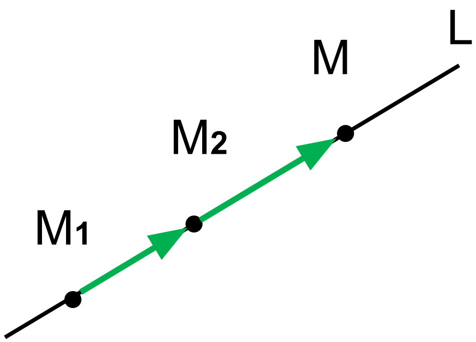
Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

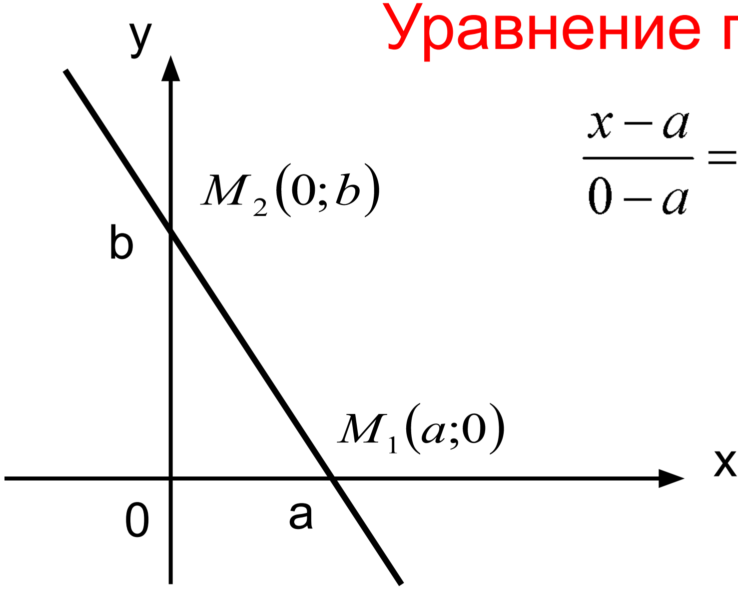
Уравнение прямой, проходящей через две точки



$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ - точки на плоскости.
Проведем через них прямую L.
Возьмём на прямой точку M(x, y).

$$\overline{M_1M}\,,\ \overline{M_1M_2}\ –\ \textit{коллинеарные} \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.}$$

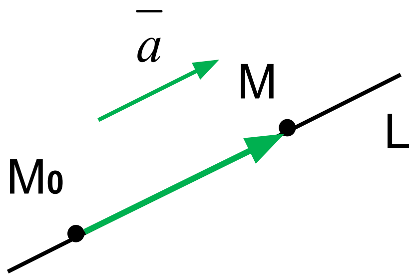
Уравнение прямой в отрезках



$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \Rightarrow (x-a)b = y(-a) \Rightarrow bx+ay=ab \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

Каноническое уравнение прямой



Прямая L однозначно может быть задана

точкой M(x_0, y_0) и вектором $\bar{a} = \{m\,; n\}$,

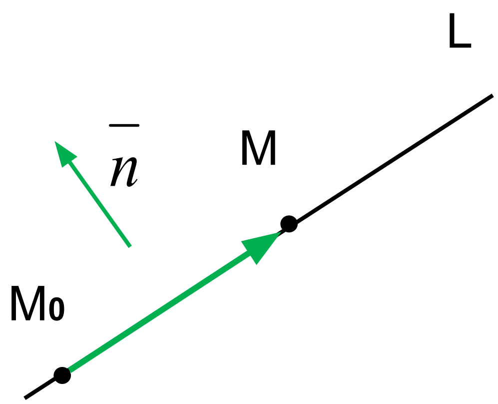
Возьмём на прямой точку M(x, y).

$$\overline{M_0M}\ ,\ \bar{a} - \textit{коллинеарные} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.}$$

Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}}$$

Уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали



Задана точка M0(x0, y0) и вектор нормали $\bar{n}=\{A;\ B\}$.
M(x, y) – произвольная точка на прямой L.

$$\overline{M_0M} \perp \bar{n} \Rightarrow \bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0 \Rightarrow$$

