ТЕПЛОМАССООБМЕН

Теплопроводность при стационарном тепловом режиме (часть 1)

Лекция № 3

2016 год

План

- 1. Передача теплоты через однослойную плоскую стенку при граничных условиях I–го рода.
- 2. Передача теплоты через многослойную плоскую стенку при граничных условиях I–го рода.
- 3. Передача теплоты через однослойную цилиндрическую стенку при граничных условиях I–го рода.
- 4. Передача теплоты через многослойную цилиндрическую стенку при граничных условиях I–го рода.
- 5. Передача теплоты через шаровую стенку при граничных условиях I–го рода.
- 6. Теплопроводность тел с внутренними источниками теплоты.

1. Передача теплоты через однослойную плоскую стенку при граничных условиях I–го рода

Дифференциальное уравнение теплопроводности позволяет определить температуру в зависимости от времени и координат в любой точке поля.

Для любого случая к нему надо присоединить необходимые краевые условия.

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку (самый распространенный случай)

- Длина и ширина плоской стенки бесконечно велики по сравнению с ее толщиной δ.

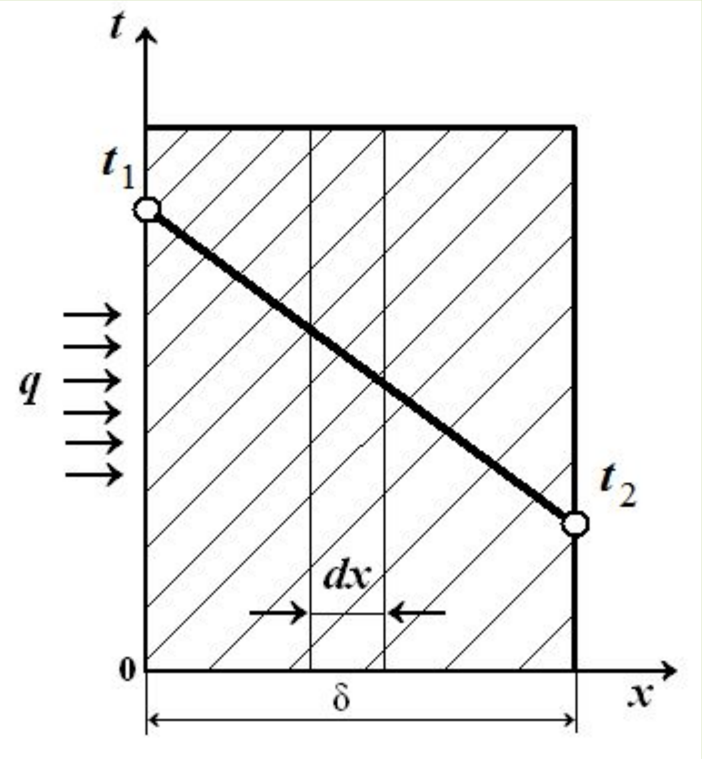
- Стенка имеет постоянную толщину δ.

- Температуры поверхностей стенки t_1 и t_2 поддерживаются постоянными, т.е. они являются изотермическими поверхностями.

- Температура меняется только направлении перпендикулярном плоскости стенки, которое принимаем за ось x.

- Теплопроводность λ постоянна для всей стенки.

- При этих условиях температурное поле в стенке будет одномерным и изотермическими поверхностями будут плоскости, параллельные поверхностям стенки.



- Для слоя толщиной *dx* на основании закона Фурье можно записать следующее уравнение теплопроводности:

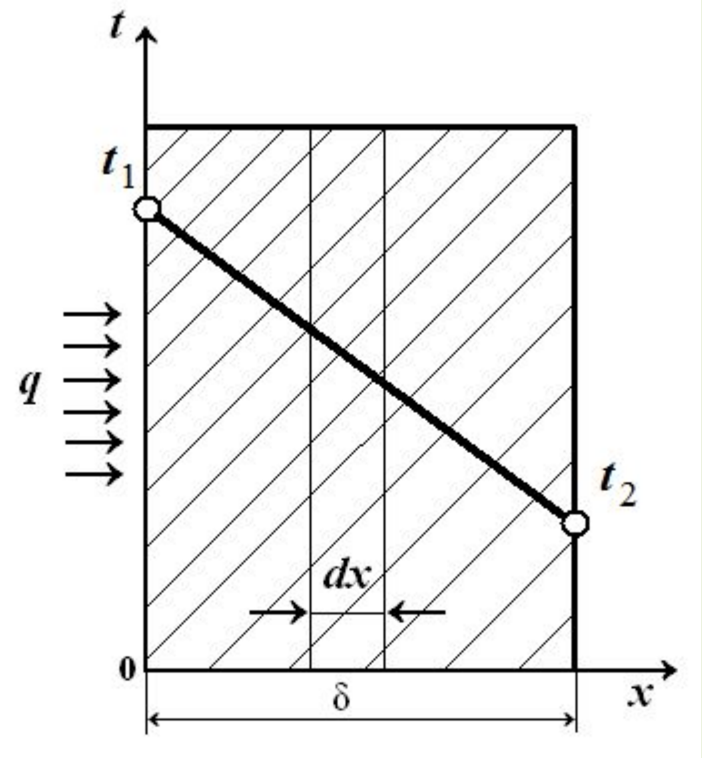
$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}, \quad \text{или} \quad dt = -\frac{q}{\lambda} dx.$$

- Проинтегрировав последнее уравнение, получим

$$t = -\frac{q}{\lambda} x + C.$$

$$t = -\frac{q}{\lambda}x + C.$$

Из этого уравнения следует, что температура изменяется по толщине стенки по линейному закону.



