Вневписанная окружность

Автор:
Ражева Анастасия ,
Ученица 10 «А» класс
, ГБОУ лицей-интернат «ЦОД»
Руководитель: Каткова Г.Г..

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.
Г. Галилей

Содержание

- История треугольника и вневписанной окружности.
- Задачи , приводящие к понятию вневписанной окружности
- Вневписанная окружность ,ее свойства и ее связь с основными элементами треугольника
- Применение вневписанной окружности и ее свойств к решению задач
- Заключение

История треугольника

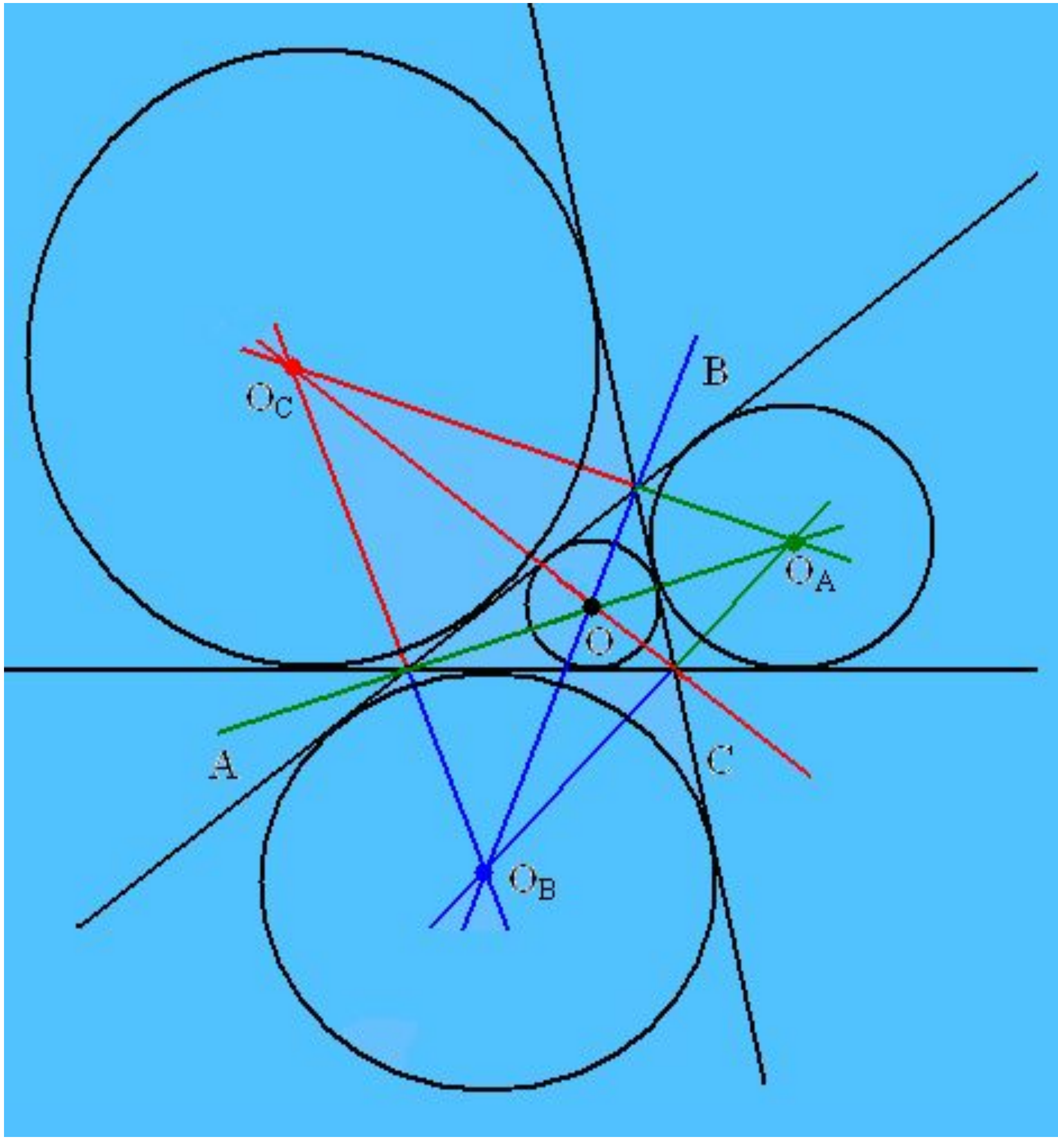
Простейший из многоугольников — треугольник — играет в геометрии особую роль. За несколько тысячелетий геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о «геометрии треугольника» как о самостоятельном разделе элементарной геометрии.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах можно найти в египетских папирусах, которым более 4000 лет. Через 2000 лет в Древней Греции изучение свойств треугольника достигает высокого уровня — достаточно вспомнить теорему Пифагора и формулу Герона.