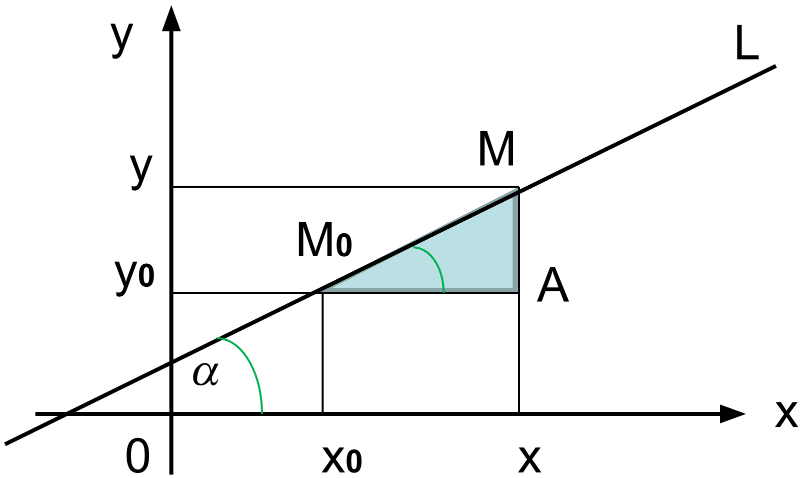
$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.}$$

Общее уравнение прямой

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0, \\ Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0, \end{array}$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0.}$$

Уравнение прямой, заданной точкой и угловым коэффициентом



Задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и угловой коэффициент $k = tg\alpha.$

$M(x, y)$ – произвольная точка на прямой L.

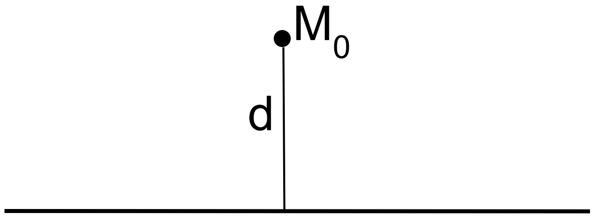
$$Из\ \Delta M_0MA \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{y-y_0}{x-x_0},$$

$$\boxed{y - y_0 = k\cdot(x-x_0).}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y - y_0 = kx - kx_0, \\ y = kx + (y_0 - kx_0), \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = kx + b}$$

Расстояние от точки до прямой



Задана точка $M_0(x_0, y_0)$ и

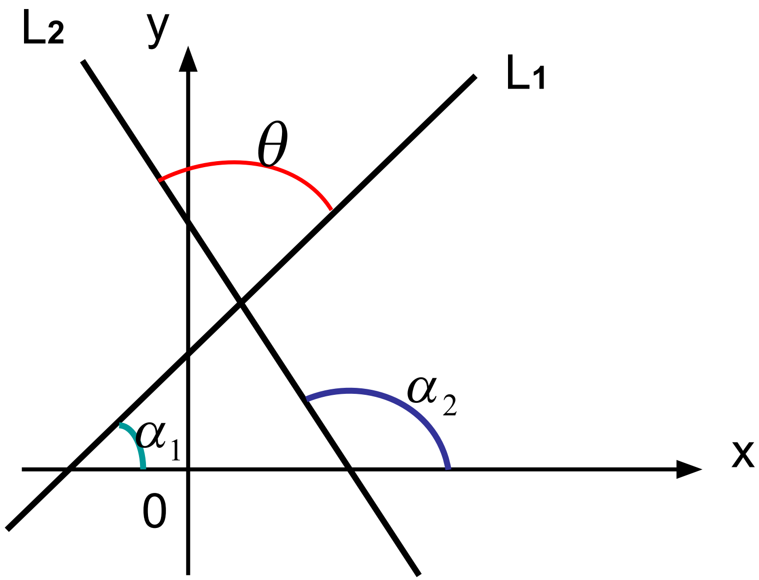
прямая $Ax + By + C = 0.$

Расстояние от точки до прямой

вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Взаимное расположение прямых



L1 и L2 – пересекающиеся прямые
Найдем угол между этими прямыми

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta, \quad \theta = \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$tg\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1),$$

