Задание 1. Определить температуру на наружной поверхности трубопровода при следующих условиях: наружный диаметр трубопровода D = 56 мм, толщина стенки δ = 3 мм, теплопроводность λ =0,75 Вт/(м·К), температура внутренней поверхности трубы t_{c1} = 75°C. По трубопроводу транспортируют жидкость, температура которой снижается на 1°C на каждые 10 м длины трубопровода при скорости движения жидкости w = 0,5 м/с. Удельная теплоёмкость жидкости $c_ж$= 4000 Дж/(кг·К), плотность $\rho_ж$= 1000 кг/м^3.

Решение

Расход жидкости, проходящей по трубопроводу:

$$G = \frac{\pi(D - 2\delta)^2}{4} w\rho_ж$$ 0,98 кг/с

Количество теплоты, которое жидкость отдает стенке на участке трубы длиной 1 м, равно:

$$q_l = Gc_ж \Delta t$$ 392 Вт/м

При стационарном тепловом процессе это количество теплоты проходит и через стенку трубы:

$$q_l = \frac{2\pi\lambda(t_{c1} - t_{c2})}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$

Тогда температура на наружной поверхности трубы:

$$t_{c2} = t_{c1} - \frac{q_l \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi\lambda}$$ 66°C

Задание 2. Теплоизолированная пластина (коэффициент теплопроводности λ = 0,19 Вт/(м · К), толщина стенки 2δ = 50 мм), имеющая начальную температуру t_0 = 150°С, охлаждается в среде, температура которой постоянна и равна $t_ж$ = 10°С. Коэффициент температуропроводности $a = 8{,}0 \cdot 10^{-8}$ м^2/с и коэффициент теплоотдачи α = 60 Вт/(м^2 · К). Найти распределение температуры в центре пластины, на её поверхности и на расстоянии 10 мм от поверхности через 1 час после начала охлаждения.

Решение

Определим критерий *Fo* для охлаждения пластины:

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \qquad 0{,}461$$

Если *Fo* > 0,3, то распределение температуры в пластине можно с достаточной точностью описать первым членом ряда:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \cos(\mu_n \xi) \exp(-\mu_n^2 Fo)$$

Тогда безразмерная температура имеет вид:

$$\theta = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_1^2 Fo)$$

Определим критерий *Bi*:

$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda} \qquad 7{,}89$$

Значение $\mu_i(Bi)$ для охлаждения пластины определяется согласно таблицы:

При необходимости можно провести линейную интерполяцию:

$$\mu_{1,i} = \left[\mu_{1,i-1} + \frac{Bi_i - Bi_{i-1}}{Bi_{i+1} - Bi_{i-1}}(\mu_{1,i+1} - \mu_{1,i-1})\right] \qquad 1{,}3955$$

Тогда для середины пластины при $x = 0$:

$$\theta_{\text{с}} = \frac{t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = \frac{2\sin 1{,}3955}{1{,}3955 + \sin 1{,}3955 \cdot \cos 1{,}3955} \cdot \exp(-1{,}3955^2 \cdot 0{,}461) = 0{,}512$$

Температура на середине пластины:

$$t_{\text{с}} = t_{\text{ж}} + \theta_{\text{с}}(t_0 - t_{\text{ж}}) \qquad t_{\text{с}} = 10 + 0{,}512 \cdot (150 - 10) = 81{,}7℃$$

Значения μ для пластины

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4		Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	3,1416	6,2832	9,4248		1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249		1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250		2,0	1,0769	3,6435	6,5783	9,6296
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252		3,0	1,1925	3,8088	6,7010	9,7240
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254		4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256		5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258		6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667
0,02	0,141	3,1479	6,2864	9,4269		7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290		8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311		9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333		10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354		15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459		20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565		30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670		40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775		50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832
0,6	0,7051	3,3304	6,3770	9,4879		60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983		80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087		100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190		∞	1,5708	4,724	7,8540	10,9956

2
3
5

На поверхности пластины безразмерная температура:

$$\theta_п = \frac{t_п - t_ж}{t_0 - t_ж} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1}\cos\mu_1 \exp(-\mu_1^2 Fo)$$

$$\theta_п = \frac{2\sin 1{,}3955}{1{,}3955 + \sin 1{,}3955 \cdot \cos 1{,}3955} \cdot \cos 1{,}3955 \cdot \exp(-1{,}3955^2 \cdot 0{,}461) = 0{,}089$$

и температура на поверхности пластины

$$t_п = t_ж + \theta_п (t_0 - t_ж) \qquad t_п = 10 + 0{,}089 \cdot (150 - 10) = 22{,}5°C$$

На расстоянии 10 мм от поверхности пластины ($x = \delta - 0{,}01$)

$$\theta_x = \frac{t_x - t_ж}{t_0 - t_ж} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1}\cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right)\exp(-\mu_1^2 Fo)$$

$$\theta_x = \frac{2\sin 1{,}3955}{1{,}3955 + \sin 1{,}3955 \cdot \cos 1{,}3955} \cdot \cos\left(1{,}3955 \cdot \frac{0{,}025 - 0{,}01}{0{,}025}\right) \cdot \exp(-1{,}3955^2 \cdot 0{,}461) = 0{,}343$$

Тогда температура на расстоянии 10 мм от поверхности пластины

$$t_x = t_ж + \theta_x (t_0 - t_ж) \qquad t_п = 10 + 0{,}343 \cdot (150 - 10) = 58{,}0°C$$

Задание 3. Как изменится в течение 1 часа температура на поверхности и в середине кирпичной стенки при внезапном понижении температуры окружающей среды с $t_0 = 20°C$ до $t_ж = 10°C$. Характеристики кирпичной кладки: толщина стенки $2\delta = 510$ мм, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0{,}65$ Вт/(м·К), коэффициент температуропроводности $a = 7{,}0 \cdot 10^{-7}$ м²/с, коэффициент теплоотдачи $\alpha = 6{,}8$ Вт/(м²·К), плотность $\rho = 1800$ кг/м³.

