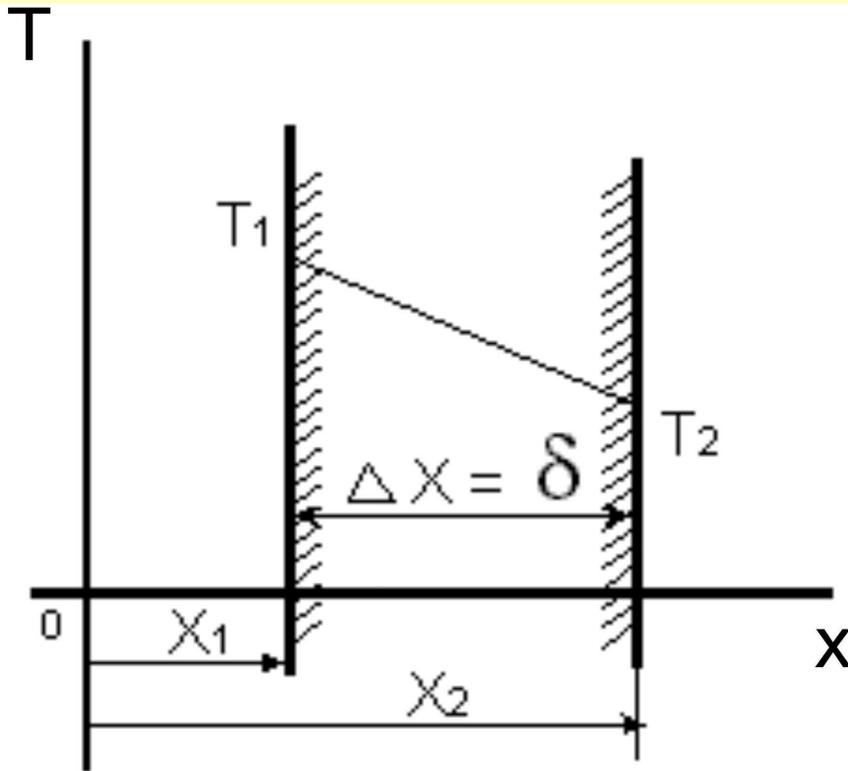


ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Если плоское тело (пластина) имеет толщину δ , значительно меньшую двух других характерных размеров, можно пренебречь отводом и подводом тепла через торцы, считая, что **тепловой поток направлен перпендикулярно поверхности пластины**



Задача является пространственно-одномерной, а следовательно, температурное поле зависит только от одной координаты x :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Плоская стенка. Термическое сопротивление

При отсутствии объемного тепловыделения ($q_v = 0$) и $\lambda = \text{const}$ уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{Q_v}{c\rho}$$

имеет вид:
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Закон распределения температур по толщине стенки после интегрирования:

$$T = C_1 x + C_2$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Видно, что **распределение температур в стенке соответствует линейному закону**. Изотермические поверхности представляют собой плоскости, параллельные поверхностям стенки и нормальные к оси x .

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Определим константы интегрирования исходя из граничных условий первого рода:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, T &= T_1 \\ \text{при } x = \delta, T &= T_2 \end{aligned}$$

T_1 - температура более нагретой стенки, T_2 - температура более холодной стенки $T_1 > T_2$

Подставим условия в уравнение:

$$T_1 = C_2 \quad T_2 = C_1 \delta + T_1$$

Окончательно:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\delta} x + T_1$$

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Для определения количества тепла, проходящего через элемент стенки в единицу времени ($dt = 1$), воспользуемся **законом Фурье**:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS$$

Поскольку:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}$$

Следовательно:

$$dQ = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\delta} dS = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\delta} dS$$

Для участка поверхности площадью S :

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (T_1 - T_2) S$$

Плоская стенка. Термическое сопротивление

Обозначим $T_1 - T_2 = \Delta T$, тогда

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T S$$

Количество тепла, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, определяется соотношением:

$$q = \frac{Q}{S} = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T$$

Отношение λ/δ обычно называют тепловой проводимостью стенки, а обратная величина δ/λ – сопротивлением теплопроводности стенки.

Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

К **объемному тепловыделению** можно отнести следующие явления: конденсация, нагревание, ядерные реакции и др.