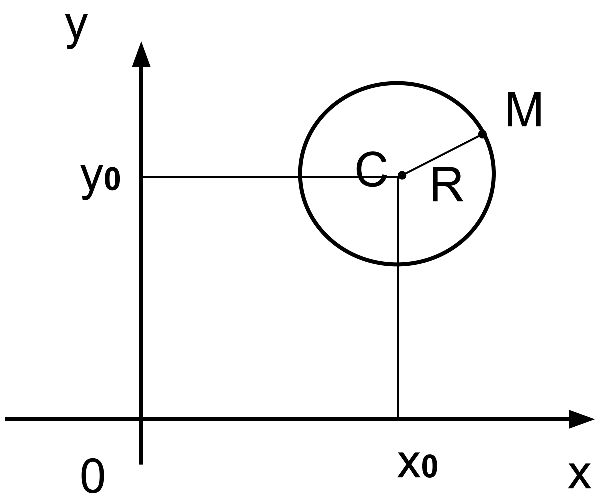
$$tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1},$$

$$\boxed{tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.}$$

Если прямые параллельны, то $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = k_2}$

Если прямые перпендикулярны, то $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow ctg\theta = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 k_2 = -1}$

Кривые второго порядка



Окружность

Окружность – множество точек плоскости равноудаленных от данной точки плоскости, называемой центром окружности.
$C(x_0; y_0)$ – центр окружности,
R – радиус,
$M(x; y)$ – произвольная точка окружности.

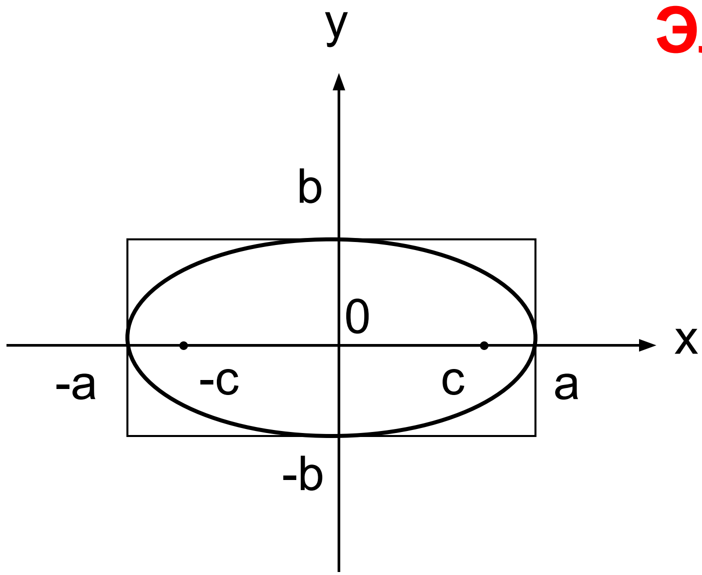
$$|CM| = R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2}$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, уравнение примет вид

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$$

Эллипс



Множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

a, b – полуоси эллипса;

$M_1(a;0)$; $M_2(-a;0)$; $M_3(0;b)$; $M_4(0;-b)$ – вершины эллипса;

$F_1(c;0)$; $F_2(-c;0)$ – фокусы;

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке O(0;0):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

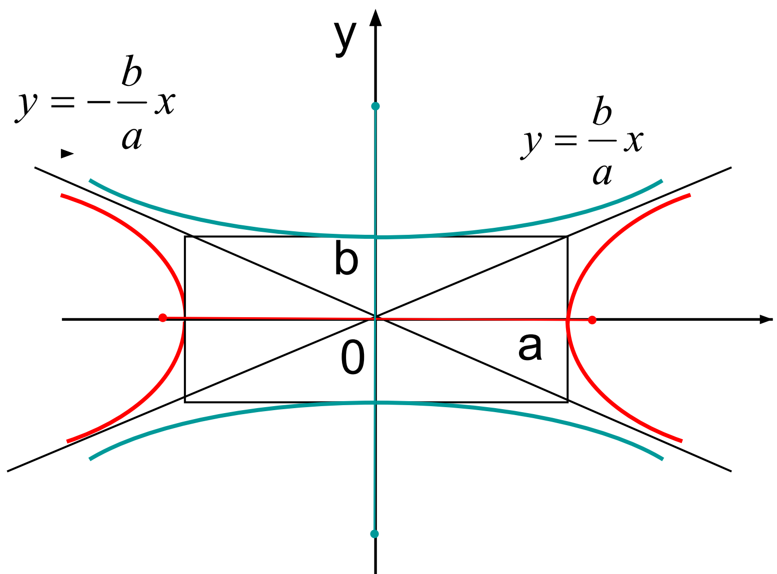
$$\varepsilon=\frac{c}{\text{большая полуось}}<1$$ - эксцентриситет;