Решение

Определим значения критериев Fo и Bi для охлаждения стенки:

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \quad Fo = \frac{7 \cdot 10^{-7} \cdot 3600}{0{,}255^2} = 0{,}0388 \qquad Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda} \quad Bi = \frac{6{,}8 \cdot 0{,}255}{0{,}65} = 2{,}67$$

Если $Fo < 0{,}3$, то распределение температуры в стенке можно описать

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_n^2 Fo)$$

Тогда для поверхности кладки $x = \delta$:

$$\theta_п = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\cos\mu_1 \exp(-\mu_1^2 Fo) + \frac{2\sin\mu_2}{\mu_2 + \sin\mu_2\cos\mu_2}\cos\mu_2 \exp(-\mu_2^2 Fo) +$$

$$+ \frac{2\sin\mu_3}{\mu_3 + \sin\mu_3\cos\mu_3}\cos\mu_3 \exp(-\mu_3^2 Fo) + \frac{2\sin\mu_4}{\mu_4 + \sin\mu_4\cos\mu_4}\cos\mu_4 \exp(-\mu_4^2 Fo) + \ldots$$

$\mu_1 = 1{,}1544 \qquad \mu_2 = 3{,}7543 \qquad \mu_3 = 6{,}6605 \qquad \mu_4 = 9{,}6928$

Если какие-то члены составляют меньше 1% , то ими можно пренебречь. Тогда на поверхности стенки:

$$\theta_{п} = 0{,}6086 \qquad t_{п} = t_{ж} + \theta_{п}(t_0 - t_{ж}) \qquad t_{п} = 10 + 0{,}6086 \cdot (20 - 10) = 16{,}09℃$$

Тогда для середины стенки пари $x = 0$:

$$\theta_{с} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\exp(-\mu_1^2 Fo) + \frac{2\sin\mu_2}{\mu_2 + \sin\mu_2\cos\mu_2}\exp(-\mu_2^2 Fo) +$$

$$+\frac{2\sin\mu_3}{\mu_3 + \sin\mu_3\cos\mu_3}\exp(-\mu_3^2 Fo) + \frac{2\sin\mu_4}{\mu_4 + \sin\mu_4\cos\mu_4}\exp(-\mu_4^2 Fo) + \ldots$$

$$\theta_{п} = 0{,}9994$$

Если какие-то члены составляют меньше 1% , то ими можно пренебречь. Тогда температура на середине пластины:

$$t_{с} = t_{ж} + \theta_{с}(t_0 - t_{ж}) \qquad t_{п} = 10 + 0{,}9994 \cdot (20 - 10) = 19{,}99℃$$

Задание 4. Определить промежуток времени стабилизации температуры стального листа при следующих условиях: толщина листа 2δ = 20 мм, коэффициент теплопроводности λ = 50 Вт/(м · К), теплоемкость c = 0,5 кДж/(кг·К), коэффициент теплоотдачи α = 30 Вт/(м^2 · К), плотность ρ = 8000 кг/м^3. Начальная температура стального листа t_0 = 500°С, температура окружающей среды $t_ж$ = =15°С. Считать, что процесс стабилизации температуры закончен, если температура в центре листа будет отличаться от окружающей не более, чем на 1%.

Решение

Найдем коэффициент температуропроводности: $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$

$$a = \frac{50}{500 \cdot 8000} = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

Запишем выражения для критериев *Fo* и *Bi*:

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} \qquad Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$$

Определим числовое значение критерия *Bi*:

$$Bi = \frac{30 \cdot 0{,}01}{50} = 0{,}006$$

Если $Bi << 0{,}1$, то температуру по сечению листа можно считать одинаковой:

$$\theta = \frac{t - t_ж}{t_0 - t_ж} = \exp(-BiFo) = \exp\left(-Bi\,\frac{a\tau}{\delta^2}\right)$$

Тогда

$$\ln\left(\frac{t - t_ж}{t_0 - t_ж}\right) = -Bi\,\frac{a\tau}{\delta^2}$$

время стабилизации равно:

$$\tau = \frac{\delta^2}{aBi}\ln\left(\frac{t_0 - t_ж}{t - t_ж}\right)$$

Подставим числовые значения

$$\tau = \frac{0{,}01^2}{1{,}25\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}006}\cdot \ln\left(\frac{500 - 15}{0{,}15}\right) = 10775\ \text{с} = 3\ \text{ч}$$

Задание 5. Стальная болванка размерами $2\delta \times l \times H$ = 0,1 м × 0,1 м × 3 м имеющая начальную температуру t_0 = 600°С, помещена в масляную ванну с температурой $t_ж$ = 20°С. Коэффициент теплоотдачи на поверхности болванки принимаем равным α = 1000 Вт/(м$^2 \cdot$ К). Теплопроводность, теплоёмкость и плотность стали принимаем равными $\lambda_с$ = 41 Вт/(м · К), c = 0,5 кДж/(кг·К), ρ = 7700 кг/м^3. Определить температуру болванки на поверхности $t_с$ и в средней плоскости $t_ц$ и количество теплоты отданное от болванки Q через 5 мин после начала её охлаждения. Решить задачу графически и аналитически.

Решение

Так как $H \gg 2\delta$, расчёты будем вести для неограниченной пластины, используя графические решения.

Определим коэффициент температуропроводности стали

$$a = \frac{\lambda_с}{\rho c} \qquad a = \frac{41}{7700 \cdot 500} = 1,065 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

Определим число Био и число Фурье

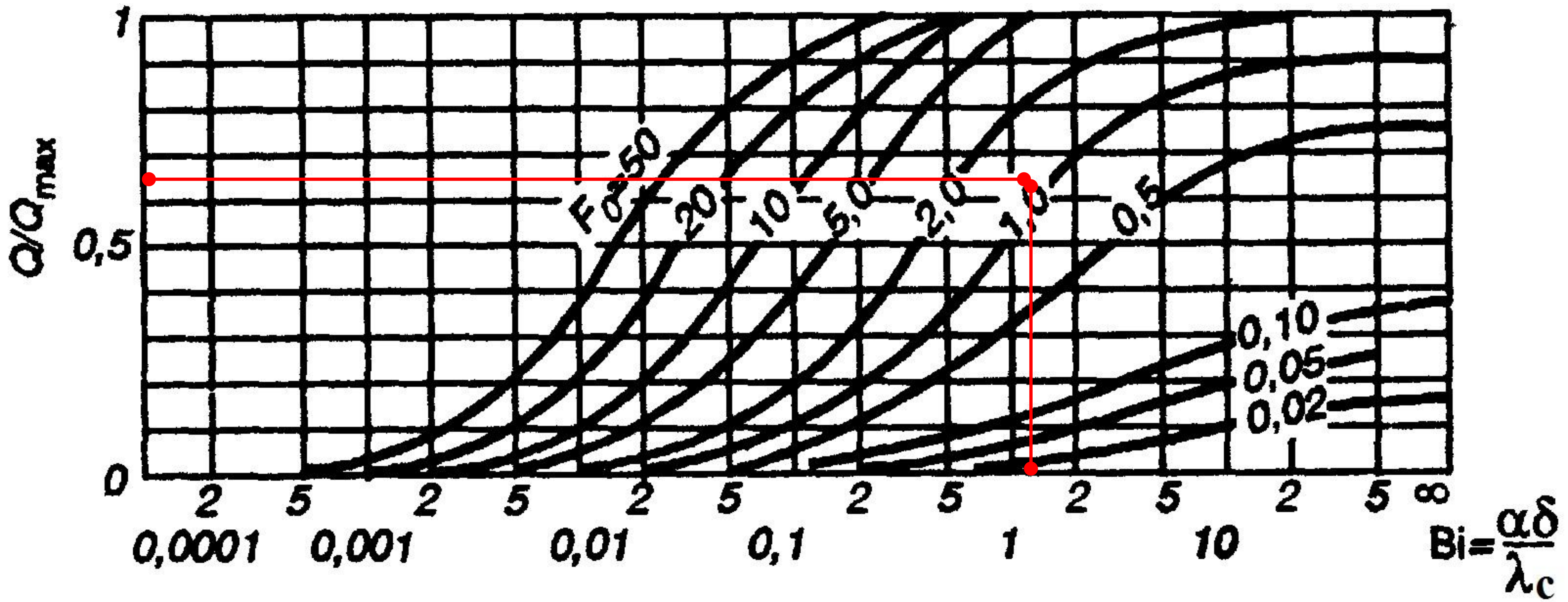
$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda_с} \qquad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$$