Основное уравнение будет иметь вид:

$$a \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q_V}{c\rho} = 0$$

Принимая во внимание, что $a = \lambda(c\rho)$:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q_V}{\lambda} = 0$$

Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

Считая $Q_v = \text{const}$, после первого интегрирования получаем:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{Q_v}{\lambda}x + C_1$$

После второго:

$$f(x) = -\frac{Q_v x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий

Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

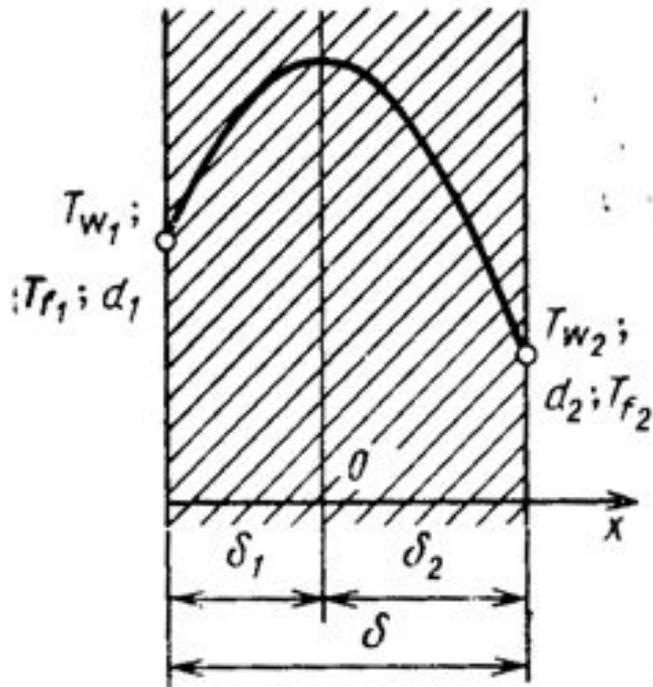


Схема распределения температур в пластине при объемном тепловыделении

Решение принимает простой вид в случае симметричного теплосъема с пластины, т.е. когда: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $T_{f1} = T_{f2} = T_f$. Очевидно, что $\delta_2 = \delta/2$

$$T(x) = -\frac{Q_V}{2\lambda} \left[\left(\frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right] + \frac{Q_V \delta}{2\alpha} + T_f$$

Максимальная температура:

$$T_{\max} = -\frac{Q_V \delta^2}{8\lambda} + \frac{Q_V \delta}{2\alpha} + T_f$$

При постоянных Q_V и δ будет тем больше, чем меньше теплопроводность пластины λ и чем хуже теплоотдача с ее поверхности, т.е. чем меньше α

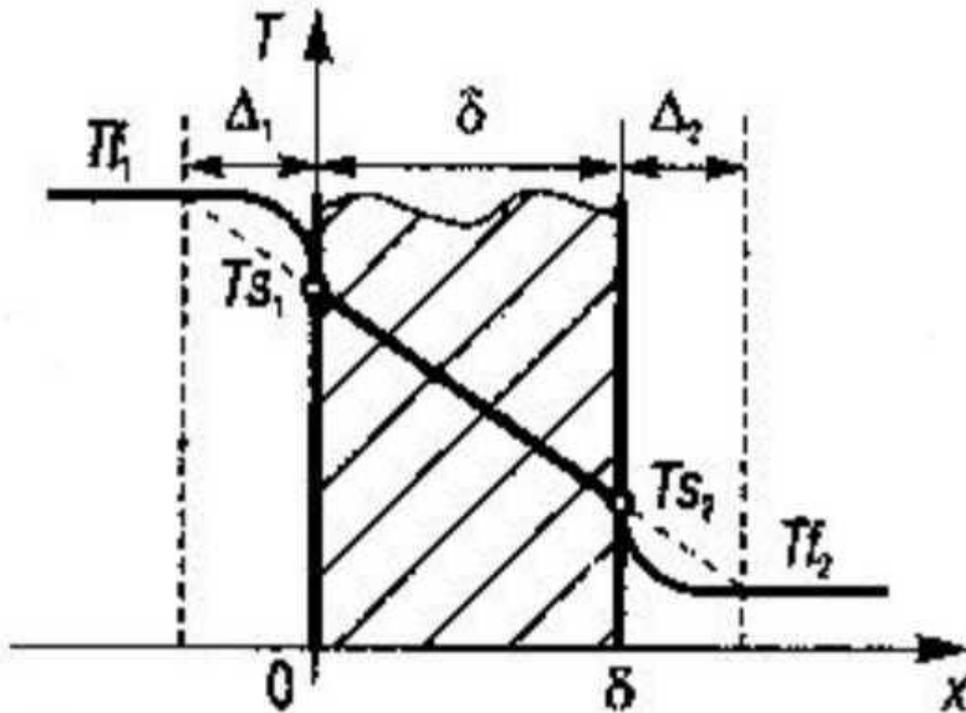
Плоская стенка. Теплопроводность при объемном тепловыделении