Центральное место в геометрии треугольника занимают свойства так называемых замечательных точек и линий.

Вневписанная окружность

Задача: вписать в данный треугольник окружность –имеет единственное решение. Изменим условие: построить окружность , касающуюся трех различных прямых AB, BC, AC- и однозначность решения пропадет.

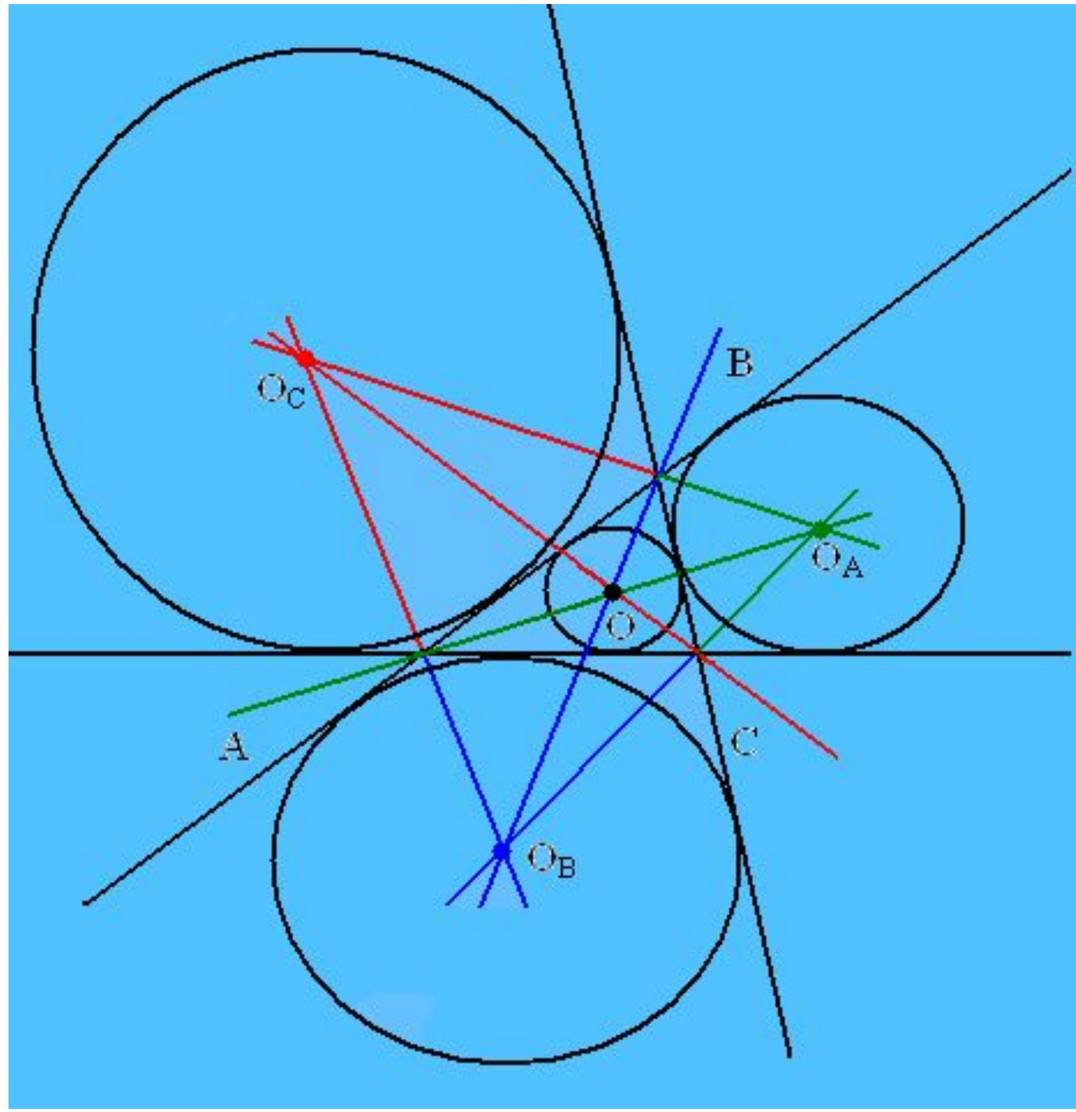


Вневписанная окружность

В итоге получаем четыре окружности с центрами

O, O_a, O_b, O_c, касающиеся трех данных несовпадающих прямых.