$$Bi = \frac{1000 \cdot 0,05}{41} = 1,22 \qquad Fo = \frac{1,065 \cdot 10^{-5} \cdot 300}{0,05^2} = 1,28$$

Максимальное количество теплоты Q_{max}, которое может быть отведено от болванки в масло, найдём по уравнению

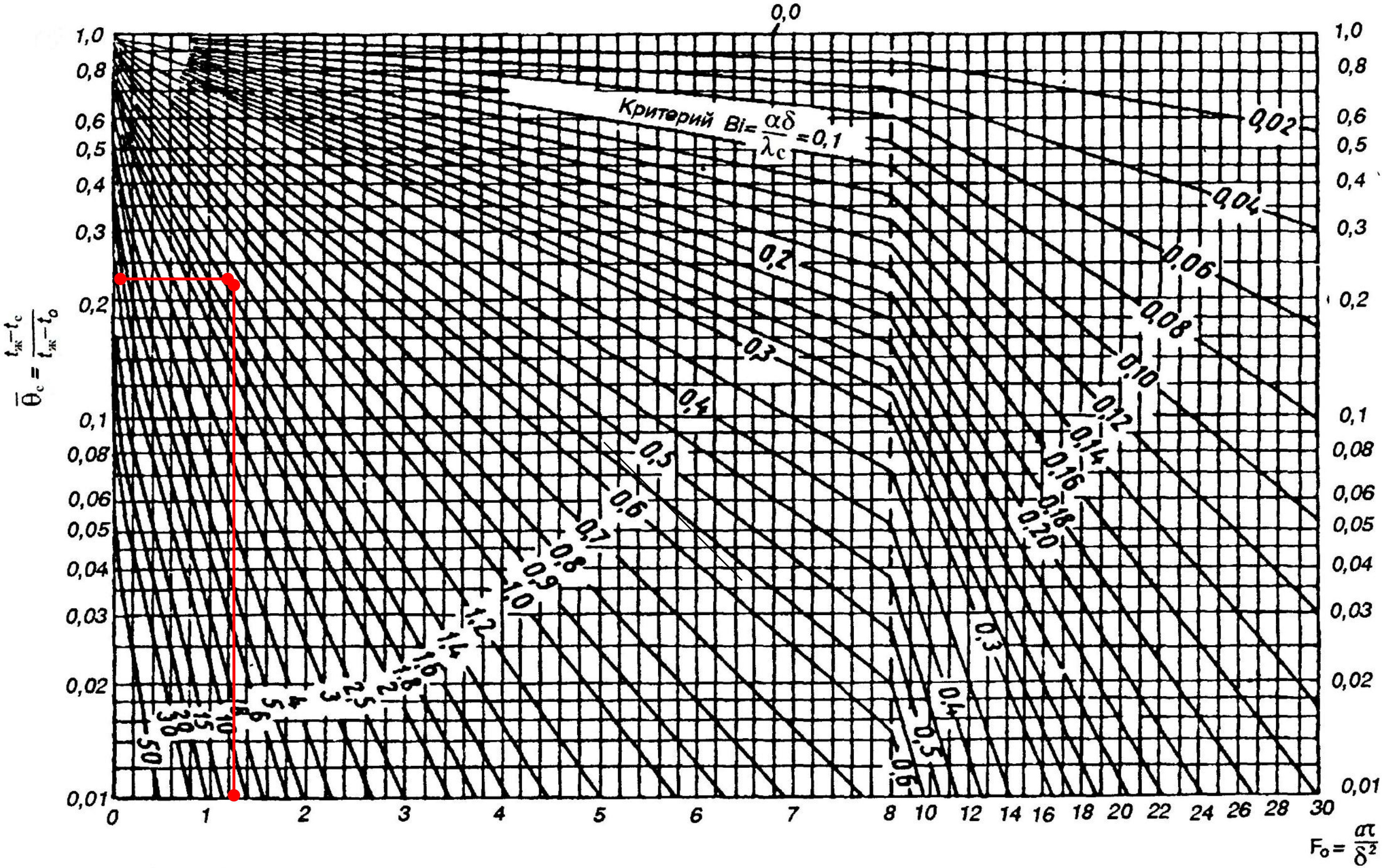
$$Q_{max} = 2\delta H l \rho c (t_0 - t_{ж})$$

$$Q_{max} = 2\cdot 0{,}05\cdot 1\cdot 0{,}3\cdot 7700\cdot 500\cdot(600-20) = 67000000 \text{ Дж} = 67 \text{ МДж}$$