Константа интегрирования C определяется из условий на границах стенки:

если $x = 0$, то $t = t_1$, откуда $C = t_1$.

Если $x = \delta$, то $t = t_2$ и данное уравнение принимает вид

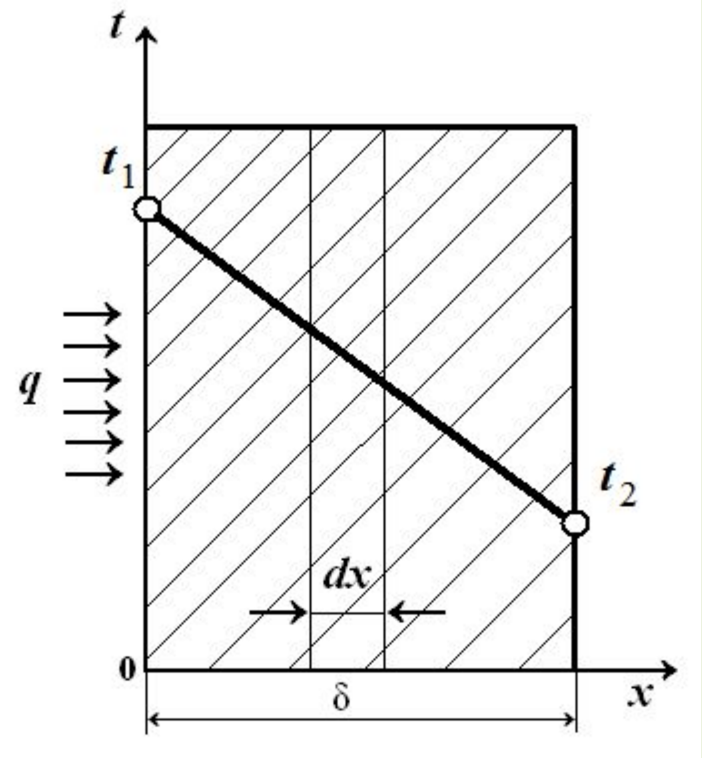
$$t_2 = -\frac{q}{\lambda}\delta + t_1.$$

Из этого уравнения определяем значение мощности теплового потока q:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}\left(t_1 - t_2\right) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta t.$$

Константа интегрирования C определяется из условий на границах стенки:

если $x = 0$, то $t = t_1$, откуда $C = t_1$.



Если $x = \delta$, то $t = t_2$ и данное уравнение принимает вид

$$t_2 = -\frac{q}{\lambda}\delta + t_1.$$

Значение мощности теплового потока q определим из уравнения:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}\left(t_1 - t_2\right) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta t.$$

- Общее **количество теплоты** Q_T, которое передается через поверхность стенки F за время τ:

$$Q_T = \frac{\lambda}{\delta} F \left(t_1 - t_2 \right) \tau,$$

- где $\frac{\lambda}{\delta}$ – тепловая проводимость стенки.

- **Тепловой поток *Q*** зависит не от абсолютного значения температур, от разности температур на наружных поверхностях стенки:

$$Q = qF = \frac{\lambda}{\delta} F\left(t_1 - t_2\right) = \frac{\lambda}{\delta} F\Delta t,$$

- где $\Delta t = \left(t_1 - t_2\right)$ называется температурным напором.

Распределение температур при постоянном и переменном коэффициентах теплопроводности

- Уравнение $q = \dfrac{\lambda}{\delta}\left(t_1 - t_2\right) = \dfrac{\lambda}{\delta}\Delta t$
- справедливо для случая, когда теплопроводность является постоянной величиной.
- Теплопроводность реальных тел зависит от температуры и закон изменения температур выражается кривой линией.
- Если теплопроводность зависит от температуры в незначительной степени, то на практике закон изменения температур считают линейным.

- В уравнение $q = \frac{\lambda}{\delta}(t_1 - t_2) = \frac{\lambda}{\delta}\Delta t$

- Введем поправки на зависимость λ от *t*, считая эту зависимость линейной: $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$.

- Подставим эту зависимость в уравнение Фурье, получаем

$$q = -\lambda(t)\frac{dt}{dx} = -\lambda_0(1 + bt)\frac{dt}{dx}.$$

- Разделив переменные и интегрируя, получаем

$$qx = -\lambda_0\left(t + \frac{bt^2}{2}\right) + C.$$

- При граничных значениях переменных имеем:

 при x=0, t=t_1 и $$0 = -\lambda_0 \left(t_1 + \frac{bt_1^2}{2} \right) + C.$$

 при x=δ, t=t_2 и $$q\delta = -\lambda_0 \left(t_2 + \frac{bt_2^2}{2} \right) + C.$$

- Вычитая из второго равенства первое, находим

$$q = \frac{\lambda_0}{\delta} \left[1 + b\frac{t_1 + t_2}{2} \right] (t_1 - t_2).$$

- Полученное уравнение позволяет определить поверхностную плотность теплового потока при переменной теплопроводности.