При этом одна из них будет вписанной в треугольник окружностью, а три других — вневписанными окружностями.



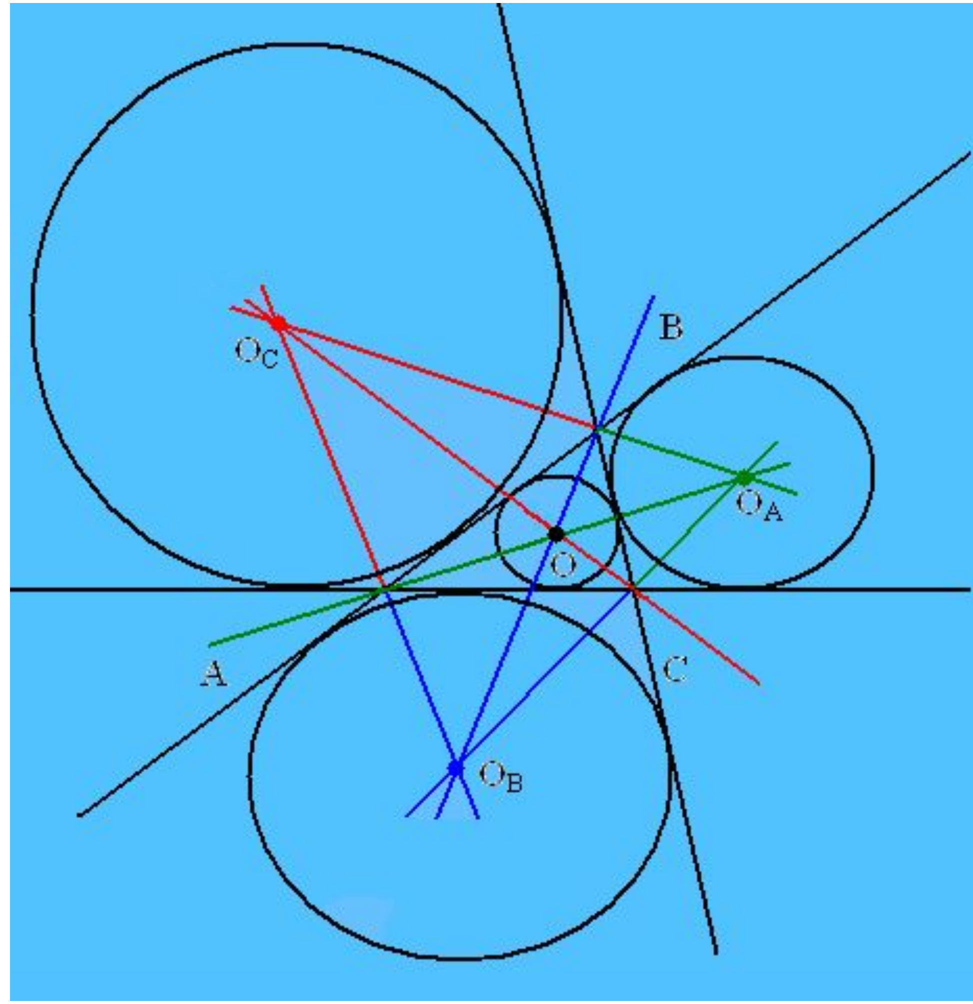
Вневписанная окружность

Определение.

Вневписанной окружностью треугольника

называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других.

Для каждого треугольника существует три вневписанных окружности, которые расположены вне треугольника, почему они и получили название вневписанных.

