.