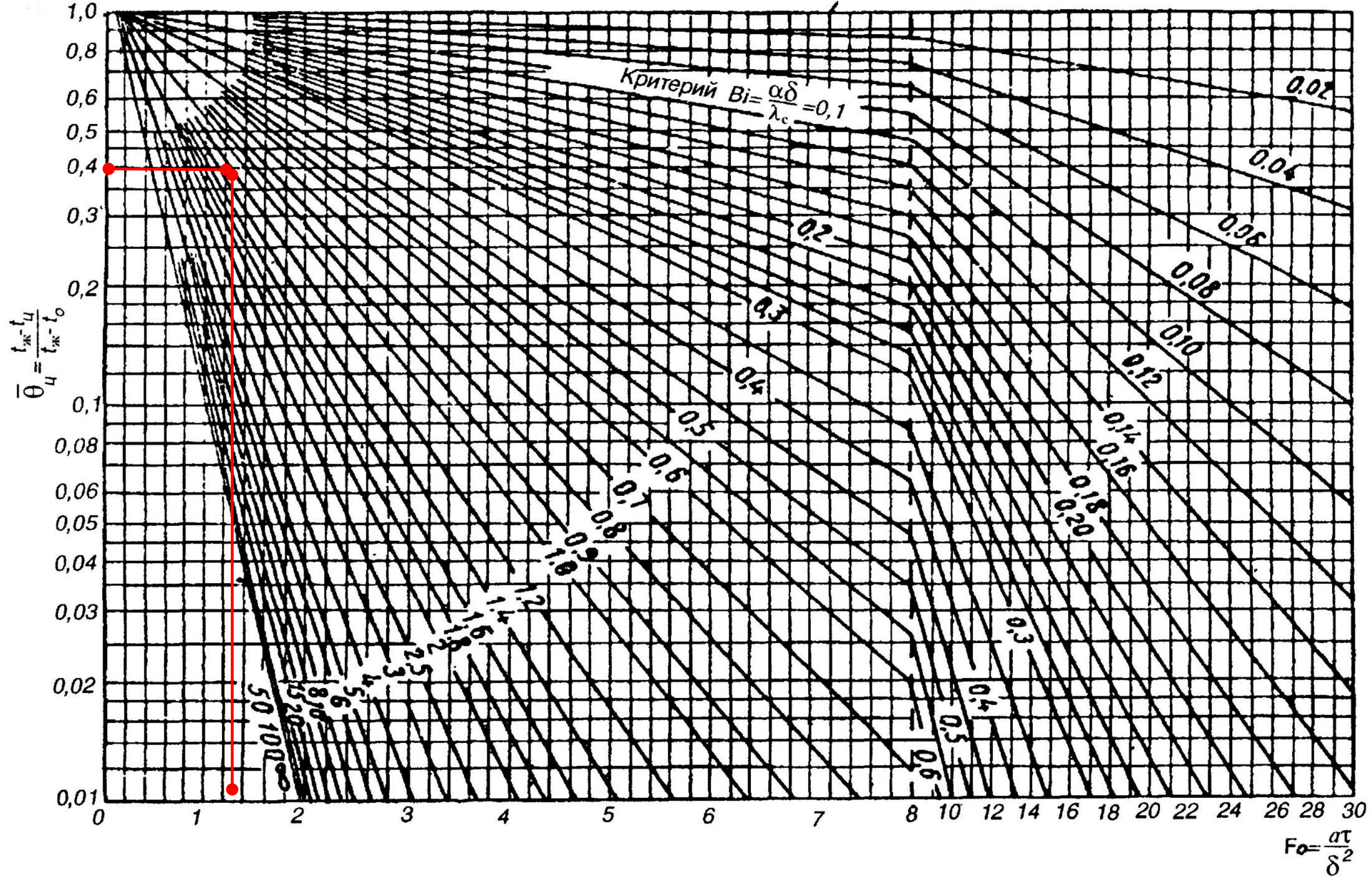
По значениям чисел Био и Фурье из графика находим значение относительного теплового потока

$$\frac{Q}{Q_{max}} \approx 0{,}65 \qquad Q = 0{,}65 Q_{max} = 0{,}65\cdot 67 = 43{,}6 \text{ МДж}$$



Из графика находим относительное значение температуры поверхности пластины

$$\theta_c \approx 0,23 \qquad t_c = 0,23\cdot(600-20)+20=153°C$$



Из графика находим относительную температуру в средней плоскости пластины

$$\theta_ц \approx 0,4 \qquad t_ц = 0,4\cdot(600-20)+20 = 252°C$$

Для сравнения определим величины $t_с$, $t_ц$, Q по результатам аналитического решения при $Fo > 0{,}3$.

Температурное поле определим по формуле

$$\theta = \frac{t - t_ж}{t_0 - t_ж} = \frac{2\sin\mu_1^*}{\mu_1^* + \sin\mu_1^*\cos\mu_1^*}\cos(\mu_1^*\bar{x})e^{-\mu_1^{*2}Fo}$$

Выберем из таблицы для $Bi = 1{,}22$ значение μ_1^*. $\mu_1^* = 0{,}92$

С учётом этого уравнение для температурного поля будет иметь вид

$$\theta = \frac{t - t_ж}{t_0 - t_ж} = 1{,}135\cos(0{,}92\bar{x})e^{-0{,}92^2\cdot 1{,}28} = 0{,}384\cos(0{,}92\bar{x})$$

В средней плоскости при $\bar{x} = 0$ $\theta_ц = 0{,}384$

На поверхности при $\bar{x} = 1$ $\theta_с = 0{,}384\cdot\cos(0{,}92\cdot 1) = 0{,}233$

Погрешность графического решения составляет

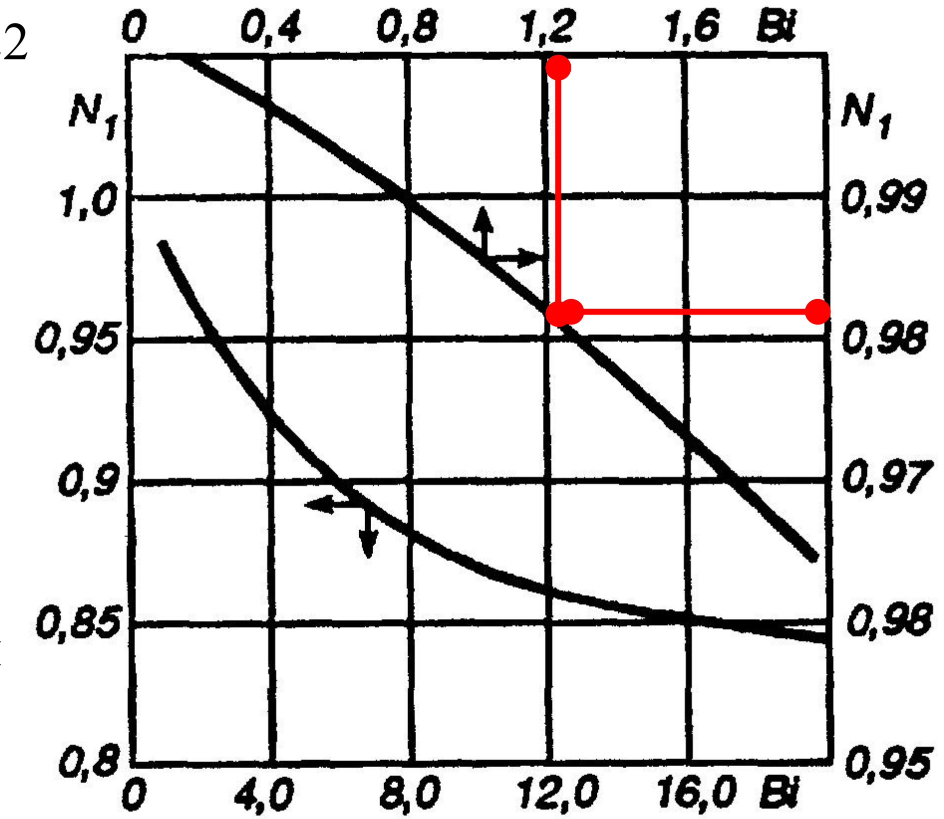
$$\varepsilon_ц = \frac{0{,}4 - 0{,}384}{0{,}384}\cdot 100\% = 4{,}2\% \qquad \varepsilon_с = \frac{0{,}233 - 0{,}23}{0{,}233}\cdot 100\% = 1{,}3\%$$