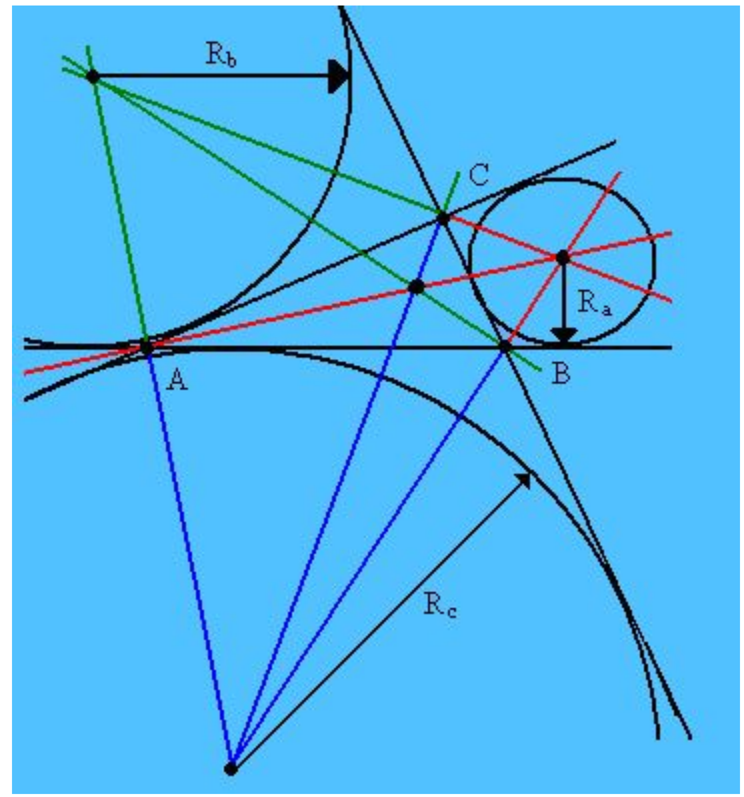


Вневписанная окружность

Центрами **вневписанных окружностей являются точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника.**

Центр вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрисы одного внутреннего угла и биссектрис внешних углов при двух других вершинах. Шесть биссектрис треугольника — три внутренние и три внешние — пересекаются по три в четырех точках — центрах вписанной и трех вневписанных окружностей.

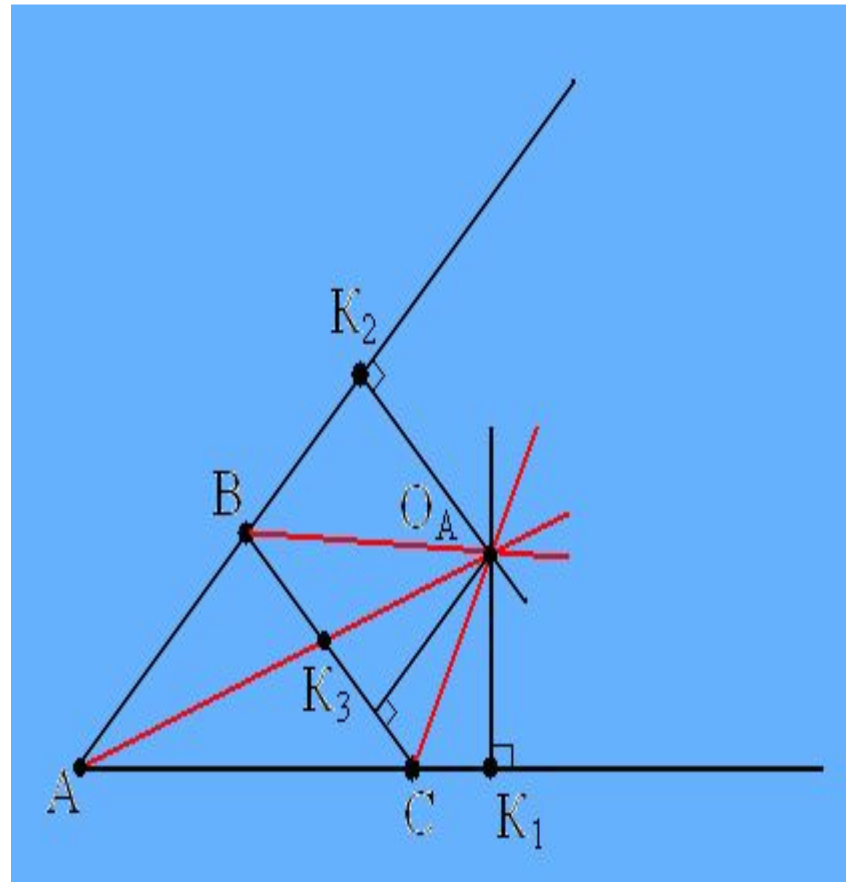
Радиусом **вневписанной окружности является отрезок перпендикуляра, проведенного из центра окружности к какой-либо стороне треугольника или ее продолжению.**