Множитель $\lambda_0\left[1+b\left(t_1+t_2\right)/2\right]$ является ***среднеинтегральным значением теплопроводности***.

- В уравнении $q=\dfrac{\lambda}{\delta}\left(t_1-t_2\right)$
- теплопроводность λ была принята постоянной и равной среднеинтегральному значению теплопроводности $\lambda_{ср}$.

$$\lambda_{ср}=\lambda_0\left[1+b\left(t_1+t_2\right)/2\right]$$

- Плотность (мощность) теплового потока можем определить по формуле

$$q=\frac{\lambda_{ср}}{\delta}\left(t_1-t_2\right).$$

- Уравнение температурной кривой в стенке получается путем решения квадратного уравнения

$$qx = -\boldsymbol{\lambda}_0\left(t + \frac{bt^2}{2}\right) + C$$

относительно t и подстановки значения C из уравнения

$$0 = -\boldsymbol{\lambda}_0\left(t_1 + \frac{bt_1^2}{2}\right) + C.$$

$$t_x = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \frac{2qx}{\boldsymbol{\lambda}_0 b}} - \frac{1}{b}.$$

Из данного уравнения следует, что температура внутри стенки изменяется по кривой. Если коэффициент b отрицателен, то кривая направлена выпуклостью вниз; если b положителен, то выпуклостью вверх.

2. Передача теплоты через многослойную плоскую стенку при граничных условиях I–го рода

В тепловых аппаратах часто встречаются стенки, состоящие из нескольких плоских слоев различных материалов.

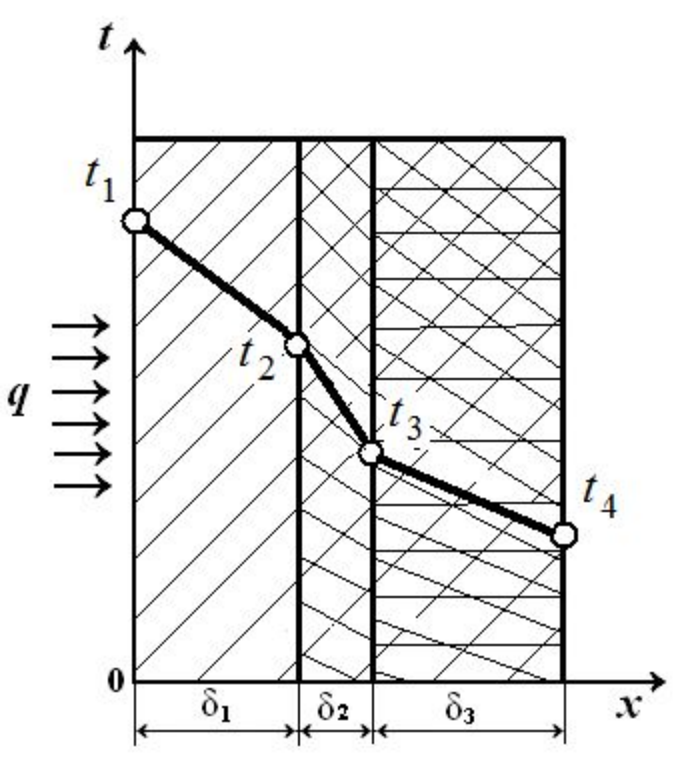
Выведем уравнение для этого случая.

Будем полагать, что все слои плотно прилегают друг к другу.

- ***Выведем расчетную формулу теплопроводности сложной стенки*** при стационарном состоянии из уравнения теплопроводности для отдельных слоев.

- **Тепловой поток**, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же.

- Рассмотрим трехслойную стенку, в которой толщина отдельных слоев равна δ_1, δ_2, δ_3, а их теплопроводность – соответственно λ_1, λ_2, λ_3.



- Температуры наружных поверхностей t_1 и t_4.

- Температуры между слоями t_2 и t_3.

- **Тепловой поток** для каждого слоя:

$$Q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} F\left(t_1 - t_2\right),$$

$$Q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} F\left(t_2 - t_3\right),$$

$$Q = \frac{\lambda_3}{\delta_3} F\left(t_3 - t_4\right),$$

Выразим ***разности температур*** для каждого слоя:

