

## Электрическое поле в диэлектриках

1. Полярные и неполярные молекулы. Вектор поляризации.
2. Диполь в электрическом поле.
3. Электрическое смещение.  
Поле внутри диэлектрика.
4. Сегнетоэлектрики.  
Пьезоэлектрический эффект.

# 1. Полярные и неполярные молекулы.

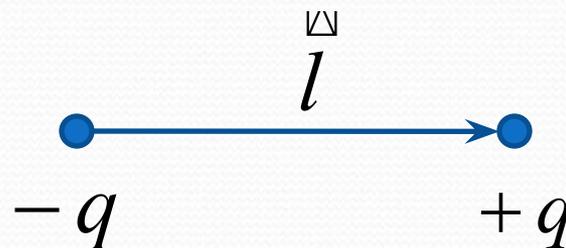
## Вектор поляризации

Молекула, у которой центры тяжести зарядов разных знаков в отсутствие поля совмещены называется **неполярной**.

Молекула, у которой центры тяжести зарядов разных знаков в отсутствие поля не совпадают называется **полярной**.

Полярная молекула обладает **собственным электрическим моментом**

$$\vec{p} = q\vec{l}$$



Заряды, возникающие на диэлектриках в электрическом поле, называются **поляризационными зарядами**.

Неполярная молекула ведет себя во внешнем поле как упругий диполь.

Полярная молекула ведет себя во внешнем поле как жесткий диполь.

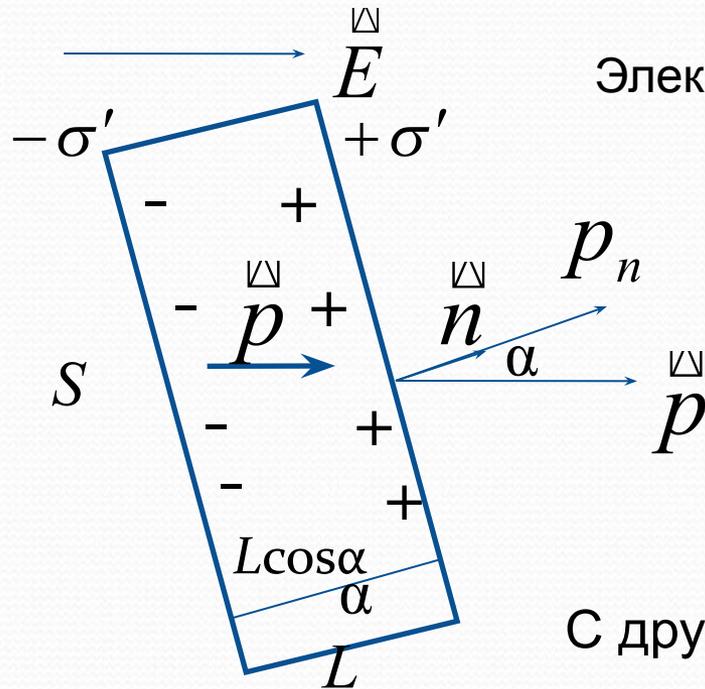
Вектором поляризации диэлектрика называется электрический момент единицы объема диэлектрика, он равен векторной сумме электрических моментов всех молекул, заключенных в единице объема.

$$\vec{p} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$$

У диэлектриков любого типа (кроме сегнетоэлектриков) вектор поляризации связан с напряженностью поля в той же точке простым соотношением  $\vec{p} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ , где

$\chi$  - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика

Зная вектор  $\vec{p}$ , можно определить поляризационные заряды



Электрический момент призмы:

$$p_V = q'L \quad q' = \sigma'S$$

$$p_V = \sigma'SL$$

$$V = SL \cos \alpha$$

$$SL = \frac{V}{\cos \alpha}$$

Тогда: 
$$p_V = \frac{\sigma'V}{\cos \alpha}$$

С другой стороны: 
$$p_V = pV \quad p = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}$$

Из сравнения:

