CÁLCULO NUMÉRICO

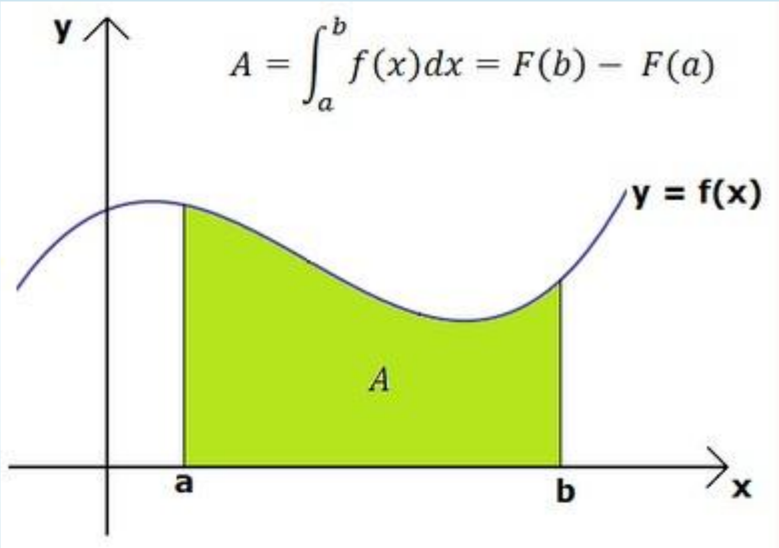
Aula 8 – Integração Numérica

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DESTA AULA

- Integração Numérica:
  - ✔ Método de Romberg – 1^0 passo
  - ✔ Extrapolação de Richardson.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – CONTINUAÇÃO

• Integral definida $I = \int_a^b f(x).dx$ é numericamente igual a área sob a curva f(x) no intervalo do domínio [a, b].



• Integração numérica – técnica empregada na determinação de uma integral definida e consiste na seguinte aproximação:

$$I = \int_a^b f(x).dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} w_i.f(x_i).\Delta x$$

MÉTODO DE ROMBERG

O método de Romberg consiste na sucessiva aplicação da extrapolação de Richardson à quadratura do trapézio composta o que resulta em uma quadratura composta de maior exatidão.

$$\boxed{I = \int_a^b f(x).dx = I_n - \frac{h^2}{12}.(b-a).f''(\xi)}$$

Onde:

$$\boxed{I_n = \frac{h}{2}.[f(a) + 2.f(a+h) + 2.f(a+2h) + \ldots + f(b)]}$$

MÉTODO DE ROMBERG - CONTINUAÇÃO

É possível demonstrar que a determinação de I é dada aproximadamente por:

$$\boxed{I \cong \int_a^b f(x).dx = \frac{h_k}{2}.[f(a) + f(b) + 2.\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + i.h_k)]}$$

Onde: $\boxed{h_k = \dfrac{b-a}{2^{k-1}}}$

ATENÇÃO!

Na expressão anterior, quando k = 1, temos que o limite superior será 0, o que significa que não há termo a ser adicionado.

MÉTODO DE ROMBERG - CONTINUAÇÃO

A partir de agora será introduzida a notação de ROMBERG $R_{k,1}$.

- k = 1

$$\boxed{R_{1,1} = \frac{h_1}{2}.[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}.[f(a) + f(b)]}$$

- k = 2

$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}.[f(a) + f(b) + 2.f(a + h_2)] = \frac{\frac{(b-a)}{2}}{2}.[f(a) + f(b) + 2.f(a + \frac{b-a}{2})]$$

$$\boxed{R_{2,1} = \frac{(b-a)}{4}.[f(a) + f(b) + 2.f(\frac{a+b}{2})]}$$

MÉTODO DE ROMBERG - CONTINUAÇÃO

Reescrevendo $R_{2,1}$ em função de $R_{1,1}$, temos:

$$R_{2,1} = \frac{(b-a)}{4}.[f(a) + f(b) + 2.f(\frac{a+b}{2})]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.\frac{(b-a)}{2}.[f(a) + f(b) + 2.f(\frac{a+b}{2})]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[R_{1,1} + 2.f(\frac{a+b}{2}).\frac{(b-a)}{2}]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[R_{1,1} + 2.f(\frac{a+b}{2}).\frac{(b-a)}{2}]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[R_{1,1} + h_1.f(a+h_2)]$$