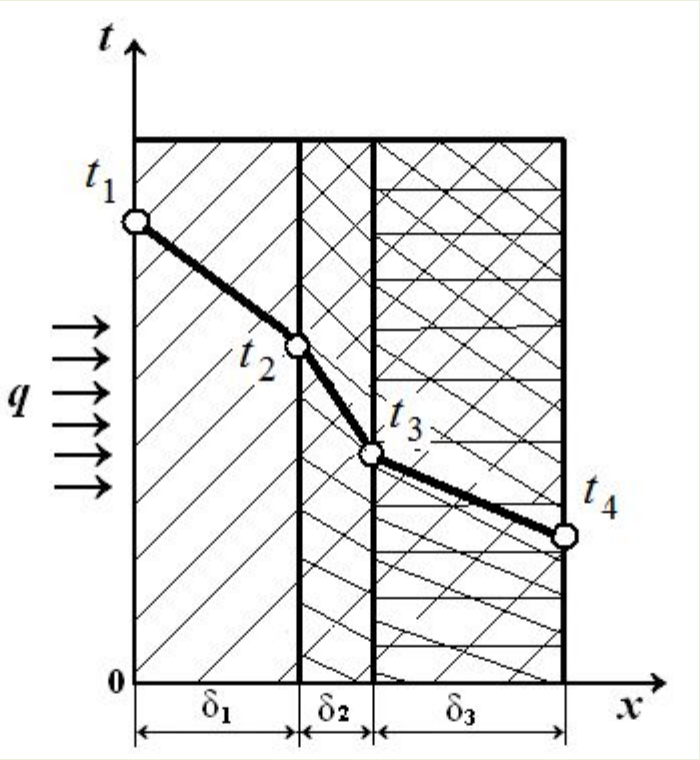
$$\left(t_1 - t_2\right) = \frac{Q}{F} \frac{\delta_1}{\lambda_1},$$

$$\left(t_2 - t_3\right) = \frac{Q}{F} \frac{\delta_2}{\lambda_2},$$

$$\left(t_3 - t_4\right) = \frac{Q}{F} \frac{\delta_3}{\lambda_3},$$

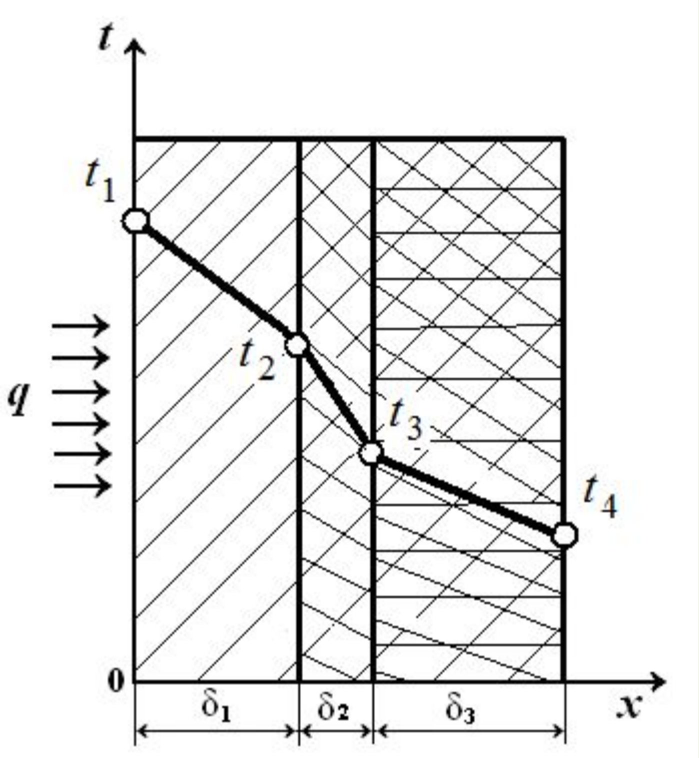
Складывая их, получаем:

$$\left(t_1 - t_4\right) = \frac{Q}{F}\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right) = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right).$$



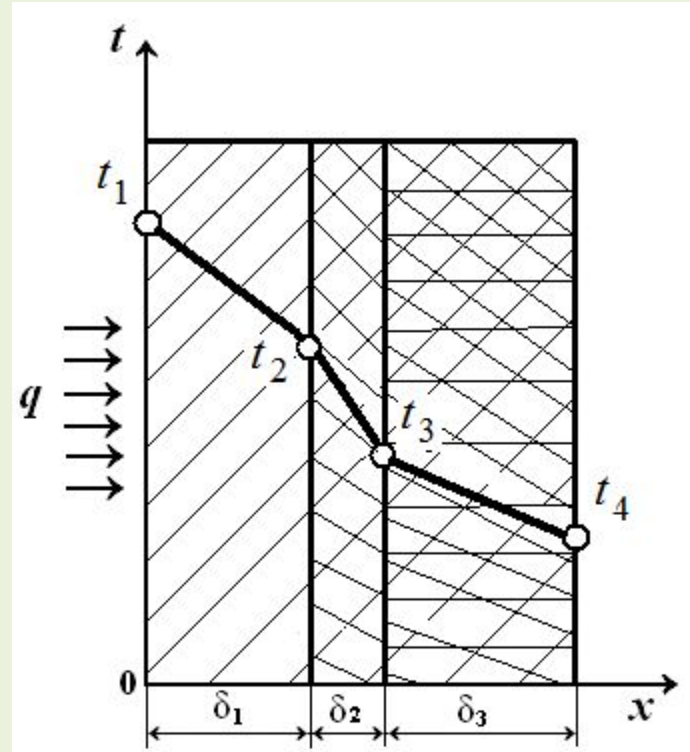
Преобразуем полученное равенство.

