Тема 5. Облигации

1. Основные понятия

По источникам финансирования **финансовые средства** компании делятся на:

собственные, заемные, привлеченные и государственные.

Облигации – один из видов **заемных** средств (помимо кредитов).

Облигации выпускаются эмитентом для заимствования денежных средств.

В качестве **эмитента** могут выступать: государство, муниципалитет, корпорации, финансовые или коммерческие учреждения.

Облигация – это ценная бумага, свидетельствующая о предоставлении займа на фиксированный, обычно длительный срок, и обеспечивающая ее обладателю оговоренный доход.

Облигацию характеризуют следующие **параметры:**

- **срок погашения** (n)
- **номинальная стоимость** (N) – сумма денег, выплачиваемая владельцу на дату погашения. Номинальная стоимость обычно указывается на самой облигации.
- **купонный доход** (C) – постоянные платежи, которые выплачиваются владельцу ежегодно по купонной ставке
- **купонная ставка** (норма дохода) c =C/N

и другие

Если по облигации предполагается периодическая выплата доходов в виде процентов, то производится она по купонам.

Купон представляет собой **вырезной талон** с напечатанной на нем цифрой купонной ставки.

Факт выплаты годового дохода отмечается изъятием купона из прилагающейся к облигации карты. Отсюда расхожий «штамп» — «стричь купоны», т.е. богатеть.

2. Текущая стоимость облигации

С каждой облигацией связан поток платежей, состоящий из ежегодной выплаты купонного дохода и выплаты номинальной стоимости на дату погашения.

Поэтому в момент времени t можно говорить о **текущей стоимости P** облигации.

Пусть **r – ставка рефинансирования** (процентная ставка), а до погашения облигации осталось **n лет**.

Тогда текущая стоимость равна:

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}$$

Пример.

Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 ден. ед., сроком погашения пять лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15% при годовой процентной ставке 20%.

Дано:
N = 1000
n= 5
c = 0,15
r = 0,2
P =?
Решение:

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} = 150\frac{1-1{,}2^{-5}}{0{,}2} + 1000 * 1{,}2^{-5} = 850{,}47 \text{ ден ед}$$

Таким образом, текущая стоимость облигации P = 850,47 ден. ед., что меньше номинальной стоимости.

3. Текущая доходность облигации

Потенциальный инвестор, инвестирующий в облигации, должен сделать **выбор** между многими имеющимися на рынке облигациями.

Для этого он должен сравнить **параметры** различных облигаций, в качестве которых могут выступать различные показатели:

текущая доходность,

доходность к погашению,

средний срок поступления дохода,

дюрация,

модифицированная дюрация,

выпуклость

и др.

После выпуска облигации она поступает на рынок, где свободно продается и покупается по **рыночной цене V**, которая не совпадает с текущей стоимостью P.

Отношение рыночной цены облигации V к номиналу N называется **курсом облигации (К):**

$$К = \frac{V}{N} \cdot 100$$

Если рыночная цена больше номинала , то разница V – N= J называется **премией.**

Если рыночная цена меньше номинала , то разница N – V= I называется **дисконтом.**

Текущая доходность облигации **(i)** равна отношению купонных выплат (cN=C) к рыночной цене облигации V:

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{C}{V}$$

Пример. Пусть курс облигации равен 105, купонная ставка 15 %. Требуется найти текущую доходность облигации.

Дано:

c =0,15

K =105

Найти: *i*

Решение:

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{cN}{KN/_{100}} = \frac{100c}{K} = \frac{15}{105} = 0{,}1428 = 14{,}28\%$$

Т.о., текущая доходность облигации равна 14,28 %.

Задача 1.

Рыночная цена 15-процентной облигации номиналом 7500 руб. за два года до погашения равна 7800 руб.

Найдите текущую стоимость облигации при процентной ставке :

а) 11%,

б) 15%,

в)17 %

и ее курс.

Дано:

c = 15 %

N = 7500 руб.

n = 2

V= 7800 руб.

а) r = 11 %, б) r = 15 %, в) r = 17 %

P =?

K=?