Температура на поверхности пластины $x = \delta/2$:

$$T_w = -\frac{Q_V \delta}{2\lambda} + T_f$$

также растет с ухудшением теплоотдачи.

Теплопередача между двумя жидкостями через разделяющую их стенку. Коэффициент теплопередачи



Определим тепловой поток q от жидкости с температурой T_{f1} к жидкости с температурой T_{f2} через твердую стенку. Установлено, что температура жидкости резко меняется в тонком слое у стенки. Этот слой называют пограничным.

В пограничном слое происходит интенсивный перенос теплоты. Для определения теплового потока q необходимо знать распределение температуры по толщине пограничного слоя

$$T = T(x)$$

Теплопередача между двумя жидкостями через разделяющую их стенку. Коэффициент теплопередачи

Обычно величину q определяют по формуле Ньютона:

$$q = \alpha(T_f - T_s)$$

α - коэффициент теплоотдачи. Данная формула удобнее чем:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} grad T$$

Т.к. коэффициент α проще определить экспериментально, чем зависимость $T = T(x)$

Таким образом, тепловой поток на левой стенке: $q = \alpha_1(T_{f1} - T_{s1})$

На правой стенке: $q = \alpha_2(T_{f2} - T_{s2})$

Через стенку: $q = \lambda/\delta (T_{s1} - T_{s2})$

Теплопередача между двумя жидкостями через разделяющую их стенку. Коэффициент теплопередачи

После преобразований получаем:

$$\frac{q}{\alpha_1} = T_{f1} - Ts_1 \quad q \frac{\delta}{\lambda} = Ts_1 - Ts_2 \quad \frac{q}{\alpha_2} = Ts_2 - T_{f2}$$

Складываем почленно левые и правые части:

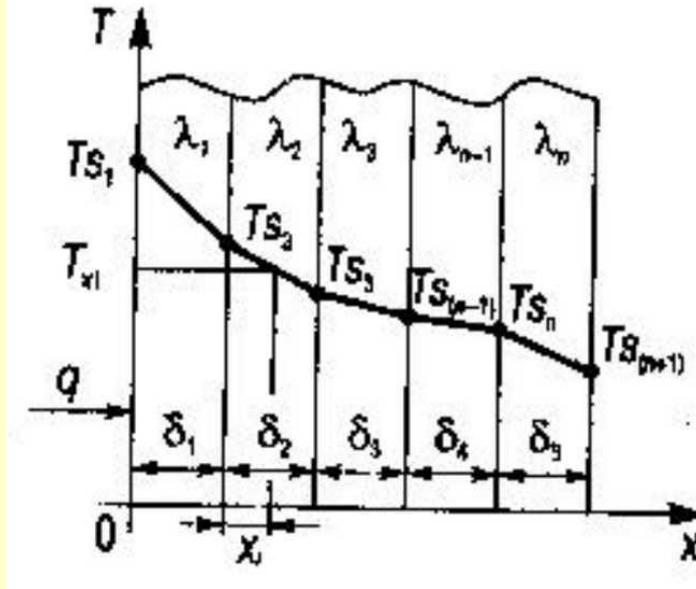
$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = T_{f1} - T_{f2} \quad q = k(T_{f1} - T_{f2})$$

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}$$

k – коэффициент теплопередачи (Вт/м²К), а обратная величина $R = 1/k$ – полное термическое сопротивление (м²К/Вт)

Многослойная плоская стенка

Пусть многослойная стенка состоит из n плотно прилегающих слоев, коэффициенты теплопроводности которых равны $\lambda_1 \dots \lambda_n$, а толщины $\delta_1 \dots \delta_n$.