Estácio

MÉTODO DE ROMBERG - CONTINUAÇÃO

Reescrevendo $R_{3,1}$ em função de $R_{2,1}$, temos:

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{R_{2,1} + h_2.[f(a+h_3) + f(a+3.h_3)]\}$$

Generalizando, temos que:

$$\boxed{R_{k,1} = \frac{1}{2}.[R_{k-1,1} + h_{k-1}.[\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(2i-1)h_k)] \quad k = 2, 3, \ldots, n}$$

<u>ATENÇÃO!</u>

Este é o primeiro passo do método de Romberg – aproximações via regra dos trapézios

EXEMPLO1: Utilize a Regra do Trapézio Repetida para realizar o primeiro passo do esquema da integração de Romberg para obter uma aproximação da integral $I = \int_0^{\pi} senx.dx$ para k = 1, 2, ..., 5

SOLUÇÃO: Determinação dos $R_{k,1}$:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}.[R_{k-1,1} + h_{k-1}.[\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k)] \quad k = 2, 3, ..., n$$

k = 1 ⇒

$$R_{1,1} = \frac{(b-a)}{2}.[f(a) + f(b)]$$

$$R_{1,1} = \frac{(\pi - 0)}{2}.[sen\pi + sen0]$$

$$R_{1,1} = 0$$

EXEMPLO1 – CONTINUAÇÃO

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}.[R_{k-1,1} + h_{k-1}.[\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+(2i-1)h_k)] \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

k = 2 ⇒

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[R_{1,1} + h_1.f(a+h_2)]$$

$$h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

$$h_2 = \frac{b-a}{2}$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[R_{1,1} + (b-a).f(a+\frac{b-a}{2})]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[0 + (\pi - 0).sen(0+\frac{\pi - 0}{2})]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}.[\pi.sen(\frac{\pi}{2})]$$

$$R_{2,1} = \frac{\pi}{2} = 1,57079633$$

EXEMPLO1 – CONTINUAÇÃO

k = 3⇒

$$h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

$$h_3 = \frac{b-a}{4}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{R_{2,1} + h_2.[f(a+h_3) + f(a+3.h_3)]\}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{R_{2,1} + \frac{b-a}{2}.[f(a+\frac{b-a}{4}) + f(a+3.\frac{b-a}{4})]\}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{R_{2,1} + \frac{\pi-0}{2}.[f(0+\frac{\pi-0}{4}) + f(a+3.\frac{\pi-0}{4})]\}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{R_{2,1} + \frac{\pi-0}{2}.[f(0+\frac{\pi-0}{4}) + f(0+3.\frac{\pi-0}{4})]\}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{1{,}57079633 + \frac{\pi}{2}.[sen(\frac{\pi}{4}) + sen(\frac{3.\pi}{4})]\}$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}.\{1{,}57079633 + \frac{\pi}{2}.[sen(\frac{\pi}{4}) + sen(\frac{3.\pi}{4})]\}$$

$$R_{3,1} = 1{,}8961189$$

EXEMPLO1 – CONTINUAÇÃO

$$h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}} \Rightarrow h_4 = \frac{b-a}{8}$$