Решение:

а) $P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} = 0{,}15 * 7500\frac{1-1{,}11^{-2}}{0{,}11} + 7500 * 1{,}11^{-2} =$ $\mathbf{8013,76}$ ден ед

б) $P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} = 0{,}15 * 7500\frac{1-1{,}15^{-2}}{0{,}15} + 7500 * 1{,}15^{-2} =$ $\mathbf{7500}$ ден ед

в) $P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} = 0{,}15 * 7500\frac{1-1{,}17^{-2}}{0{,}17} + 7500 * 1{,}17^{-2} =$ $\mathbf{7262,22}$ ден ед

$$K = \frac{V}{N} \cdot 100 = \frac{7800}{7500} \cdot 100 = \mathbf{104}$$

Задача 2.

Рыночная цена облигации составляет 4000 у.е.,
номинальная стоимость равна 2500 у.е.,
срок до погашения – 5лет,
купонные ежегодные платежи – 700 у.е.,
процентная ставка- 10 %.
Стоит ли продать облигацию и почему?

Дано:

V= **4000** у.е.

N= 2500 у.е.

n= 5

C = 700 у.е.

r = 0,1

Сравнить рыночную и текущую стоимость.

Решение:

c= C/N = 700/2500 = 0,28

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} = 0{,}28 * 2500\frac{1-1{,}1^{-5}}{0{,}1} + 2500 * 1{,}1^{-5} = \mathbf{4205{,}89} \text{ ден ед}$$

текущая стоимость P > рыночной цены V –продавать не стоит

4. Доходность облигации к погашению

Текущая доходность облигации *i* с точки зрения оценки эффективности инвестирования имеет существенный недостаток, т.к. не учитывает вторую часть дохода по облигациям – изменение стоимости облигации к концу ее срока.

Более важным показателем является

доходность к погашению - *ρ*.

Ее можно определить по формуле:

$$\rho \approx \frac{2(cn + 1 - K)}{K - 1 + n(1 + K)}$$

Рыночная цена облигации V, выраженная

$$V = N\frac{c+(\rho-c)(1+\rho)^{-n}}{\rho}$$

Свойства облигаций:

1. Рыночная цена облигации ***V*** равна ее номинальной стоимости ***N*** ***,*** тогда и только тогда, когда доходность к погашению ***ρ*** равна купонной ставке ***с.***

(V=N при ρ=с)

2. Рыночная цена облигации ***V*** больше ее номинальной стоимости ***N*** ***,*** тогда и только тогда, когда доходность к погашению ***ρ*** меньше купонной ставки ***с.***

(V>N при ρ<с)

3. Рыночная цена облигации ***V*** меньше ее номинальной стоимости ***N*** ***,*** тогда и только тогда, когда доходность к погашению ***ρ*** больше купонной ставки ***с.***

(V<N при ρ>с)

Пример. Как определить доходность к погашению облигации со сроком обращения восемь лет,
номинальной стоимостью 3000 ден. ед.
и купонной ставкой 8%, если:

1) Она продается за 3000 ден. ед.
2) Ее рыночная цена увеличится на 10 %.
3) Ее рыночная цена уменьшится на 5 %

Решение.

1) В этом случае облигация продается по номиналу, поэтому доходность к погашению равна купонной ставке

ρ=c= 8 %

2) Дано:

n = 8 лет

N = 3000 д.ед.

c = 8%

V увеличится на 10%

$\rho = ?$

Решение:

V увеличится на 10%, т.е. станет 3300 д.ед.

V = 3300

$$К = \frac{V}{N} = \frac{3300}{3000} = 1{,}1$$

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08*8+1-1{,}1)}{1{,}1-1+8(1+1{,}1)} = 0{,}0639 = 6{,}39\% < \mathbf{c} = 8\%$$

3) V уменьшится на 5%

Решение:

V = 3000*0.95=2850 д.ед.

$$К = \frac{V}{N} = \frac{2850}{3000} = 0{,}95$$

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08*8+1-0{,}95)}{0{,}95-1+8(1+0{,}95)} = 0{,}0887 = 8{,}87\% > \mathbf{c} = 8\%$$

Задача 3

Найти доходность к погашению облигации со сроком обращения 10 лет и номинальной стоимостью 1000 у.е. , купонные выплаты по которой составляют 50 у.е. ежегодно, если облигация продается по 900 у.е.