Получим формулы определяющие **тепловой поток** и **мощность** (***удельный***) **теплового потока**:



$$Q = \frac{F(t_1 - t_4)}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right)};$$

$$q = \frac{(t_1 - t_4)}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right)} = \frac{\Delta t}{R}.$$



где Δt – температурный перепад, т.е. разность температур наружных поверхностей стенки;

$R = R_1 + R_2 + R_3$ – общее термическое сопротивление многослойной стенки, равное сумме термических сопротивлений отдельных слоев стенки.

- $R = \dfrac{\delta}{\lambda}$ – **термическое сопротивление слоя**;

- $R = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$ – полное **термическое сопротивление** многослойной плоской стенки.

Температуры (°С) между отдельными слоями сложной стенки находим из следующих уравнений:

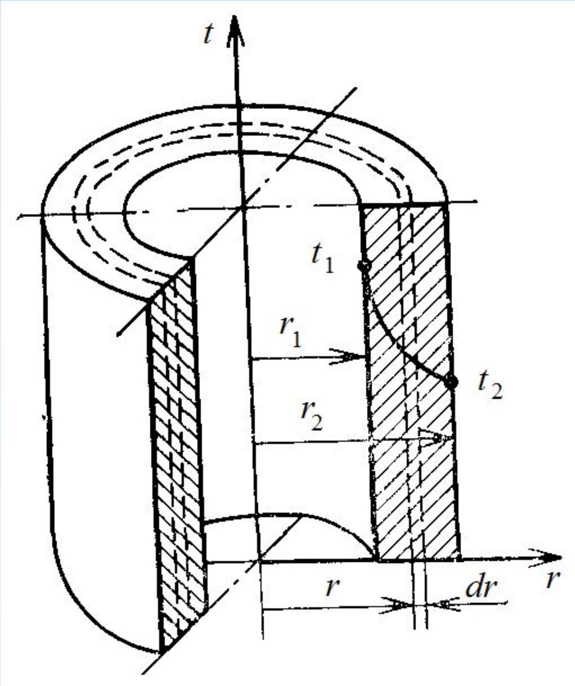
$$t_2 = t_1 - \frac{Q}{F} \cdot \frac{\boldsymbol{\delta}_1}{\boldsymbol{\lambda}_1};$$

$$t_3 = t_2 - \frac{Q}{F} \cdot \frac{\boldsymbol{\delta}_2}{\boldsymbol{\lambda}_2};$$

$$t_4 = t_3 - \frac{Q}{F} \cdot \frac{\boldsymbol{\delta}_3}{\boldsymbol{\lambda}_3}.$$

- Температура в каждом слое стенки при постоянной теплопроводности изменяется по линейному закону, а для многослойной стенки температурный график представляет собой ломаную линию.

3. Передача теплоты через однослойную цилиндрическую стенку при граничных условиях I–го рода

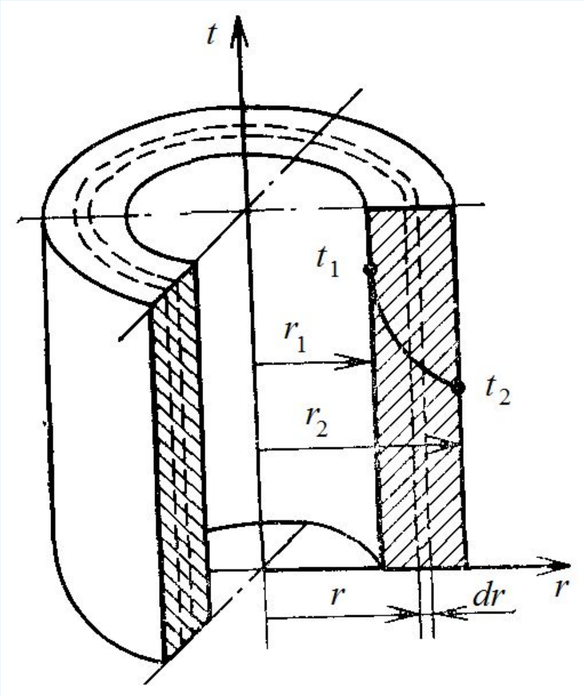


- t_1 и t_2 – постоянные температуры внутренней и внешней поверхностей прямой цилиндрической трубы.

- Изотермические поверхности будут цилиндрическими поверхностями, имеющими общую ось с трубой.