Среднюю температуру пластины найдём по уравнению

$$\bar{\theta}_m = \frac{\bar{t} - t_ж}{t_0 - t_ж} = N_1 e^{-\mu_1^{*2}Fo}$$

Значение N_1 берём из графика при $Bi = 1,22$

$$N_1 = 0,982$$



Подставим числовые значения

$$\overline{\theta}_m = 0,982 \cdot e^{-0,92^2 \cdot 1,28} = 0,3324$$

Средняя температура пластины равна

$$\bar{t} = \overline{\theta}_m (t_0 - t_ж) + t_ж$$

$$\bar{t} = 0,3324 \cdot (600 - 20) + 20 = 213℃$$

Количество отдаваемой теплоты находим по уравнению

$$Q = Q_{\max}(1 - \overline{\theta}_m)$$

$$Q = 67 \cdot (1 - 0,3324) = 44,7 \text{ МДж}$$

Погрешность по определению Q графическим путём составляет

$$\varepsilon_Q = \frac{44,7 - 43,6}{44,7} \cdot 100\% = 2,5\%$$

Задание 6. Стальная болванка, представляющая параллелепипед размерами 0,3 м × 0,3 м × 0,6 м, нагревается в воздухе с температурой $t_ж$ = 400°С. Начальная температура болванки t_0 = 21°С. Теплопроводность $\lambda_с$ = 43 Вт/(м·К), плотность ρ = 7700 кг/м^3, теплоёмкость c = 0,5 кДж/(кг·К). Коэффициент теплоотдачи от воздуха к поверхности болванки принимаем равным α = 100 Вт/(м^2·К). Определить температуру в центре и на поверхности болванки через 30 мин и 60 мин.

Решение

Расчёт проведём по уравнению для тела конечных размеров, образованному пересечением плоских поверхностей

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}_x \overline{\theta}_y \overline{\theta}_z = \left[\frac{t_ж - t(x,\tau)}{t_ж - t_0}\right]\left[\frac{t_ж - t(y,\tau)}{t_ж - t_0}\right]\left[\frac{t_ж - t(z,\tau)}{t_ж - t_0}\right]$$

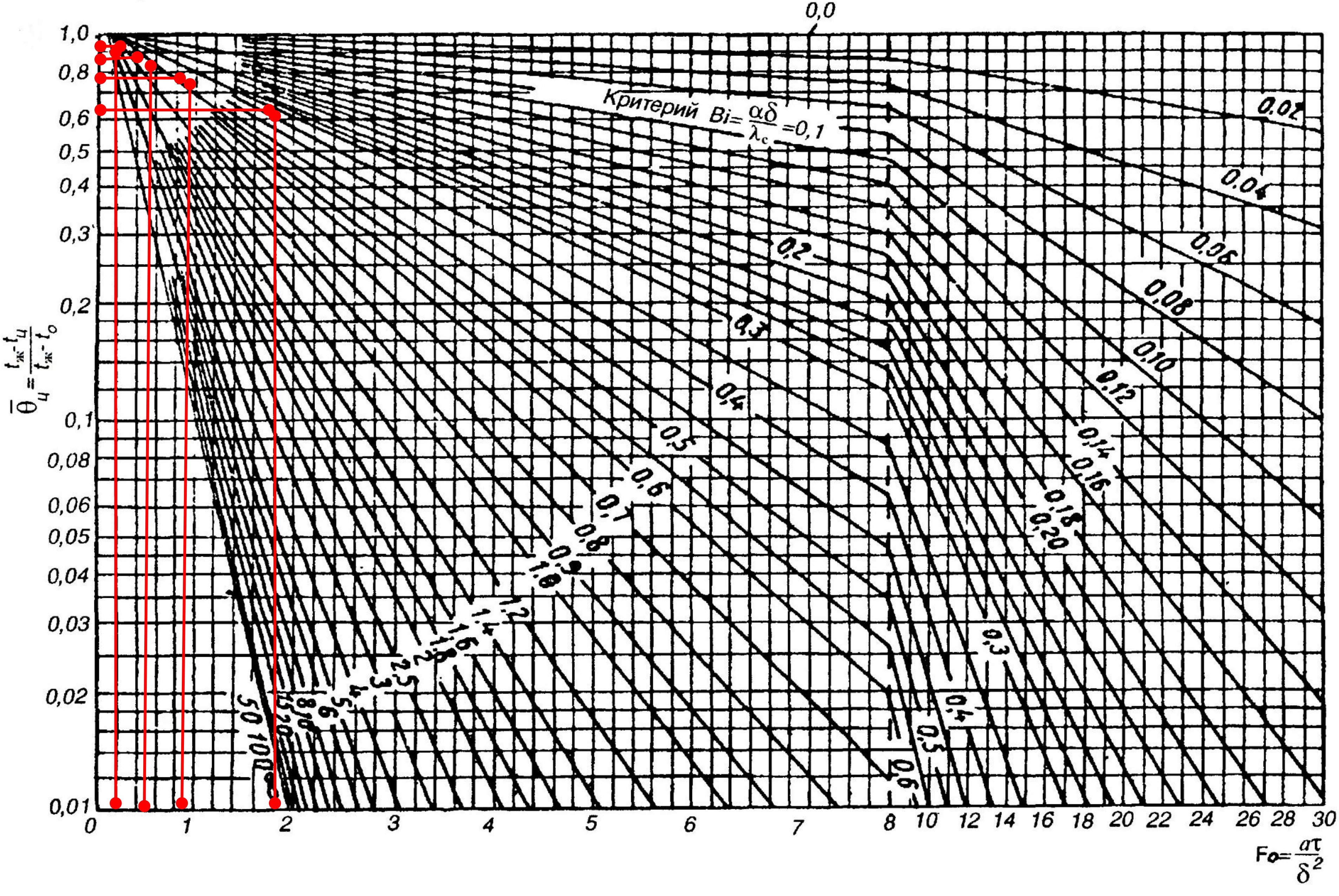
Величины $\overline{\theta}_x, \overline{\theta}_y, \overline{\theta}_z$ находим по графикам для неограниченной плоской пластины.