Дано:

$n = 10$

$N = 1000$

$C=50$

$V = 900$

$\rho = ?$

Решение:

$c = C/N = 50/100 = 0{,}05$

$K = V/N = 900\,/1000 =0{,}9$

$$\rho \approx \frac{2(cn + 1 - K)}{K - 1 + n(1 + K)} = \frac{2(0{,}05 * 10 + 1 - 0{,}9)}{0{,}9 - 1 + 10(1 + 0{,}9)} = 0{,}0634 = 6{,}34\%$$

5. Средний срок поступления дохода

Кроме доходности облигации необходимо также уметь оценивать ее **риск**, связанный со сроком облигации: чем больше срок до погашения, тем выше риск.

Помимо непосредственно сроков надо учитывать **распределение доходов во времени**. Для такого рода оценки облигации вводят средний срок поступления дохода от облигации.

Средний срок поступления дохода – это средняя взвешенная величина всех видов поступлений (доходов) от облигации.

В качестве весов берутся суммы поступлений (доходов).

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

S_i –сумма дохода

n – срок облигации

t_i – сроки поступления купонных доходов

Средний срок поступления дохода:

$$T = \frac{\frac{c(n+1)}{2} + 1}{c + \frac{1}{n}}$$

Если купоны оплачиваются **p - раз в году**, то средний срок поступления дохода определяется выражением:

$$T = \frac{\frac{c(n + \frac{1}{p})}{p} + 1}{c + \frac{1}{n}}$$

Чем **меньше средний срок**, тем скорее владелец облигации получает от нее отдачу и, следовательно, **тем меньше риск.**

Пример.

Купонный доход 15-летней облигации номиналом 1500 руб. равен 17 % годовых (выплаты в конце года). Найти средний срок поступления дохода от облигации.

Решение.

$$\mathrm{T} = \frac{\frac{c(n+1)}{2}+1}{\mathrm{c}+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{0{,}17 * 16}{2}+1}{0{,}17+\frac{1}{15}} = 9{,}97 \approx 10 \text{ лет}$$

6. Дюрация облигации

Дюрация — это время через которое владелец облигации возместит все траты сделанные при покупке облигации.

Дюрация похожа на срок погашения, но отличается от него тем, что учитывает выплаты по купонам.

Поэтому дюрация облигации меньше срока её погашения.

Чем **больше** время **дюрации,** тем **больше риски** покупки облигации.

Для оценки дюрации **потока платежей** применяют формулу:

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k$$

w_k – весовые коэффициенты, определяющие вес каждого платежа R_k в текущей стоимости всего потока:

$$w_k = \frac{R_k(1+r)^{-t_k}}{P}$$

P - текущая стоимость потока платежей относительно процентной ставки r:

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+r)^{-t_k}$$

t_k – сроки поступления платежей

n - срок облигации

r – процентная ставка

поток платежей: $\{(t_1, R_1), (t_1, R_1), \ldots, \}(t_n, R_n)$.

Пример. Найти дюрацию потока платежей $\{(100,1),(200,2),(300,3),(400,4)\}$ при процентной ставке r=12%.

Решение.

Найдем текущую стоимость платежей:

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+r)^{-t_k} = 100(1+0{,}12)^{-1} + 200(1+0{,}12)^{-2}$$

$$+ 300(1+0{,}12)^{-3} + 400(1+0{,}12)^{-4} = 716{,}47$$

$$w_k = \frac{R_k(1+r)^{-t_k}}{P}$$

$$w_1 = \frac{100(1+0{,}12)^{-1}}{716{,}47} = 0{,}125$$

$$w_2 = \frac{200(1+0{,}12)^{-2}}{716{,}47} = 0{,}223$$

$$w_3 = \frac{300(1+0{,}12)^{-3}}{716{,}47} = 0{,}298$$

$$w_4 = \frac{400(1+0{,}12)^{-4}}{716{,}47} = 0{,}355$$

Дюрация:

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k = 0{,}125 * 1 + 0{,}223 * 2 + 0{,}298 * 3 + 0{,}355 * 4 = 2{,}885 \text{ года}$$

7. Свойства дюрации

1. Для бескупонной облигации (c=0) дюрация совпадает со сроком погашения:

D = n

2. Для относительного изменения цены облигации $\frac{\Delta V}{V}$ при изменении доходности к погашению на $\Delta\rho$ справедлива приближенная формула:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho$$

3. Дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и выражается формулой:

$$D = \frac{1+\rho}{\rho} - \frac{n(c-\rho)+1+\rho}{c((1+\rho)^n-1)+\rho}$$

4. Если облигация продается по номиналу, т.е. $c = \rho$, то

$$D = \frac{1+\rho}{\rho}(1-(1+\rho)^{-n})$$

Пример 1. (на 2 свойство)

Дюрация облигации равна D = 10. Известно, что ее доходность к погашению увеличилась с 12 до 13, 5 %.