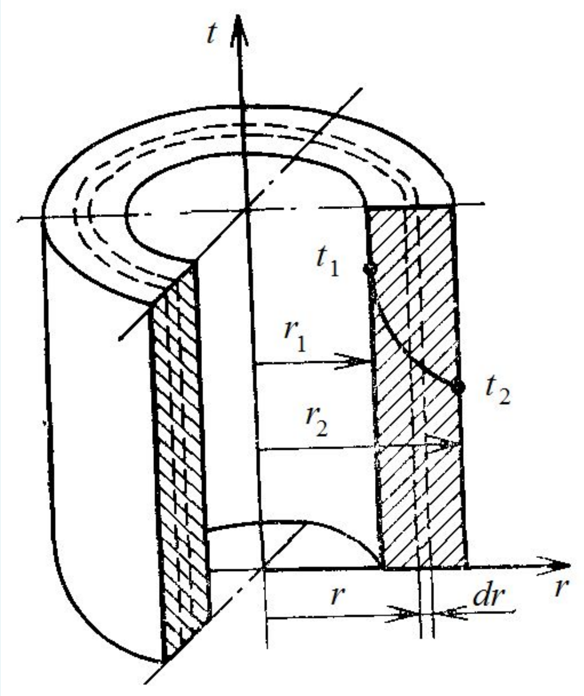
- Температура меняется только в направлении радиуса, благодаря этому и поток теплоты тоже будет радиальным.

- Труба имеет бесконечную длину.

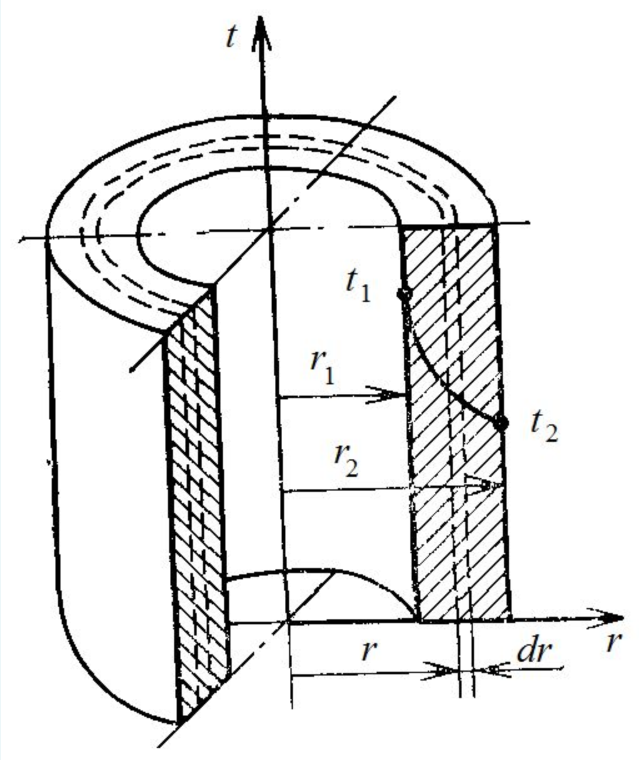


- Температурное поле одномерное $t=f(r)$, где r ***текущая цилиндрическая координата***.

В случае неравномерного распределения температур на поверхностях трубы температурное поле не будет одномерным и уравнение $t=f(r)$ является недействительным.



- Рассмотрим участок трубы длинной l, в которой тепловой поток направлен радиально.



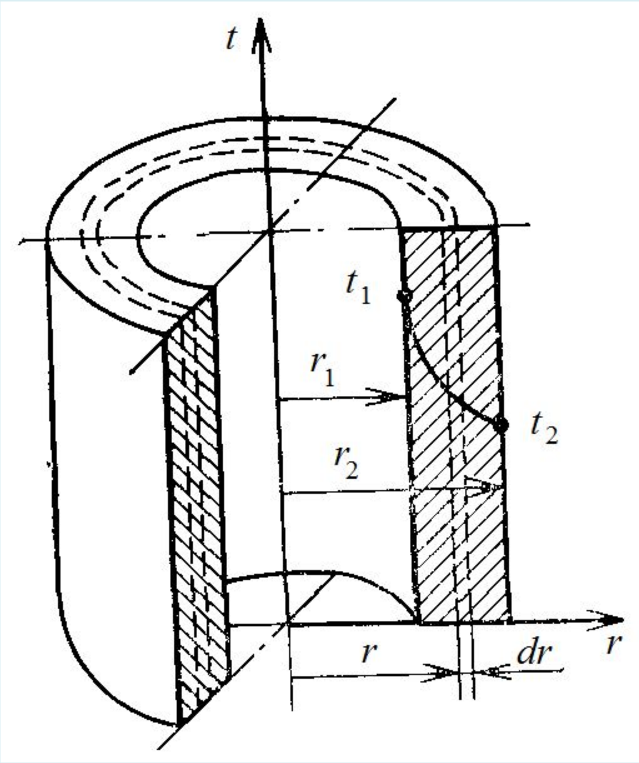
- Поверхность F на расстоянии r от оси равна $2\pi rl$.

- t_1 и t_2 – температуры внутренней и внешней поверхностей трубы.

- Через внутреннюю и внешнюю поверхности проходит один и тот же тепловой поток.

- Выделим внутри стенки кольцевой слой радиусом r и толщиной dr.

- Примем поверхности кольцевого слоя (внутреннюю и внешнюю), через которые проходит тепловой поток, одинаковыми и рассмотрим этот элементарный слой как плоскую стенку.