Свойства вневписанной окружности и ее связь с основными элементами треугольника

Теорема.

Пусть K_1 - точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AC треугольника ABC. Тогда длина отрезка AK_1 равна полупериметру треугольника ABC.



Свойства вневписанной окружности и ее связь с основными элементами треугольника

Доказательство:

1) Пусть точки K_2 и K_3 — точки касания вневписанной окружности с прямыми AB и BC соответственно.

2) $CK_1 = CK_3$, $BK_2 = BK_3$, $AK_1 = AK_2$ (по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки).

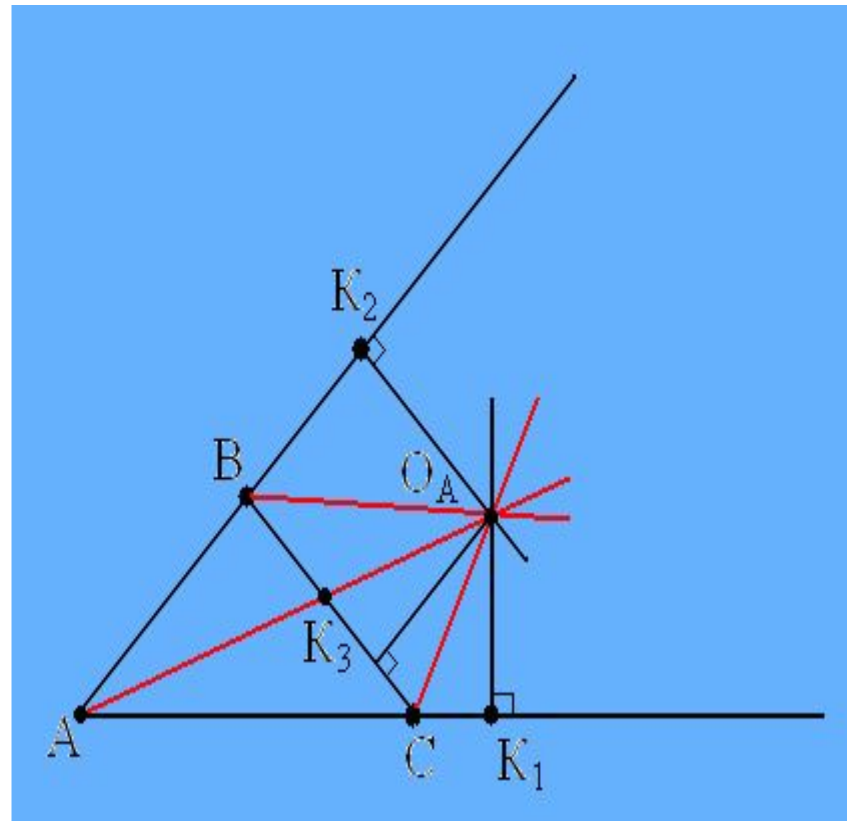
3) $P = AC + CB + AB =$

$= AC + CK_3 + BK_3 + AB =$

$= AC + CK_1 + BK_2 + AB =$

$= AK_1 + AK_2 = 2AK_1$

Значит, $AK_1 = P : 2$



Основные обозначения

a, *b*, *c* — длины сторон *BC*,*CA* и *AB*;

α, β, γ- величины углов при вершинах *A*, *B*, *C*;

p — полупериметр;

R— радиус описанной окружности;

r— радиус вписанной окружности;

Соотношения между радиусами вписанной, описанной и вневписанной окружностей

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2$$

$$r_a r_b r_c = pS$$

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}}$$

Формулы , выражающие связь с основными элементами треугольника

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b}$$

Решение задач

Задача 1. Две непересекающиеся окружности с радиусами R_1 и R_2 касаются стороны прямого угла с вершиной A. Общая внутренняя касательная с окружностями пересекает стороны угла в точках B и C. Найти площадь треугольника ABC.