Поскольку задача стационарная - удельный тепловой поток, проходящий через каждый слой, для всех слоев будет одинаков.

$$q = \frac{\lambda_i}{\delta_i} (T_{S_i} - T_{S_{i+1}})$$

Многослойная плоская стенка

Перепишем эти выражения в виде:

$$q \frac{\delta_i}{\lambda_i} = Ts_i - Ts_{i+1}$$

Произведем почленное сложение: $q \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right) = Ts_1 - Ts_{n+1}$

Отсюда:
$$q = \frac{Ts_1 - Ts_{n+1}}{\sum \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$

Сумма в знаменателе - суммарное сопротивление теплопроводности многослойной стенки.

Многослойная плоская стенка

Иногда вводят в рассмотрение **эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{экв}}$** , который равен коэффициенту теплопроводности фиктивной однослойной стенки, равной толщине многослойной и при условии, что разности температур на границах однослойной и многослойной стенок одинаковы, а количество тепла, проходящее через них в единицу времени, совпадает

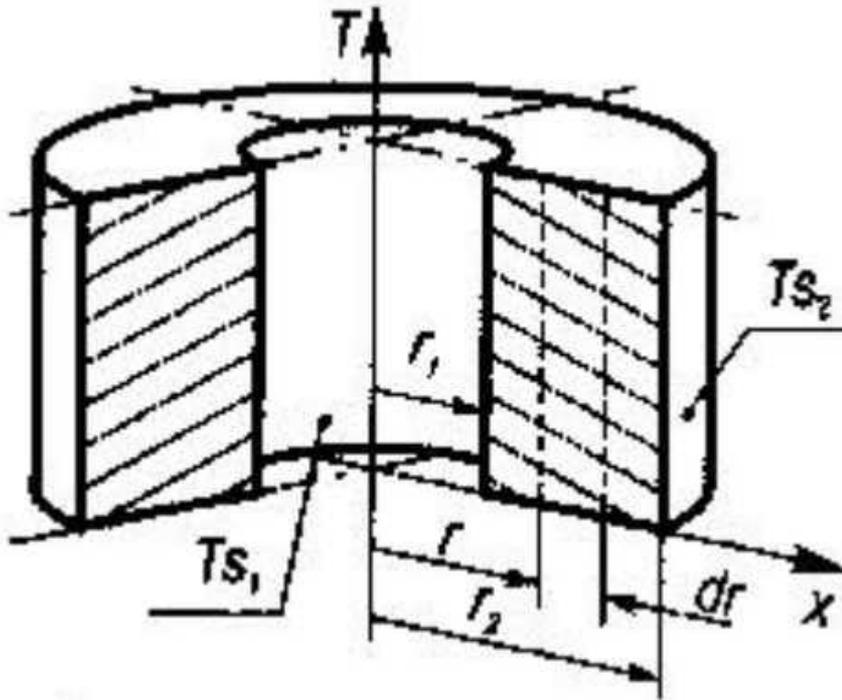
$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\sum \delta_i} (T_{S_1} - T_{S_{n+1}}) \quad \lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum \delta_i}{\sum \delta_i / \lambda_i}$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности позволяет сравнивать теплопроводящие свойства многослойной стенки, составленной из разнородных материалов, с однослойной стенкой, выполненной из однородного материала.

Внутри слоя распределение температуры описывается как:

$$T_{xi} = T_{S_i} - q \frac{x_i}{\lambda_i}$$

Цилиндрическая стенка



Рассмотрим **стационарный процесс теплопроводности в бесконечной цилиндрической стенке.**

Если граничные условия на внутренней ($r = r_1$) и внешней ($r = r_2$) поверхностях не зависят от угла θ и z , то в стационарном случае уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

Цилиндрическая стенка

Пусть заданы граничные условия первого рода:

$$\text{при } r = r_1, T = Ts_1$$

$$\text{при } r = r_2, T = Ts_2$$

Определим распределение температуры по толщине стенки:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

После первого интегрирования: $r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$