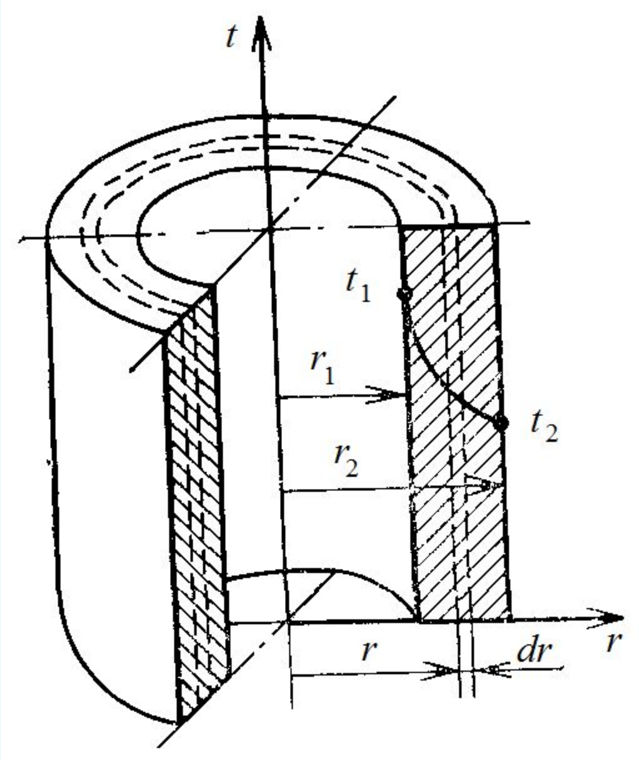
- Разность температур между поверхностями элементарного слоя будет бесконечно малой dt.

- По закону Фурье,

$$Q = -\boldsymbol{\lambda}\left(\frac{dt}{dr}\right)F,$$

- для кольцевого слоя

$$Q = -2\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\lambda} lr\left(\frac{dt}{dr}\right).$$



- Разделяя переменные, получаем

$$dt = -\left(\frac{Q}{2\pi\lambda l}\right)\cdot\left(\frac{dr}{r}\right).$$

- Интегрируя полученное уравнение в пределах от t_1 до t_2 и от r_1 до r_2 и при λ=const, получаем

$$t_1 - t_2 = \left(\frac{Q}{2\pi\lambda l}\right)\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

- Выразим **тепловой поток**

$$Q = \frac{l(t_1 - t_2)}{\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right) \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}.$$

- ***Выводы из полученного уравнения***:
- **Распределение температур** в стенке цилиндрической трубы представляет собой логарифмическую кривую.
- **Тепловой поток**, проходящий через цилиндрическую стенку, определяется заданными граничными условиями и зависит от отношения наружного диаметра к внутреннему.

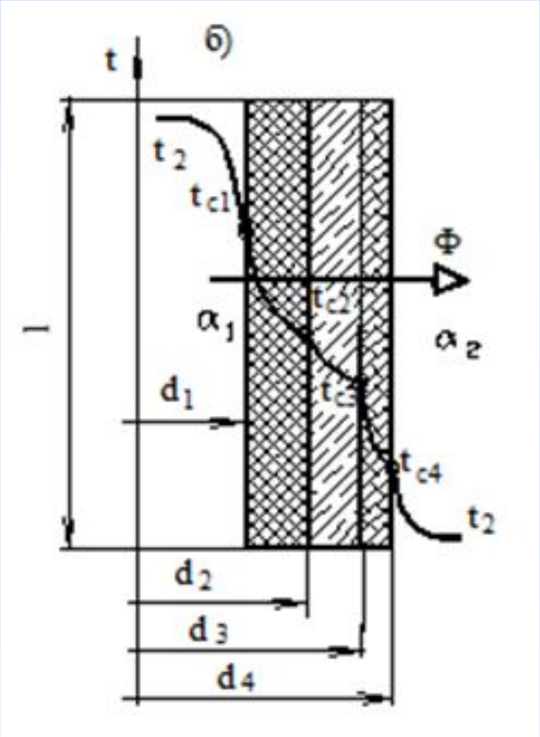
- **Тепловой поток** может быть отнесен к единице длины трубы q_l и к 1 м^2 внутренней или внешней поверхности q_1 и q_2.

Расчетные формулы принимают следующий вид:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\ln\frac{d_2}{d_1}};$$

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda(t_1 - t_2)}{d_1 \ln\frac{d_2}{d_1}}; \qquad q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda(t_1 - t_2)}{d_2 \ln\frac{d_2}{d_1}}.$$

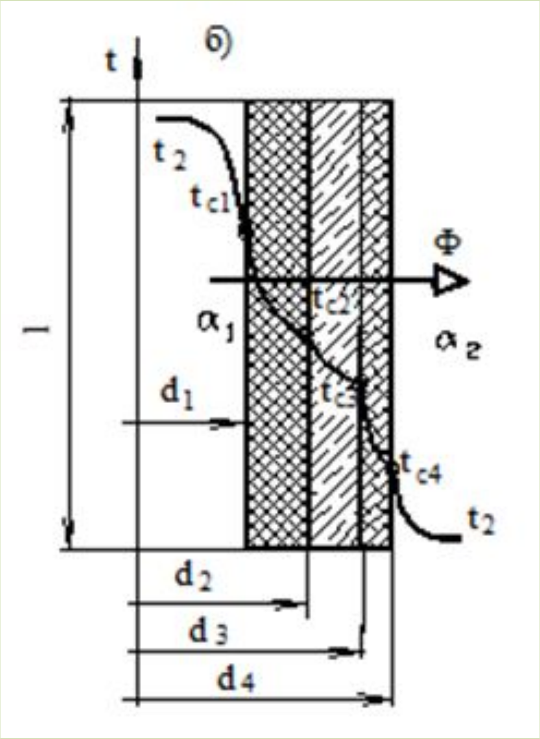
4. Передача теплоты через многослойную цилиндрическую стенку при граничных условиях I–го рода



- Цилиндрическая стенка состоит из трех плотно прилегающих слоев.