Для этого определим число Био и число Фурье

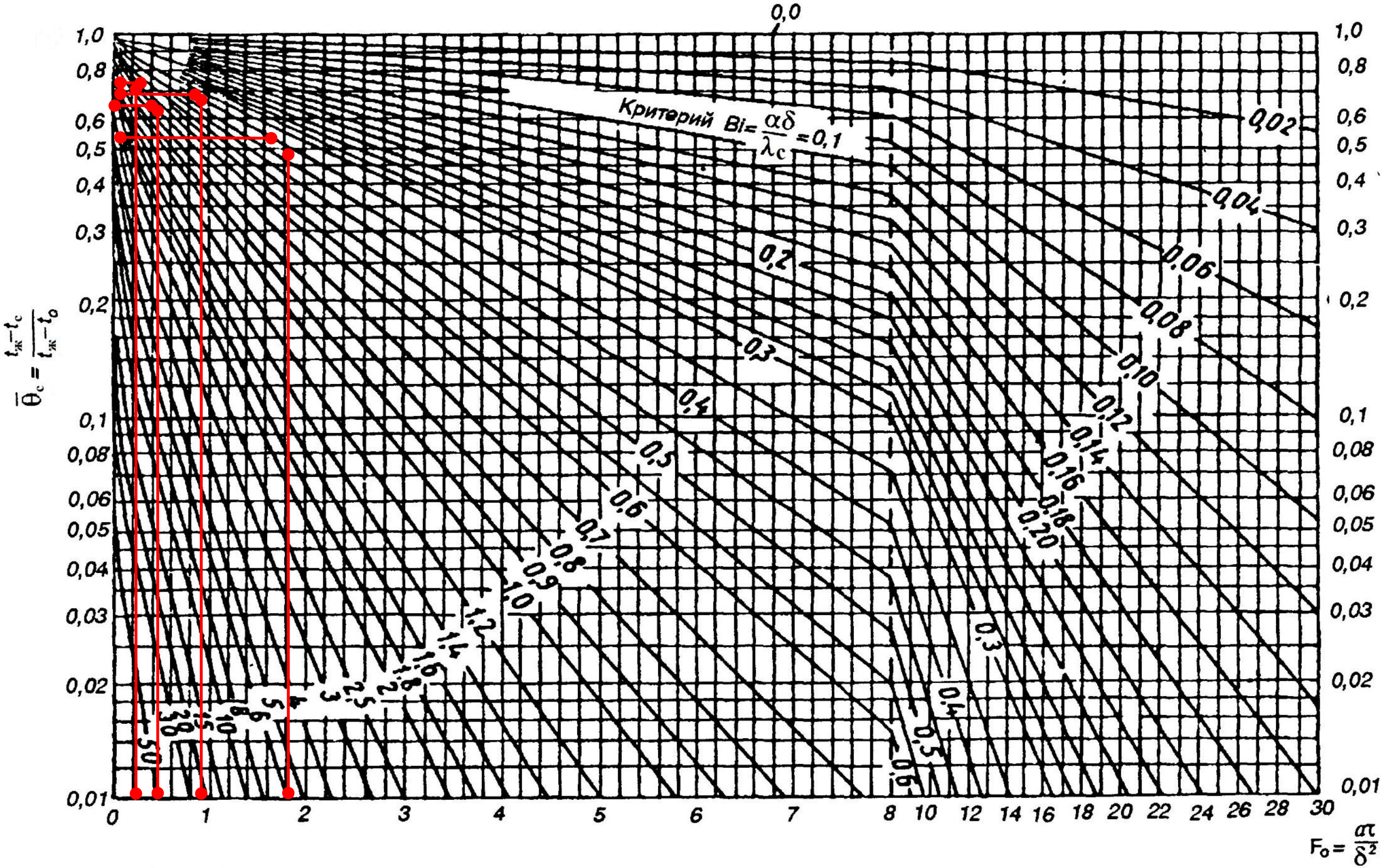
$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda_с} \qquad Fo = \frac{\lambda_с \tau}{c\rho\delta^2}$$

Исходные данные и результаты расчёта сведём в таблицу.

Параметры		Одномерный поток			Болванка
		По оси x	По оси y	По оси z	
2δ		0,3	0,3	0,6	-
Bi		0,35	0,35	0,70	-
τ = 30 мин	Fo	0,89	0,89	0,22	-
	$\overline{\theta}_ц$	0,81	0,81	0,95	0,62
	$\overline{\theta}_с$	0,67	0,67	0,70	0,33
	$t_ц$, °C				165
	$t_с$, °C				275
τ = 60 мин	Fo	1,79	1,79	0,45	-
	$\overline{\theta}_ц$	0,60	0,60	0,90	0,32
	$\overline{\theta}_с$	0,52	0,52	0,62	0,17
	$t_ц$, °C				279
	$t_с$, °C				336



0,0
Критерий $Bi=\frac{\alpha\delta}{\lambda_c}=0,1$
0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,5
3
4
5
6
8
10
20
50
100
$\overline{\theta}_ц=\frac{t_ж-t_ц}{t_ж-t_o}$
1,0
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
1
2
3
4
5
6
7
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
$Fo=\frac{a\tau}{\delta^2}$



0,0
Критерий $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda_c} = 0,1$
$\bar{\theta}_c = \frac{t_ж - t_c}{t_ж - t_o}$
$F_o = \frac{a\tau}{\delta^2}$
1,0
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,08
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
1
2
3
4
5
6
7
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
0,14
0,16
0,18
0,20
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,5
3
4
5
6
8
10
15
18
28
50
0,3
0,4
0,5
0,6

Задание 7. Для измерения температуры рабочего тела в цилиндре четырёхтактного двигателя используют проволочный термометр сопротивления d= 0,01 мм, изготовленный из вольфрама (λ_w = 76 Вт/(м·К), ρ = 19300 кг/м^3, c=0,125 кДж/(кг·К)). Определить погрешность измерения температуры на тактах сжатия-расширения при прокрутке двигателя при частоте вращения вала двигателя 2500 мин$^{-1}$, если температура в цилиндре за один цикл меняется по закону косинусоиды $t_ж = 400 - 350\cos(2\pi\tau/\tau_0)$.