$$(\text{большая полуось})^2=(\text{меньшая полуось})^2+c^2.$$

Если центр эллипса находится в точке $O'(x_0;\ y_0)$, то уравнение имеет вид:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.}$$

Гипербола



Множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

a – действительная полуось;(b)

b – мнимая полуось;(a)

точки пересечения с осями M_1; M_2 – вершины гиперболы;

F_1(c;0); F_2(-c;0) – фокусы; $c^2=a^2+b^2$.

Каноническое уравнение гиперболы с центром симметрии в точке O(0;0):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,}$$

Уравнение сопряженной гиперболы:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$y=\pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы;

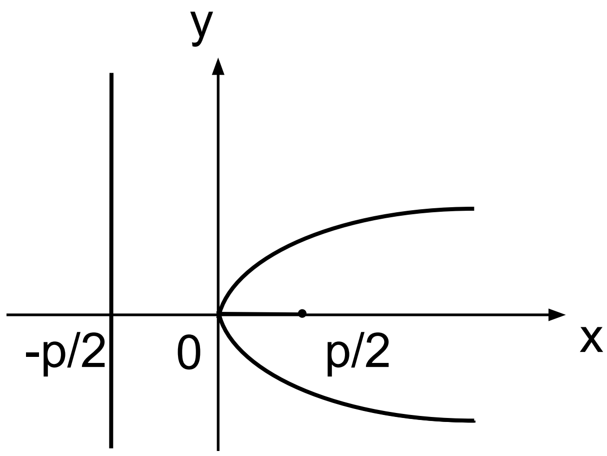
$\varepsilon=\frac{c}{\textit{действительная полуось}}>1$ - эксцентриситет;

Если центр симметрии - $O'(x_0; y_0)$, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\boxed{\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\mp\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.}$$

Уравнения асимптот: $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$.

Парабола



Множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от заданной точки, называемой фокусом и прямой, называемой директрисой.

p – параметр;

O(0;0) – вершина;

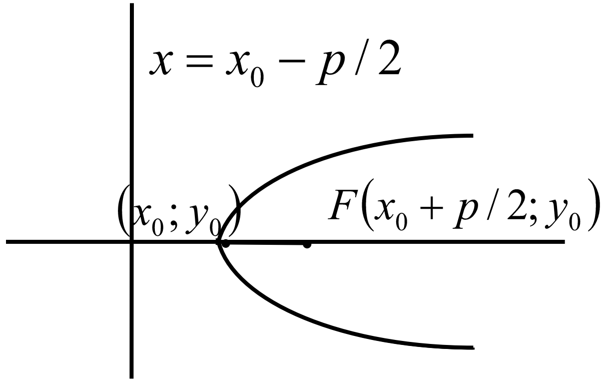
F(p/2;0) – фокус;

$y = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы.

Уравнение параболы: $\boxed{y^2 = 2px}$

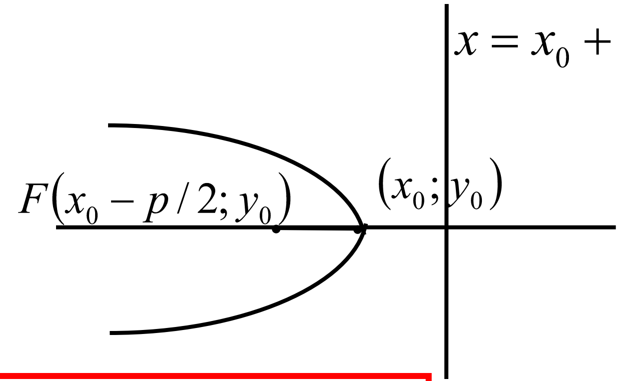
Канонические уравнение параболы с вершиной в точке $O^{/}(x_0; y_0)$