- Температура внутренней поверхности стенки t_1, наружной t_4.

- Температуры между слоями t_2 и t_3.

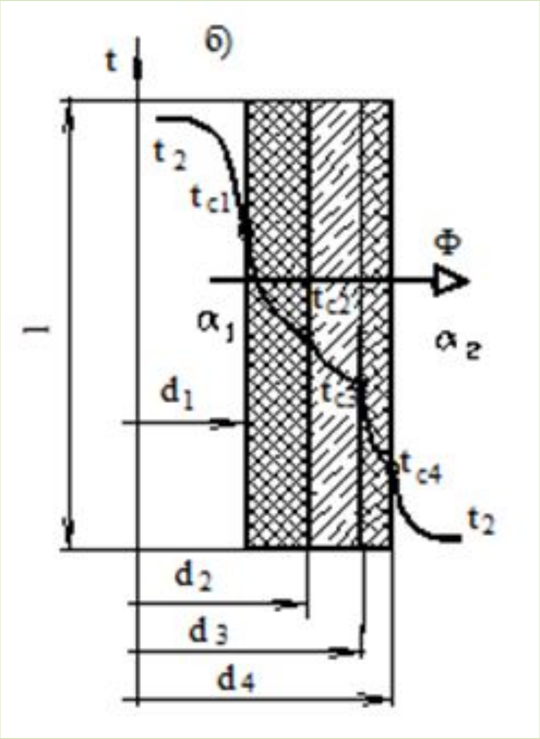


- Теплопроводность слоев равны λ_1, λ_2, λ_3.

- Диаметры слоев равны d_1, d_2, d_3, d_4.

- Температура каждого слоя стенки изменяется по логарифмической кривой.

- Общая температурная кривая представляет собой ломаную логарифмическую кривую.



- При стационарном режиме через все слои проходит один и тот же **тепловой поток**.

- Для каждого слоя **тепловой поток** равен:

$$Q = \frac{2\pi\lambda_1 l(t_1 - t_2)}{\ln(d_2/d_1)};$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda_2 l(t_2 - t_3)}{\ln(d_3/d_2)};$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda_3 l(t_3 - t_4)}{\ln(d_4/d_3)}.$$

- Решая полученные уравнения относительно разности температур и почленно складывая, получаем

$$\left(t_1 - t_4\right) = \frac{Q}{2\pi l}\left[\frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{\lambda_2}\ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{1}{\lambda_3}\ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right)\right],$$

- откуда

$$Q = \frac{2\pi l\left(t_1 - t_4\right)}{\left[\frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{\lambda_2}\ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right) + \frac{1}{\lambda_3}\ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right)\right]}.$$

Температуры (°С) между слоями находим из следующих уравнений:

$$t_2 = t_1 - \left[\frac{Q}{2\pi\lambda_1 l}\right]\ln\frac{d_2}{d_1};$$

$$t_3 = t_2 - \left[\frac{Q}{2\pi\lambda_2 l}\right]\ln\frac{d_3}{d_2}.$$

5. Передача теплоты через шаровую стенку при граничных условиях I–го рода

- Постоянный тепловой поток направлен через шаровую стенку.
- Источник теплоты находится внутри шара.
- Температура изменяется только по направлению радиуса.
- Изотермические поверхности представляют собой концентрические шаровые поверхности.
- Температура внутренней поверхности стенки t_1, наружной t_2.
- Теплопроводность стенки λ постоянна.
- Внутренний радиус шара r_1, наружный r_2.

- **Тепловой поток**, проходящий через шаровой слой радиусом *r* и толщиной *dr*, находим из уравнения Фурье:

$$Q = -\lambda\left(\frac{dt}{dr}\right)F = -4\pi\lambda r^2\left(\frac{dt}{dr}\right),$$

- или

$$dt = -\left(\frac{Q}{4\pi\lambda}\right)\cdot\left(\frac{dr}{r^2}\right).$$

$$dt = -\left(\frac{Q}{4\pi\lambda}\right)\cdot\left(\frac{dr}{r^2}\right).$$

- Интегрируя данное уравнение по t и r.
- Постоянную интегрирования определяем из граничных условий

 при $r = r_1$, то $t = t_1$,

 при $r = r_2$, то $t = t_2$, получаем

$$Q = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{(1/r_1 - 1/r_2)} = \frac{2\pi\lambda(t_1 - t_2)}{(1/d_1 - 1/d_2)}.$$