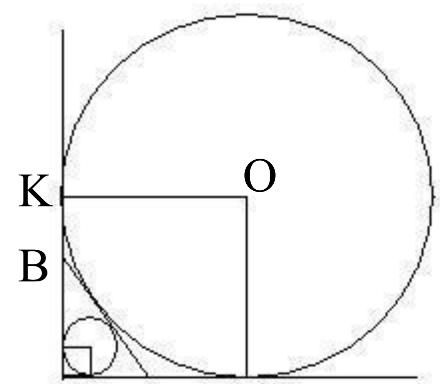


Рис. 1

Решение: так как обе окружности касаются сторон угла, то одна из них будет вписанной в треугольник ABC, а другая вневписанной. Пусть $R_1 \propto R_2$, где R_1 и R_2 – соответственно радиусы вписанной и вневписанной окружностей (рис. 1). Если O – центр вневписанной окружности, а точки K и M – её точки касания со сторонами угла A, легко доказать, что AKOM – квадрат со стороной R_2. По теореме 2 $AK = \frac{AC + AB + BC}{2} = p$. Но так как $AK = R_2$, то $p – R_2$. А $R_1 = \frac{S}{p}$. Отсюда следует, $S = R_1 \times p$, $S = R_1 \times R_2$.

Ответ: $S = R_1 \times R_2$.

Решение задач

Задача 2. К двум непересекающимся окружностям проведены две общие внешние касательные и общая внутренняя касательная. Докажите, что отрезок внутренней касательной, заключенный между внешними касательными, равен отрезку внешней касательной, заключенному между точками касания.

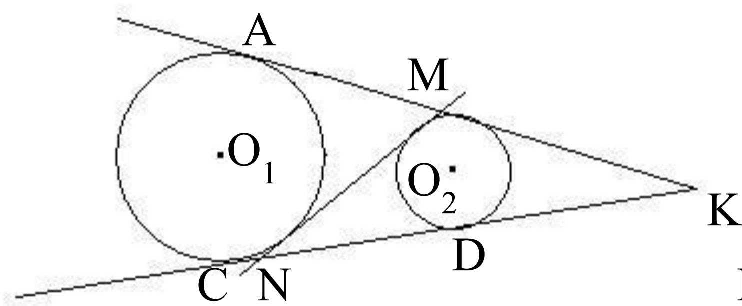


Рис. 2

Решение: Пусть даны две окружности. Точки касания окружностей с первой внешней касательной – A и B, со второй – C и D(рис. 2).

Внутренняя касательная пересекает внешние в точках M и N. Продолжим прямые AB и CD. До их пересечение в точке K. Тогда окружность с центром O_2 является вписанной в треугольник MNK, а окружность с центром O_1 – вневписанной. Обозначим сторону MN треугольника MNK – a и его периметр – p. Тогда (по т.2) AK=p и BK=p-a. Значит, AB=a, то есть AB=MN. Аналогично CD=MN.

Решение задач

Задача 3. В равнобедренном треугольнике с основанием 12 вписана окружность, к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметра малы треугольников равна 48. Найдите боковую сторону данного треугольника.

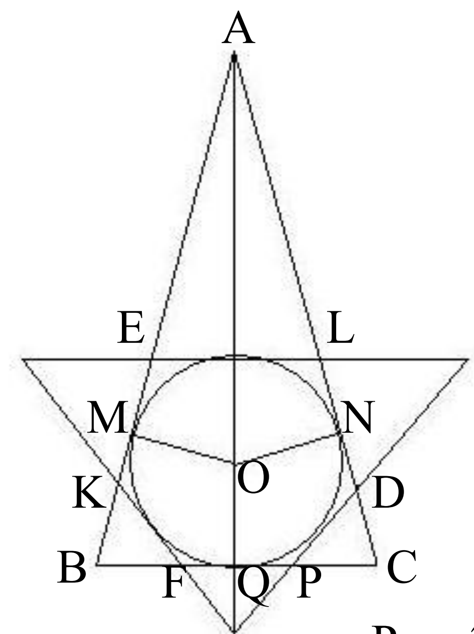


Рис. 3

Решение: Окружность с центром O – вневписанная окружность треугольников EAL, BKF и PDC. По теореме 2: AM = $\frac{1}{2}P_{\Delta EAL}$, BM = $\frac{1}{2}P_{\Delta BKF}$, BQ = $\frac{1}{2}P_{\Delta BKF}$, QC= $\frac{1}{2}P_{\Delta PDC}$, CN = $\frac{1}{2}P_{\Delta PDC}$ AN = $\frac{1}{2}P_{\Delta EAL}$ Из этого следует, что