После второго интегрирования: $T(r) = C_1 \ln r + C_2$

Цилиндрическая стенка

Находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{Ts_2 - Ts_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad C_2 = Ts_2 - \frac{Ts_2 - Ts_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r_2 = \frac{Ts_1 \ln r_2 - Ts_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Общее решение:

$$T(r) = \frac{Ts_2 - Ts_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln r + \frac{Ts_1 \ln r_2 - Ts_2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{Ts_2 \ln \frac{r}{r_1} + Ts_1 \ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Цилиндрическая стенка

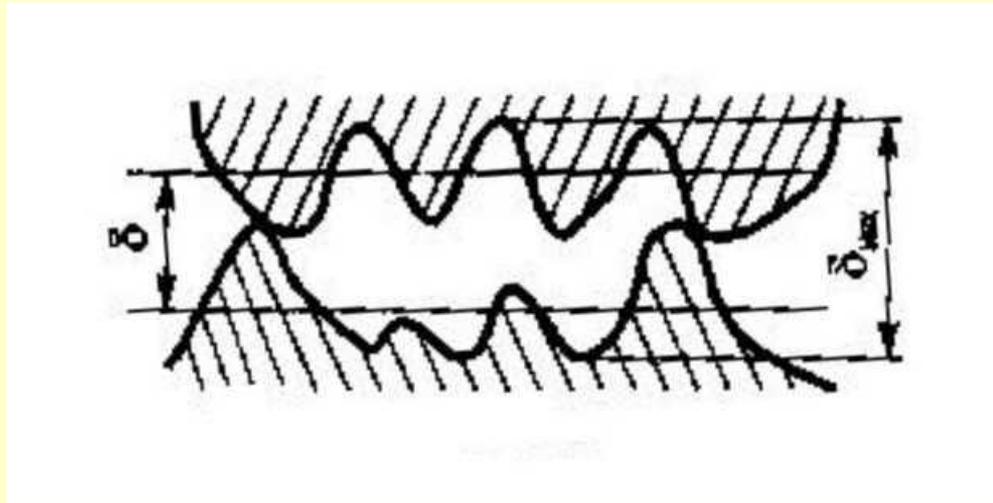
Анализ формулы показывает:

- 1) Удельный тепловой поток в цилиндрической стенке $q = -\lambda dT/dr$ непостоянен по толщине и убывает к внешней поверхности трубы ($dT/dr \sim 1/r$). Это связано с тем, что в стационарных условиях должен быть постоянным полный тепловой поток, проходящий через участок цилиндрической трубы равный qS . Поскольку S увеличивается с радиусом, то тепловой поток должен убывать.
- 2) Температура по толщине цилиндрической стенки изменяется нелинейно - по логарифмическому закону

Количество тепла, проходящее через участок цилиндрической трубы длиной L в единицу времени не зависит от r :

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L = \lambda \frac{T_{s_1} - T_{s_2}}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} 2\pi r L = \lambda \frac{T_{s_1} - T_{s_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} 2\pi L$$

Контактное термическое сопротивление



Идеально плотный контакт между отдельными слоями многослойной стенки получается, если один из слоев наносят на другой в жидком состоянии или в виде текучего раствора. **Твердые тела касаются друг друга вершинами профилей шероховатостей.** Площадь контакта вершин пренебрежимо мала, и весь тепловой поток идет через воздушный зазор. Это создает дополнительное (контактное) термическое сопротивление R_k (кг*К/Дж). Его можно приблизительно оценить, если принять, что толщина зазора между соприкасающимися телами δ в среднем вдвое больше максимального расстояния δ_{\max} между впадинами.

Контактное термическое сопротивление

При контакте двух пластин с шероховатостью поверхности 5-го класса (после чистовой обточки, строгания, фрезерования) $\delta_{\text{макс}} \approx 0,03$ мм и в воздухе комнатной температуры

$$R_k = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1.5 \cdot 10^{-5}}{2.59 \cdot 10^{-2}} = 0.58 \cdot 10^{-3}$$

Это эквивалентно термическому сопротивлению стали толщиной около 30 мм.

Для уменьшения контактного сопротивления необходимо заполнять зазоры каким-либо материалом с более высокой, чем у воздуха, теплопроводностью, например спаять или склеить поверхности