Решение

Время одного оборота вала двигателя равно $\tau_0 = \dfrac{60}{2500} = 0{,}024$ с

Круговая частота колебаний равна

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \qquad \omega = \frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}024} = 262 \text{ рад/с}$$

Для определения коэффициента теплоотдачи воспользуемся уравнением

$$Nu = 0{,}42\,\mathrm{Pr}^{0,2} + 0{,}57\,\mathrm{Pr}^{0,33}\,\mathrm{Re}^{0,5}$$

Для для рабочего тела − воздуха − при температуре t = 400°С определим следующие параметры: Pr, ν и λ.

$$\mathrm{Pr} = 0{,}678 \qquad \nu = 63{,}09\cdot 10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с} \qquad \lambda = 5{,}21\cdot 10^{-2}\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$$

Определим число Рейнольдса, приняв равной скорость воздуха $w = 20$ м/с

Определим число Рейнольдса, приняв равной скорость воздуха $w = 20$ м/с

$$\mathrm{Re} = \frac{wd}{\nu} \qquad \mathrm{Re} = \frac{20 \cdot 10^{-5}}{63{,}09 \cdot 10^{-6}} = 3{,}17$$

Тогда число Нуссельта равно

$$Nu = 0{,}42 \cdot 0{,}678^{0,2} + 0{,}57 \cdot 0{,}678^{0,33} \cdot 3{,}17^{0,5} = 1{,}28$$

Коэффициент теплоотдачи рассчитаем по формуле $\alpha = Nu \dfrac{\lambda}{d}$

$$\alpha = 1{,}28 \cdot \frac{5{,}21 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}} = 6670\ \text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$$

Коэффициент температуропроводности вольфрама равен

$$a = \frac{\lambda_\mathrm{w}}{\rho c} \qquad a = \frac{76}{19300 \cdot 125} = 3{,}15 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2\text{/с}$$

Определим число Био

$$Bi = \frac{\alpha R_0}{\lambda_\mathrm{w}} \qquad Bi = \frac{6670 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{76} = 4{,}39 \cdot 10^{-4}$$

Изменение температуры датчика определим по уравнению

$$t = 400 - 350 \frac{\cos(\omega\tau - \psi)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\psi}} \qquad \mathrm{tg}\psi = \frac{\omega}{\beta^*} \qquad \beta^* = nBi \frac{a}{L^2}$$

Параметры	$L^* = \dfrac{V}{F}$	Характерный размер L	$n = \dfrac{L}{L^*}$
Неограниченная плоская пластина толщиной 2δ	$\dfrac{V}{F} = \delta$	δ	1
Неограниченный круглый цилиндр радиусом R_0	$\dfrac{V}{F} = \dfrac{R_0}{2}$	R_0	2
Шар радиусом R_0	$\dfrac{V}{F} = \dfrac{R_0}{3}$	R_0	3
Куб со стороной $2R_0$	$\dfrac{V}{F} = \dfrac{R_0}{3}$	R_0	3

$$\beta^* = 2 \cdot 4{,}39 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{3{,}15 \cdot 10^{-5}}{(5 \cdot 10^{-6})^2} = 1106{,}3 \text{ с}^{-1} \qquad \mathrm{tg}\psi = \frac{262}{1106{,}3} = 0{,}237 \quad \psi = 13{,}3°$$

$$\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\psi} = \sqrt{1 + 0{,}237^2} = 1{,}028 \qquad t = 400 - \frac{350}{1{,}028} \cdot \cos(\omega\tau - 13{,}3°)$$

Таким образом, температура датчика будет отставать по фазе за цикл (360°) от температуры рабочего тела на ~13°, а по амплитуде будет меньше в 1,028 раза, т.е. практически такой же.

Задание 8. Рассчитать процесс замерзания воды, на свободной поверхности которой поддерживается постоянная температура t_{c1} = –20°С. Вдали от свободной поверхности вода имеет постоянную температуру t_{c2} = 4°С. Температура образования льда t_s = 0°С.

Решение

Сведём исходные данные и результаты расчётов в таблицу.

Плотность теплового потока $q_ф$, выделяемого при образовании льда, Вт/м^2

$$q_ф = \dot{m}_1 r = \frac{0,246}{\sqrt{\tau}} \cdot 334 \cdot 10^3 = \frac{82164}{\sqrt{\tau}}$$

Плотность теплового потока $q_{1,ср}$, поступающего от поверхности раздела в твёрдую фазу, подсчитанная по среднему градиенту температуры,

$$q_{ср} = \frac{\lambda_1 (t_s - t_{c1})}{L_1} = \frac{2,216 \cdot (0 - (-20))}{5,39 \cdot 10^{-4} \sqrt{\tau}} = \frac{82226}{\sqrt{\tau}}$$

Плотность теплового потока $q_{1,0}$, уходящего от твёрдой фазы через свободную поверхность в окружающую среду,

$$q_{1,0} = \lambda_1 \left. \frac{\partial t_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = \frac{A \lambda_1}{\sqrt{\pi a_1 \tau}} = \frac{75,19 \cdot 2,216}{1,99 \cdot 10^{-3} \sqrt{\tau}} = \frac{83729}{\sqrt{\tau}}$$

Параметры	Лёд	Вода	Расчётные уравнения
ρ, кг/м^3	913	1000	–
c, кДж/(кг·К)	$1{,}93$	$4{,}212$	–
λ, Вт/(м·К)	$2{,}216$	$0{,}551$	–
a, м^2/с	$1{,}26\cdot10^{-6}$	$1{,}31\cdot10^{-7}$	$a=\lambda/\rho c$
$\sqrt{\pi a}$, м·с$^{-0,5}$	$1{,}99\cdot10^{-3}$	$6{,}41\cdot10^{-4}$	–
K_0, м·с$^{-0,5}$	$5{,}39\cdot10^{-4}$		$K_0=\sqrt{\dfrac{2\lambda_1(t_s-t_{c1})}{\rho_1 r}}$
L, м	$L_1=5{,}39\cdot10^{-4}\sqrt{\tau}$	$L_2=4{,}92\cdot10^{-4}\sqrt{\tau}$	$L_2=K_0\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{\tau}$
$\dot m_1$, кг/м^2·с	$0{,}246/\sqrt{\tau}$	$0{,}246/\sqrt{\tau}$	$\dot m_i=\rho_i\,dL_i/d\tau$
	$A=75{,}19°C$	$B=-11{,}90°C$	Уравнения (1.77)