P = $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta EAL} + P_{\Delta BKF} + P_{\Delta PDC} = 48$ Значит, AB = $\frac{P_{\Delta ABC} - BC}{2} = \frac{48-12}{2} = 18$

Ответ: 18.

Задача из журнала «Квант»

Задача: Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей вневписанной окружностью лежат на одной прямой.

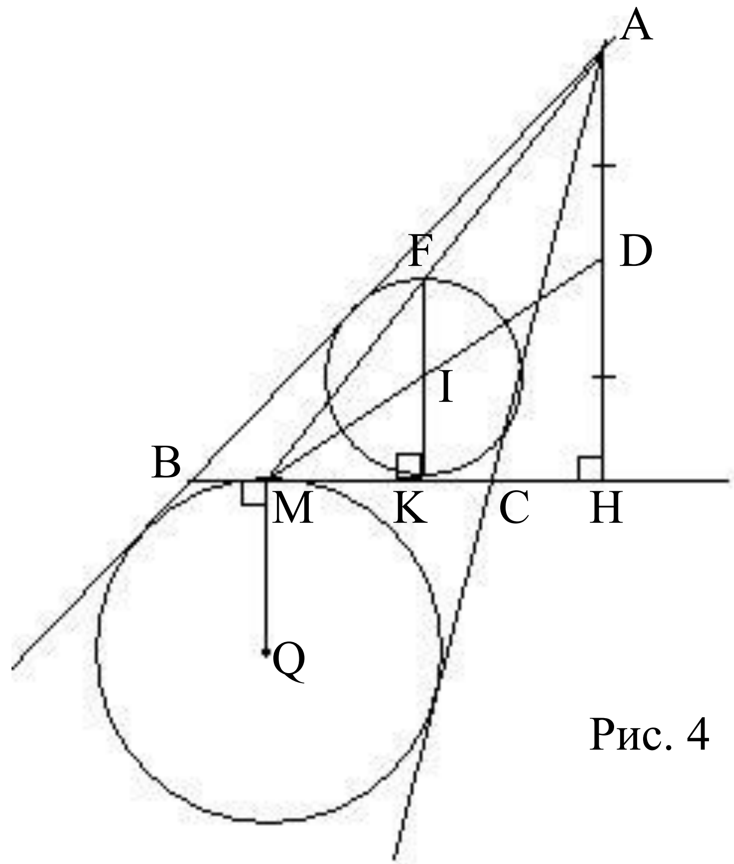


Рис. 4

Задача из журнала «Квант»

Решение: Рассмотрим треугольник ABC, в котором AH – высота, точка D – её середина, точки I и Q – центры вписанной и вневписанной (касающейся стороны BC) окружностей соответственно, K и M – точки касания этих окружностей со стороной BC (рис. 4).

Проведем KF – диаметр вписанной окружности, тогда точки A, F и M лежат на одной прямой. Так как KF || AH, то медиана MD треугольника AMH проходит через середину отрезка KF, то есть содержит точку I.

Задача из ГИА

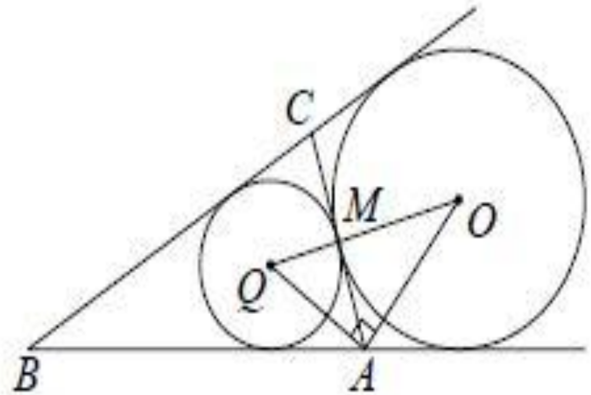
20

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Из прямоугольного треугольника OAQ (AQ и AO — биссектрисы смежных углов) находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно,

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$



Ответ: $4{,}5$.