а)



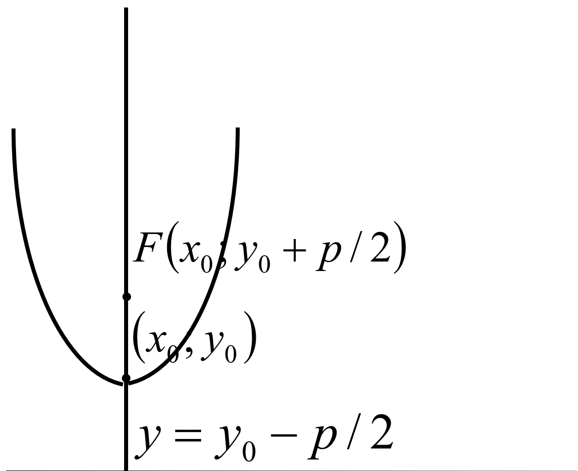
$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$

б)



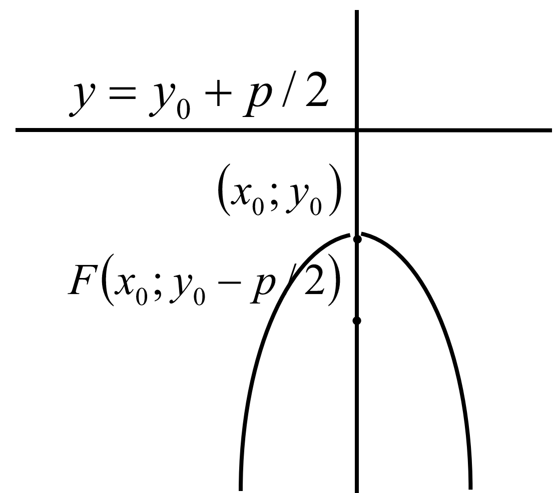
$$\boxed{(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)}$$

в)



$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

г)



$$\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)}$$

Если уравнение кривой второго порядка записано в виде

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad ,$$

то при

A=B кривая является окружностью;

$A \cdot B > 0$ кривая является эллипсом;

$A \cdot B < 0$ кривая является гиперболой;

$A = 0$ и $B \neq 0$ кривая является параболой;

$A \neq 0$ и $B = 0$ кривая является параболой.

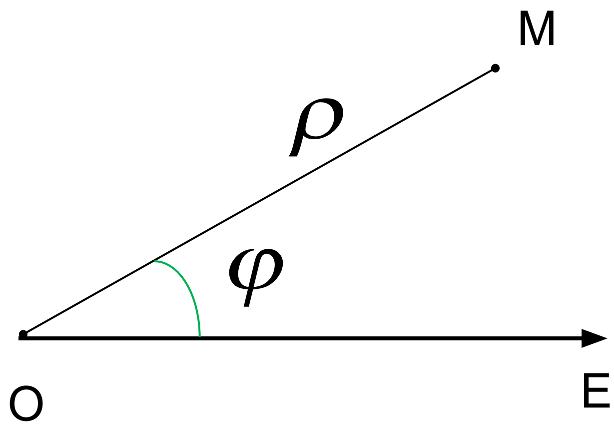
Построить кривую $x^2 + y^2 + 16y - 17 = 0.$