На сколько процентов изменилась цена облигации?

Решение: по формуле (2)

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+\rho}\Delta\rho = -\frac{10}{1+0{,}12}1{,}5\% = -13{,}39\ \%$$ - цена облигации уменьшилась на 13,39 %.

Пример 2. (на 4 свойство)

Облигация продается по номинальной стоимости со сроком погашения 10 лет и купонной ставкой 11% (с ежегодной выплатой). Найдите дюрацию облигации.

Дано:

n = 10

c = ρ = 0,11

D = ?

Решение: по формуле (4)

$$D = \frac{1+\rho}{\rho}\left(1-(1+\rho)^{-n}\right) = \frac{1+0{,}11}{0{,}11}\left(1-(1+0{,}11)^{-10}\right) =$$

6,54 года

8. Иммунизация портфеля облигаций

Иммунизация портфеля облигаций – это такое управление портфелем, которое позволяет сохранять уровень его доходности на протяжении некоторого периода, несмотря на скачки рыночной процентной ставки.

Теорема об иммунизации

Предположим, что необходимо выплатить **долг R** ровно через **n лет.**

Дюрация такого платежа равна **n** (свойство 1).

Один из способов оплаты долга состоит в покупке бескупонной t-годичной облигации номинальной стоимостью N=R под годовую процентную ставку r.

Покупка этой облигации обойдется в

$P=N/(1+r)^t$ - текущая стоимость.

Теорема: существует возможность **замены** одной облигации двумя так, что при данной процентной ставке текущая стоимость не меняется, а при изменении процентной ставки только увеличивается.

Для иммунизации используют следующую систему уравнений:

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$t_1 w_1 + t_2 w_2 = t$$

где t_1 и t_2 - сроки погашения двух бескупонных облигаций

w_1 и w_2 - веса текущих стоимостей этих акций

Пример.

Построить портфель из трехлетней и пятилетней облигаций, иммунизирующий четырехлетнюю облигацию номинальной стоимостью 3000 у.е. для процентной ставки 15%.

Дано:

$N = 3000$ у.е. $t = 4$ года

$t_1=3$

$t_2=5$

$r = 0,15$

Найти: $N1 = ?$ $N2 = ?$

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ t_1 w_1 + t_2 w_2 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ 3w_1 + 5w_2 = 4 \end{cases}$$

Откуда находим

$w_1=1-w_2$

$3(1-w_2)+5w_2=4$

$3 - 3 w_2+5w_2=4$

$2w_2=1$

$\underline{w_2=1/2, \quad w_1=1/2}$

Определим текущие стоимости облигаций:

$P=N/(1+r)^t$ - текущая стоимость.

$P=N/(1+r)^t = 3000/(1+0,15)^4= 1715,26$

$P_1 = w_1P = 0,5 * 1715,26 = 857,63$

$P_2 = w_2P = 0,5 * 1715,26 = 857,63$

Найдем номинальные стоимости облигаций, входящих в портфель:

$P=N/(1+r)^t$

$N_1 = P_1 * (1+r)^{t1} = 857{,}63 * (1+0{,}15)^3 = 1304{,}35$

$N_2 = P_2 * (1+r)^{t2} = 857{,}63 * (1+0{,}15)^5 = 1725$

Т.о., иммунизирующий портфель состоит из трехлетней облигации номинальной стоимостью 1304,35 у.е. и пятилетней номиналом 1725 у.е.

Можно проверить, что при изменении процентной ставки текущая стоимость портфеля будет выше.

Пример.

Пусть процентная **ставка понизилась** и стала r = 10%.

Найдем текущие стоимости облигаций:

Для четырехлетней облигации номиналом 3000 у.е. :

$P=N/(1+r)^t$ = $3000/(1+0,1)^4$= **<u>2049,04</u>**

Для двух облигаций (трехлетней и пятилетней) номиналом 1304,35 и 1725 у.е.