k = 4

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}.\{R_{3,1} + h_3.[f(a+h_4) + f(a+3.h_4) + f(a+5h_4) + f(a+7.h_4)]\}$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}.\{R_{3,1} + h_3.[f(a+h_4) + f(a+3.h_4) + f(a+5h_4) + f(a+7.h_4)]\}$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}.\{R_{3,1} + \frac{b-a}{4}.[f(a+\frac{b-a}{8}) + f(a+3.\frac{b-a}{8}) + f(a+5.\frac{b-a}{8}) + f(a+7.\frac{b-a}{8})]\}$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}.\{R_{3,1} + \frac{\pi-0}{4}.[f(0+\frac{\pi-0}{8}) + f(0+3.\frac{\pi-0}{8}) + f(0+5.\frac{\pi-0}{8}) + f(0+7.\frac{\pi-0}{8})]\}$$

$$R_{4,1} = \frac{1}{2}.\{1,8961189 + \frac{\pi}{4}.[sen(\frac{\pi}{8}) + sen(\frac{3\pi}{8}) + sen(\frac{5\pi}{8}) + sen(\frac{7\pi}{8})]\}$$

$$R_{4,1} = 1,974231$$

EXEMPLO1 – CONTINUAÇÃO

- k = 5 ⇒ $R_{5,1}$ = 1,99357034
- k = 6 ⇒ $R_{6,1}$ = 1,99839336
- Valor exato:

$$I = \int_0^{\pi} senx.dx = -\cos x + k = (-\cos\pi + k) - (-\cos 0 + k)$$

$$I = [-(-1) + k] - [-1 + k] = 2$$

$$\boxed{Erro = \frac{|2{,}000000 - 1{,}998393\,|}{|2{,}000000\,|} = 0{,}0008 = 0{,}08\%}$$

- CONVERGÊNCIA LENTA ⇒ extrapolação de Richardson

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

Com o intuito de acelerar a convergência do método de Romberg, a partir do seu primeiro passo é possível fazer a extrapolação de Richardson e chegar a seguinte fórmula de recorrência.

$$\boxed{R_{k,j} = \left[R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \right]}$$

TABELA DE ROMBERG

A partir da fórmula de recorrência $R_{k,j} = \left[R_{k,j-1} + \dfrac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \right]$ chega-se à tabela de Romberg abaixo.

$R_{1,1}$					
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
:	:	:	:		
$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	....	$R_{n,n}$

EXEMPLO2: Utilize o método de Romberg para obter uma aproximação da integral $I = \int_0^{\pi} senx.dx$

Solução:

Tabela de Romberg:

$R_{1,1}$		
$R_{2,1}$	$R_{2,2}$	
$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$

Do exemplo1: $R_{1,1} = 0$; $R_{2,1} = 1,57079633$ e $R_{3,1} = 1,8961189$

EXEMPLO2 - CONTINUAÇÃO

$$R_{k,j} = \left[R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \right]$$

- k = j = 2

$$R_{2,2} = \left[R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{4^{2-1} - 1} \right] = 1{,}57079633 \quad + \quad \frac{1{,}57079633 - 0}{3} = 2{,}094395$$

- k = 3 e j = 2

$$R_{3,2} = \left[R_{3,1} + \frac{R_{3,1} - R_{2,1}}{4^{2-1} - 1} \right] = 1{,}8961189 \quad + \quad \frac{1{,}8961189 - 1{,}57079633}{3} = 2{,}004559$$

EXEMPLO2 - CONTINUAÇÃO

$$R_{k,j} = \left[R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1} \right]$$

- k = j = 3

$$R_{3,3} = \left[R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{4^{3-1} - 1} \right] = 2{,}004559 + \frac{2{,}004559 - 2{,}094395}{15} = 1{,}998569$$

$$\boxed{Erro = \frac{|2{,}000000 - 1{,}998569|}{|2{,}000000|} = 0{,}00072 = 0{,}072\%}$$

RESUMINDO

Nesta aula vocês estudaram:

- Integração Numérica:
  - ✔ Método de Romberg – 1^0 passo
  - ✔ Extrapolação de Richardson.