Построить кривую $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0.$

Построить кривую $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$

Построить кривую $y^2 - 2x - 2y + 5 = 0.$

Полярная система координат

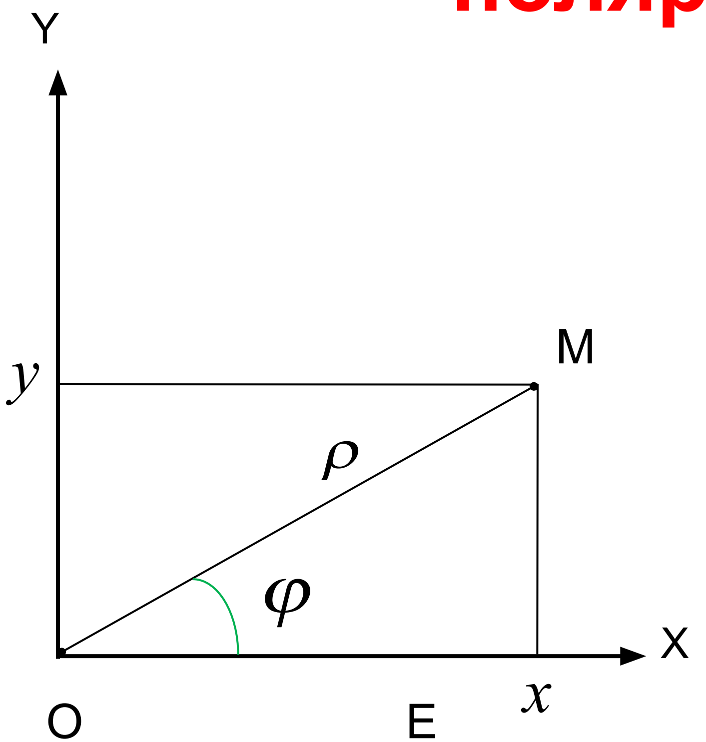


Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, и исходящего из полюса луча OE, называемого полярной осью, а также масштабом измерения длины.
Полярными координатами точки M плоскости называются (ρ, φ), где

$\rho = |OM|,$

φ – *угол поворота против часовой стрелки полярной оси до совмещения с* OM.

Формулы связи декартовых и полярных координат



$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\varphi, \\ y &= \rho \cdot \sin\varphi. \end{aligned}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin\varphi}{\rho \cos\varphi} = tg\varphi.$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned}}$$

Задача. Кривая задана уравнением $\rho = 2\cdot\cos\varphi$ в полярной системе координат. Построить кривую в декартовой системе координат.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x = \rho\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{\rho};$$

$$\rho = 2\cdot\cos\varphi \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0;$$

$A = B = 1 \Rightarrow$ *имеем урвнение окружности, приведем уравнение к каноническому виду и выполним построение.*

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

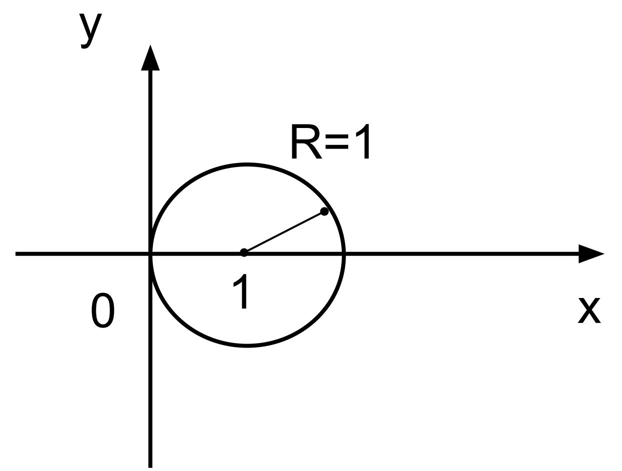
$$(x^2 - 2x) + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

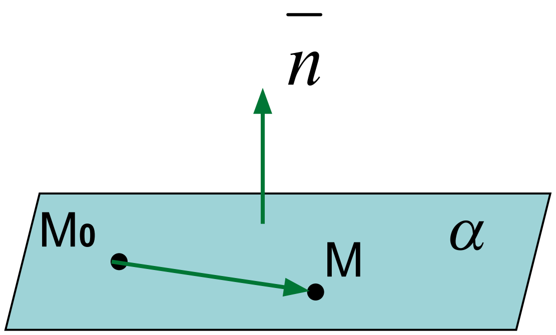
центр окружности $(1;0)$

$R = 1$



Плоскость

Уравнение плоскости, заданной точкой и вектором нормали



Задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и
вектор нормали $\overline{n} = \{A; B; C\}$,
$M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости.

$$\overline{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow \quad \overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.}$$

Общее уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0, \\ Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0, \end{array}$$