Плотность теплового потока q_2, поступающего из жидкой фазы через поверхность раздела,

$$q_2 = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x_2}\bigg|_{x_2 = L_2} = \frac{B\lambda_2}{\sqrt{\pi a_2 \tau}} e^{-\frac{L_2^2}{4a_2\tau}} = \frac{11,9 \cdot 0,551}{6,41 \cdot 10^{-4}\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(4,92\cdot 10^{-4})^2}{4\cdot 1,31\cdot 10^{-7}}} = \frac{6445}{\sqrt{\tau}}$$

Баланс тепловых потоков выполняется с погрешностью 7,8%, что связано с приближённым определением L_1 по среднему градиенту температуры новой фазы, что даёт завышенные значения L_1 и, соответственно, $q_{\text{ф}}$.

$$q_{\text{фр}} \approx q_{\text{ф}} + q_2 \qquad\qquad 82226 \approx 82164 + 6445$$

Протяжённость твёрдой фазы и плотности тепловых потоков в функции времени

τ, ч	L_2, м	L_1, м	$q_ф$, Вт/м^2	q_2, Вт/м^2	q_1, Вт/м^2	$q_{1,ср}$, Вт/м^2
60 с	0,004	0,00418	10607	832	10809	10615
1	0,0295	0,0323	1369	107	1395	1370
10	0,0934	0,102	433	34,0	441	433
24	0,145	0,158	280	21,9	285	280
72	0,250	0,274	161	12,7	164	162
120	0,323	0,354	125	9,8	127	125
240	0,457	0,501	88,4	6,9	90,1	88,5
480	0,647	0,709	62,5	4,9	63,7	62,6

Интеграл вероятности Гаусса или функция ошибок $\Phi(x)=\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\beta^2}\,d\beta$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0,000	0,39	0,4187	0.80	0,7421	1,22	0,9155
0,01	0,011	0,40	0,4284	0,81	0,7480	1,23	0,9181
0,02	0,022	0,41	0,4380	0,82	0,7538	1,24	0,9205
0,03	0,034	0,42	0,4475	0,83	0,7595	1,25	0,9229
0,04	0,045	0,43	0,4569	0,84	0,7651	1,26	0,9252
0,05	0,056	0,44	0,4662	0,85	0,7707	1,27	0,9275
0.06	0,068	0,45	0,4755	0,86	0,7761	1,28	0,9297
0,07	0,079	0,46	0,4847	0,87	0,7814	1,29	0,9319
0,08	0,090	0,47	0,4937	0,88	0,7867	1,30	0,9340
0,09	0,100	0,48	0,5027	0.89	0,7918	1,31	0,9361
0,10	0,113	0,49	0,5117	0,90	0,7969	1,32	0,9381
0,11	0,123	0,50	0,5205	0,91	0,8019	1,33	0,9400
0,12	0,135	0,51	0,5292	0,92	0,8068	1,34	0,9419
0,13	0,146	0,52	0,5379	0,93	0,8116	1,35	0,9438
0,14	0,157	0,53	0,5465	0,94	0,8163	1,36	0,9456
0,15	0,168	0,54	0,5549	0,95	0,8209	1,37	0,9473
0,16	0,179	0,55	0,5633	0,96	0,8254	1,38	0,9490
0,17	0,190	0,56	0,5716	0,97	0,8299	1,39	0,9507
0,18	0,201	0,57	0,5798	0,98	0,8342	1,40	0,9523
0.19	0,212	0,58	0,5879	0,99	0,8385	1,41	0,9539
0,20	0,223	0,59	0,5959	1,00	0,8427	1,42	0,9554
0,21	0,234	0,60	0,6039	1,01	0,8468	1,43	0,9569
0,22	0,244	0,61	0,6117	1,02	0,8508	1,44	0,9583
0,23	0.255	0,62	0,6194	1,03	0,8548	1,45	0,9597
0,24	0,266	0,63	0,6270	1,04	0,8586	1,46	0,9611
0,25	0,276	0,64	0,6346	1,05	0,8624	1,47	0,9624
0,26	0,287	0,65	0,6420	1,06	0,8661	1,48	0,9637
0,27	0,297	0,66	0,6494	1,07	0,8698	1,49	0,9649
0,28	0,308	0,67	0,6566	1,08	0,8733	1,5	0,9661
0,29	0,318	0,68	0,6638	1,09	0,8768	1,6	0,9763
0,30	0,329	0,69	0,6708	1,10	0,8802	1,7	0,9838
0,31	0,339	0,70	0,6778	1,11	0,8835	1,8	0,9891
0,32	0,349	0,71	0,6847	1,12	0,8868	1,9	0,9928
0,33	0,359	0,72	0,6914	1,13	0,8900	2,0	0,9953
0,34	0,369	0,73	0,6981	1,14	0,8931	2,1	0,9970
0,35	0,379	0,74	0,7047	1,15	0,8961	2,2	0,9981
0,36	0,389	0,75	0,7112	1,16	0,8991	2,3	0,9989
0,37	0,399	0,76	0,7175	1,17	0,9020	2,4	0,9993
0.38	0,4090	0,77	0,7238	1,18	0,9048	2,5	0,9996
		0,78	0,7300	1,19	0,9076	2,6	0,9998
		0,79	0,7361	1,20	0,9103	2,7	0,9999
				1,21	0,9130	2,8	0,9999

Изменение температуры твёрдой фазы в различные моменты времени (°C)

τ	x_2, м														
	$-(L_1–L_2)$	0	0,004	0,03	0,04	0,05	0,0934	0,145	0,250	0,323	0,4	0,457	0,5	0,6	0,647	0,8
60 с	-20	-18,3	0	4												
1 ч	-20	-18,3	-17,2	0	1,7	2,8	4									
10 ч	-20	-18,3	-17,4	-12,4	-10,4	-8,4	0	2,4	3,9	4						
24 ч	-20	-18,4	-17,8	-14,5	-13,1	-11,9	-6,5	0	2,8	3,7	3,9	4				
72 ч	-20	-18,3	-17,9	-16,0	-15,2	-14,5	-11,3	-7,5	0	1,4	2,5	3,0	3,3	3,74	3,84	3,97
120 ч	-20	-18,3	-18,0	-16,5	-16,0	-15,3	-12,9	-9,8	4,1	0	1,2	1,9	2,4	3,1	3,4	3,8
240 ч	-20	-18,3	-18,1	-17,0	-16,6	-16,2	-14,4	-12,0	-8,2	-5,3	-2,3	0	0,5	1,5	1,9	2,9
480 ч	-20	-18,3	-18,3	-17,4	-17,0	-16,8	-15,5	-14,0	-11,1	-9,0	-6,8	-5,2	-4,1	-1,3	0	1,2

$$t_1 = t_{c1} + A \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{a_1\tau}}\right)$$

$$t_2 = t_{c2} + B\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{a_2\tau}}\right)\right]$$