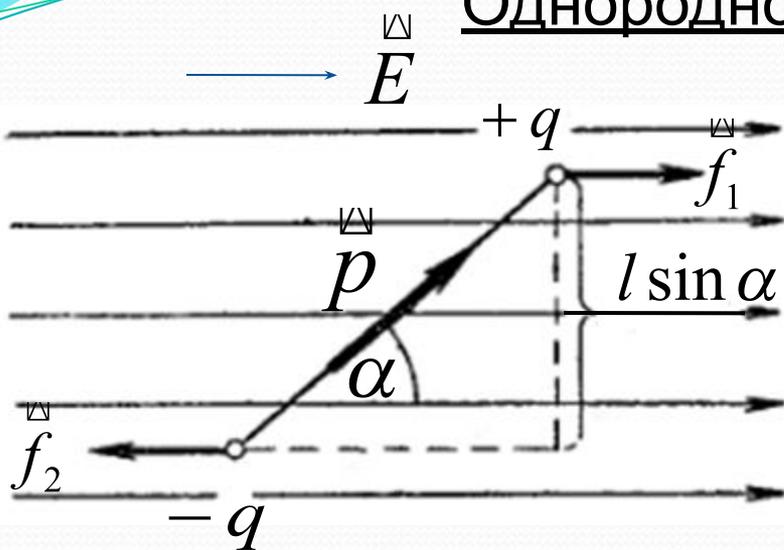
$$\sigma' = p \cos \alpha = p_n$$

$$\sigma' = p_n$$

**Поверхностная плотность поляризационных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.**

## 2. Диполь в электрическом поле

### Однородное поле



$$|f_1| = |f_2| = qE$$

Момент пары сил, действующих на диполь:

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$$

$$\vec{M} = [\vec{p} \vec{E}]$$

При увеличении угла между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  на  $d\alpha$  нужно совершить работу:

$$dA = M \cdot d\alpha = pE \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Эта энергия идет на увеличение потенциальной энергии, которой обладает диполь в поле.

$$dW = pE \sin \alpha \cdot d\alpha$$

После интегрирования:

$$W = -pE \cos \alpha = -\vec{p} \vec{E}$$

$$W = -\vec{p} \vec{E}$$

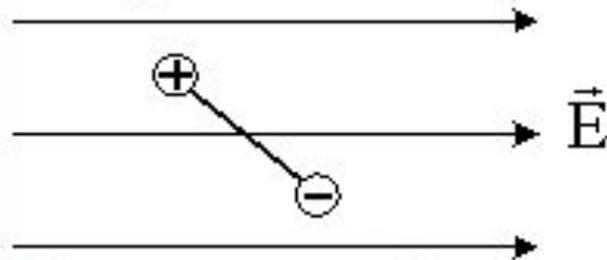
- энергия диполя в электрическом поле

$W = -pE$       наименьшее значение энергии

$W = pE$       наибольшее значение энергии

Пример:

Жесткий электрический диполь находится в однородном электростатическом поле.



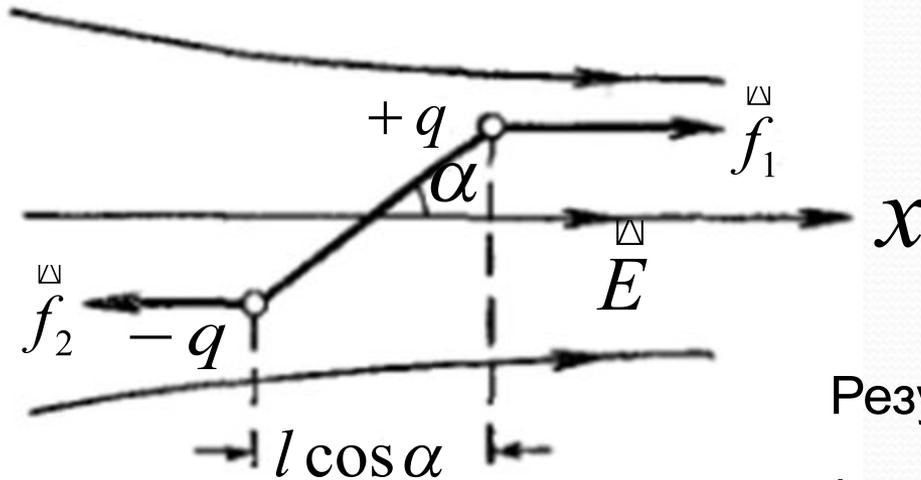
Момент сил, действующий на диполь, направлен...