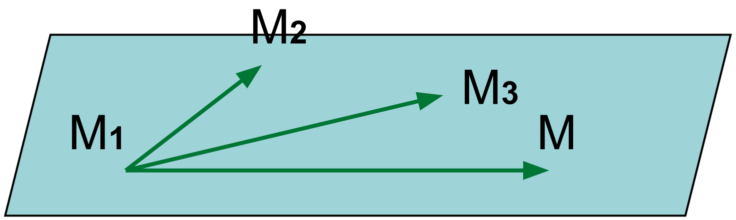
$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0.}$$

Уравнение плоскости в «отрезках»

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.}$$

Здесь a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



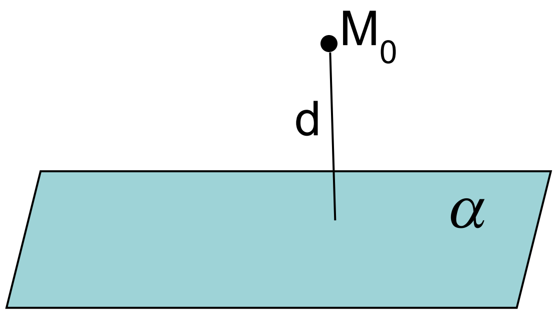
Пусть в пространстве заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.
$M(x, y, z)$ –
произвольная точка плоскости $M_1M_2M_3$.

Построим векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$,

$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$ (*из условия компланарности*)

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

Расстояние от точки до плоскости



Задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и

плоскость $Ax + By + Cz + D = 0.$

Расстояние от точки до плоскости

вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Взаимное расположение плоскостей

Плоскости α_1 *и* α_2 *заданы уравнениями*:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \overline{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad \overline{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$$

Угол между плоскостями

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.}$$

Условие перпендикулярности

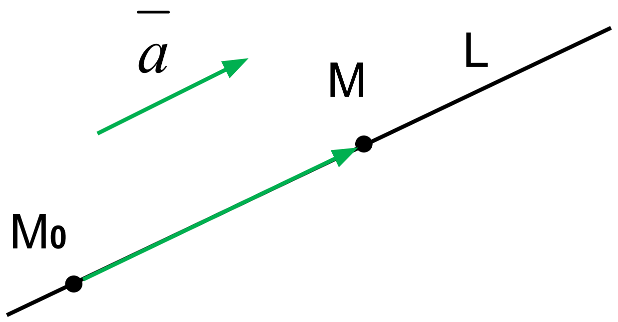
$$\boxed{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.}$$

Условие параллельности

$$\boxed{\vec{n}_1, \vec{n}_2 - \textit{коллинеарные} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

Прямая в пространстве

Канонические уравнения прямой



Прямая L однозначно может быть задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0,)$ и вектором $\overline{a} = \{m\,; n; p\}$,
Возьмём на прямой точку M(x, y, z).

$$\overline{M_0M}\ ,\ \overline{a} - коллинеарные \Rightarrow$$

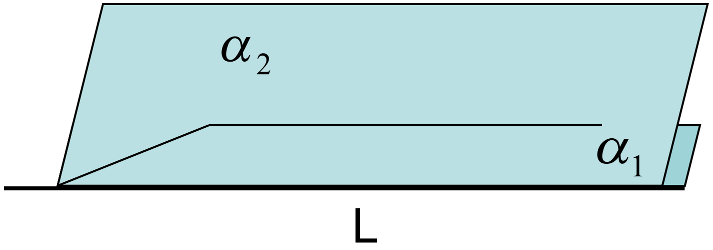
$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.}$$

Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}}$$

Общие уравнения прямой

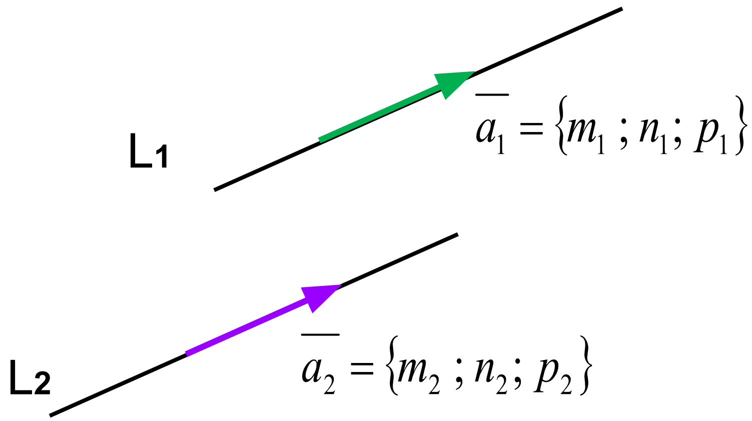
Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей:



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Условие параллельности двух прямых

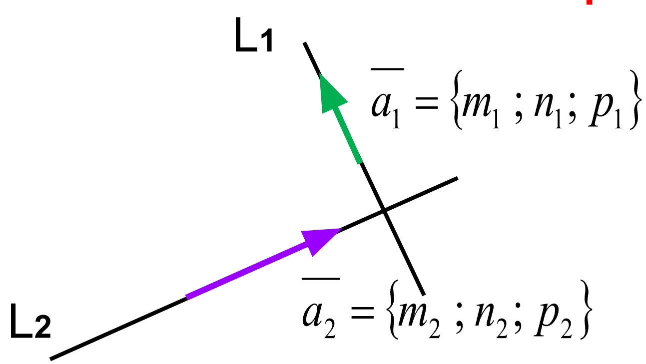


$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

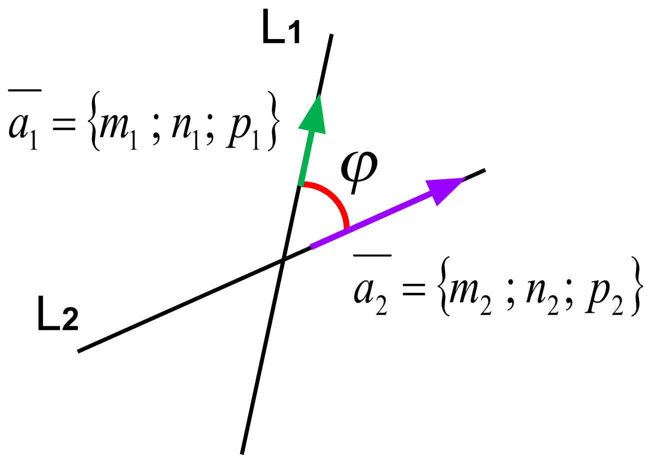
$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.}$$

Условие перпендикулярности двух прямых



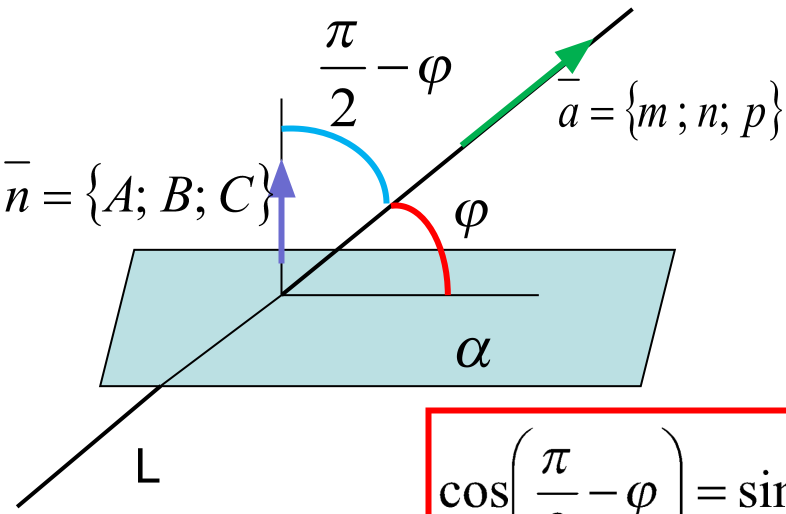
$$\boxed{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0.}$$

Угол между двумя прямыми



$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2} + p_1^{\,2}} \cdot \sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2} + p_2^{\,2}}}.}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости



Острый угол между прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяется из соотношения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\left|A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Примеры решения задач