Решение задач

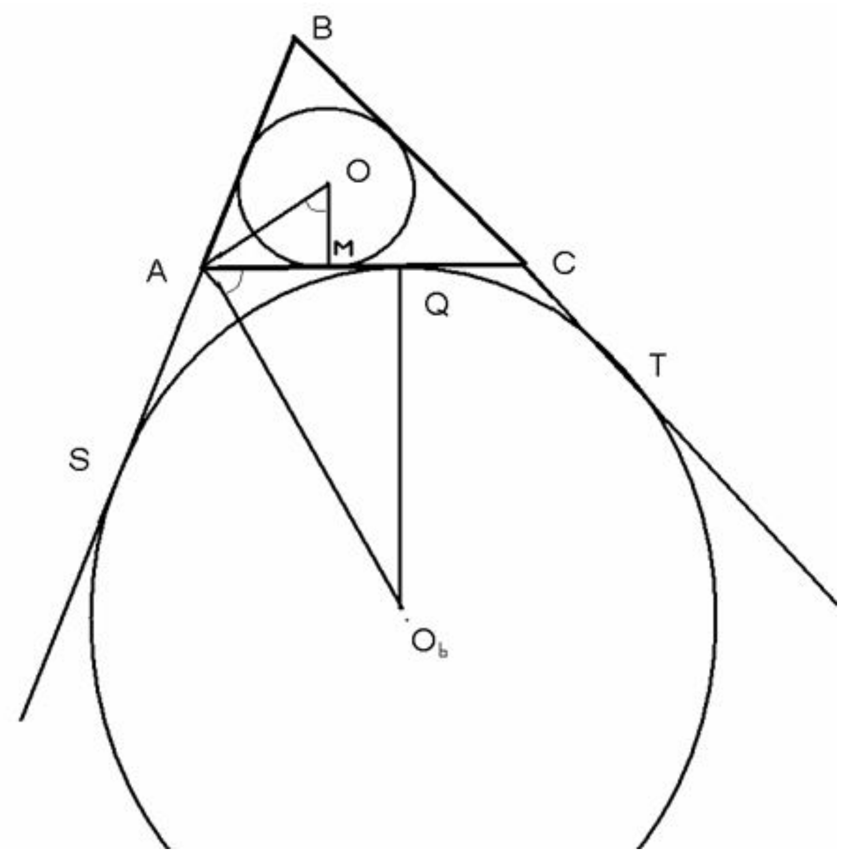
Задача .

Дан треугольник ABC со сторонами a, в, с. Найти длину отрезков, на которые делятся стороны треугольника точками касания вневписанных окружностей.

Решение.

ПустьAQ=y. Тогда AS=y,QC=CT=b-y,BS=BT, а поэтому c+y=a+(b-y),

Аналогично можно вычислить и длины других отрезков.



Заключение

Геометрия начинается с треугольника, а треугольник неисчерпаем. Две с половиной тысячи лет постоянно открываются его новые свойства. К сожалению, в школьной программе вневписанной окружности уделяется незначительное время и внимание, но при более подробном знакомстве можно увидеть в ней скрытую красоту и силу, можно рассматривать её как подспорье в решении геометрических задач.

Литература

- http://rgp.nm.ru/knigi/kulanin5.html
- http://www.geometr.info/geometriia/treug/radiusy.html
- http://schools.techno.ru/sch758/aishat/bis.htm
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Киселева Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия. Учебник для 10-11 классов средней школы, 9 издание.- М.: Просвещение, 2000.
- Биссектрисы вписанной и вневписанной окружности треугольника // Квант №7, 1987.
- Гнеденко Б.В. Энциклопедический словарь юного математика. - М.: «Педагогика», 1989.
- Гохидзе М. Г. Вневписанная окружность // Математика в школе №3, 1989.
- Гохидзе М. Г. О вневписанной окружности и задачах по стереометрии.// Математика в школе №5, 1987.
- О свойствах центра вневписанной окружности // Квант №2, 2001.
- Шарыгин Н. Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. - М.: Просвещение,1991.-С.138-140.