Направление момента сил, действующих на диполь, совпадает с направлением векторного произведения.

$$\vec{M} = [\vec{p} \vec{E}]$$

Момент сил, действующих на диполь, направлен от нас.

## Неоднородное поле



$$\Delta x = l \cos \alpha$$

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha$$

Результирующая сила  $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$

будет отлична от нуля.

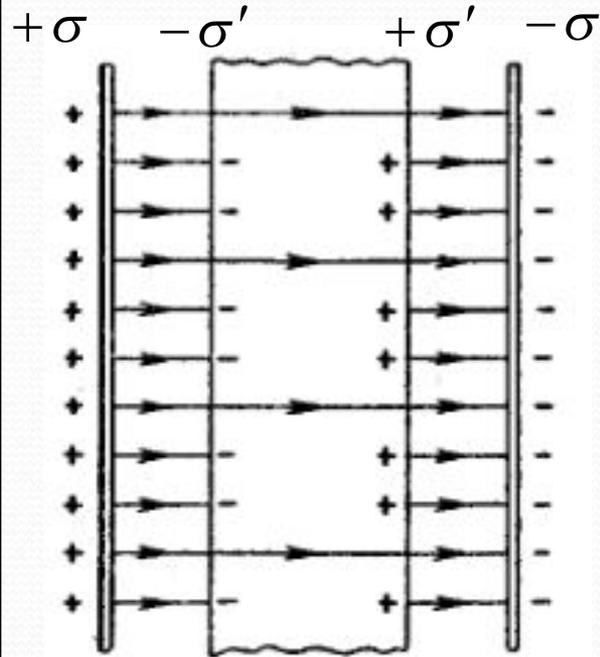
Проекция результирующей силы на ось  $x$  равна

$$f = q \Delta E = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha$$

В неоднородном поле на диполь кроме вращательного момента действует сила, под действием которой диполь будет либо втягиваться в область более сильного поля (угол  $\alpha$  - острый), либо выталкиваться из него (угол  $\alpha$  - тупой).

### 3. Электрическое смещение. Поле внутри диэлектрика

Нескомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются **связанными**.



$\sigma > \sigma'$

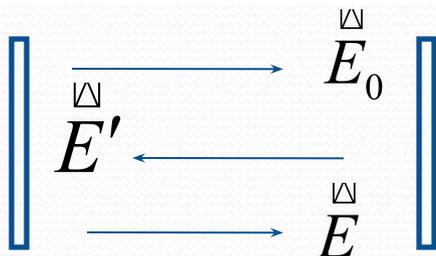
$\vec{E}$  - поле внутри диэлектрика  
 $\vec{E}_0$  - поле вне диэлектрика, созданное свободными зарядами  
 $\vec{E}'$  - поле, созданное связанными зарядами

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

Для определения  $\vec{E}$  запишем теорему Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q + \sum q') \quad (1)$$

$$\Phi_p = \oint_S \vec{p}_n dS = -\sum q' \quad (2)$$



Объединив (1) и (2), получим:

$$\varepsilon_0 \Phi_E + \Phi_p = \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p})_n dS = \sum q$$

**Электрическим смещением** называется физическая величина, определяемая соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$$

Тогда

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum q$$

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$$

-теорема Гаусса  
-для потока вектора

$\vec{D}$

Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.