$P_1=N_1/(1+r)^{t1}$ = $1304,35/(1+0,1)^3$= 979,98

$P_2=N_2/(1+r)^{t2}$ = $1725/(1+0,1)^5$= 1071,09

$P_1 + P_2$ = **<u>2051,07 – увеличилась текущая стоимость портфеля</u>**

Пример.

Пусть процентная **ставка повысилась** и стала r = 20%.

Найдем текущие стоимости облигаций:

Для четырехлетней облигации номиналом 3000 у.е. :

$P=N/(1+r)^t = 3000/(1+0,2)^4=$ <u>**1446,76**</u>

Для двух облигаций (трехлетней и пятилетней)

номиналом 1304,35 и 1725 у.е.

$P_1=N_1/(1+r)^{t1} = 1304,35/(1+0,2)^3= 754,83$

$P_2=N_2/(1+r)^{t2} = 1725/(1+0,2)^5= 693,24$

$P_1 + P_2 =$ <u>**1448,07 – увеличилась текущая стоимость портфеля**</u>

9. Доходность портфеля облигаций

Доходность портфеля рассчитывается по следующей формуле:

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k}$$

Где q_k – количество облигаций вида k ,

K_k – курс облигации вида k.

Пример.

Найти доходность портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 10 и 20 штук с доходностями 30 и 40 % и курсами 102 и 110 соответственно.

Решение.

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k} = \frac{0,3 * 10 * 102 + 0,4 * 20 * 110}{10 * 102 + 20 * 110} = 0,3683$$

Т.о., доходность портфеля облигаций равна 36,83%.

Задача 4

Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 100, 150 и 190 штук с доходностями 10, 23 и 50% и курсами 97, 115 и 104 соответственно.

Решение:

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k} = \frac{100 * 0{,}10 * 97 + 150 * 0{,}23 * 115 + 190 * 0{,}50 * 104}{100 * 97 + 150 * 115 + 190 * 104} = 0{,}3172$$

$$= 31{,}72\%$$

10. Средний срок поступления дохода портфеля облигаций

Средний срок поступления дохода портфеля облигаций в целом **T_0** находится как средняя взвешенная величина сроков поступления доходов от каждой облигации.

В качестве весов берутся стоимости облигаций.

$$T_0 = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k}$$

где T_k – средний срок поступления дохода облигаций вида k.

Пример.

Найти средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 100 и 150 штук со средними сроками поступления 3,5 года и 5 лет и ценами 920 и 1100 руб. соответственно.

Решение.

$$\mathrm{T}_0 = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k} = \frac{3{,}5 * 100 * 920 + 5 * 150 * 1100}{100 * 920 + 150 * 1100} = 4{,}46 \text{ года}$$

Т.о., средний срок поступления дохода составляет примерно 4,5 года.

11. Дюрация портфеля облигаций

Дюрация портфеля из **m** облигаций вычисляется по формуле:

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k}$$

где D_k - дюрация k-ой облигации.

Пример.

Найти дюрацию портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 10 и 15 штук с дюрациями 4 года и 5 лет и ценами 950 и 1000 руб. соответственно.

Решение.

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \frac{4 * 10 * 950 + 5 * 15 * 1000}{10 * 950 + 15 * 1000} = 4{,}6 \text{ года}$$

Т.о., дюрация портфеля облигации равна 4,6 года.

Задача 5.

Найти дюрацию портфеля облигаций, состоящего из трех
Видов облигаций по 225,300 и 445 штук
с дюрациями 2 года, 4 года и 6 лет
и ценами 750, 1400 и 550 руб. соответственно.

Задача 5.

Найти дюрацию портфеля облигаций, состоящего из трех

Видов облигаций по 225,300 и 445 штук

с дюрациями 2 года, 4 года и 6 лет

и ценами 750, 1400 и 550 руб. соответственно.

Решение.

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \frac{2 * 225 * 750 + 4 * 300 * 1400 + 6 * 445 * 550}{225 * 750 + 300 * 1400 + 445 * 550} = 4{,}18 \text{ года}$$

Т.о., дюрация портфеля облигации равна 4,18 года.