В вакууме  $\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

- безразмерная величина называется относительной диэлектрической проницаемостью среды.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

Только в изотропном диэлектрике  $\vec{D} \parallel \vec{E} \quad [D] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

## Поле внутри плоской пластины диэлектрика

$E = E_0 - E' \quad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \quad E' = 0$     Вне диэлектрика  
 $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma')$     (\*)

Вне диэлектрика  $E = E_0$

Учитывая, что  $E \perp$  к поверхности пластины  $E_n = E$

$$\sigma' = p_n = \chi \varepsilon_0 E$$

Получим:  $E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0}$

$$E = E_0 - \chi E \Rightarrow E(1 + \chi) = E_0 \Rightarrow \boxed{E = \frac{E_0}{1 + \chi}} \quad \boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}} \quad (**)$$

Найдем поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma'$

Из выражений (\*) и (\*\*) следует:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma') \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma}{\varepsilon} = \sigma - \sigma' \quad \rightarrow \quad \sigma' = \sigma - \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma$$

## 4. Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект

Группа веществ, обладающая самопроизвольной (спонтанной) поляризацией в отсутствие внешнего поля, называется **сегнетоэлектриками**.

Свойства сегнетоэлектриков:

1.  $\varepsilon$  сегнетоэлектриков достигает нескольких тысяч

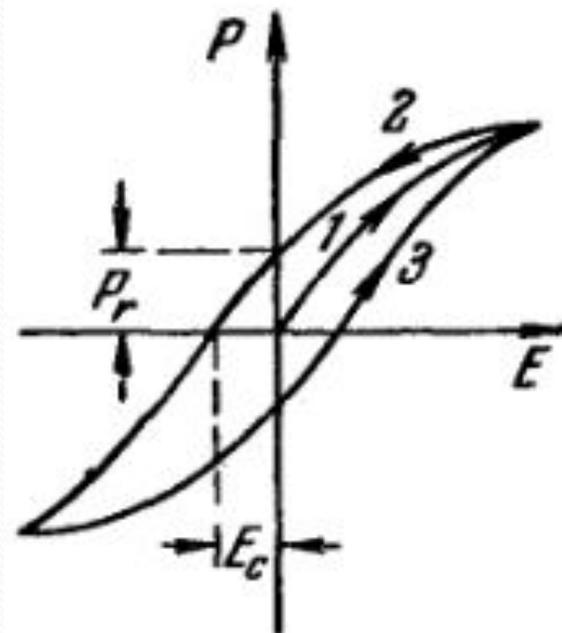
2. Зависимость  $\overline{D}$  от  $\overline{E}$  не является линейной.

$$\varepsilon = f(E)$$

3. При измерениях поля значения вектора поляризации  $\mathbf{p}$  (а следовательно, и  $\mathbf{D}$ ) отстают от напряженности поля  $\mathbf{E}$ , в результате чего  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{D}$  определяется не только величиной в данный момент, но и предшествующими значениями  $\mathbf{E}$ , т. е. зависят от предыстории диэлектрика. Это явление называется гистерезисом.

$P_r$  - остаточная поляризация

$E_c$  - коэрцитивная сила



4. Наличие **доменной** структуры. Дипольные моменты отдельных областей (доменов) имеют одинаковую ориентацию.

5. Для каждого сегнетоэлектрика имеется температура, выше которой вещество утрачивает необычные свойства и становится обычным диэлектриком. Эта температура называется **точкой Кюри**.

6. Пьезоэлектрический эффект.

Сегнетоэлектрики при деформации поляризуются.

**Обратный пьезоэлектрический эффект** – поляризация под действием электрического поля сопровождается механическими деформациями.

# Проводники в электрическом поле

1. Распределение зарядов на проводнике
2. Проводник во внешнем электрическом поле
3. Емкость. Конденсаторы.  
Соединение конденсаторов.

# 1. Распределение зарядов в проводнике

**Проводники** – тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему объему под действием сколь угодно малой силы.

**Условия равновесия зарядов в проводнике:**

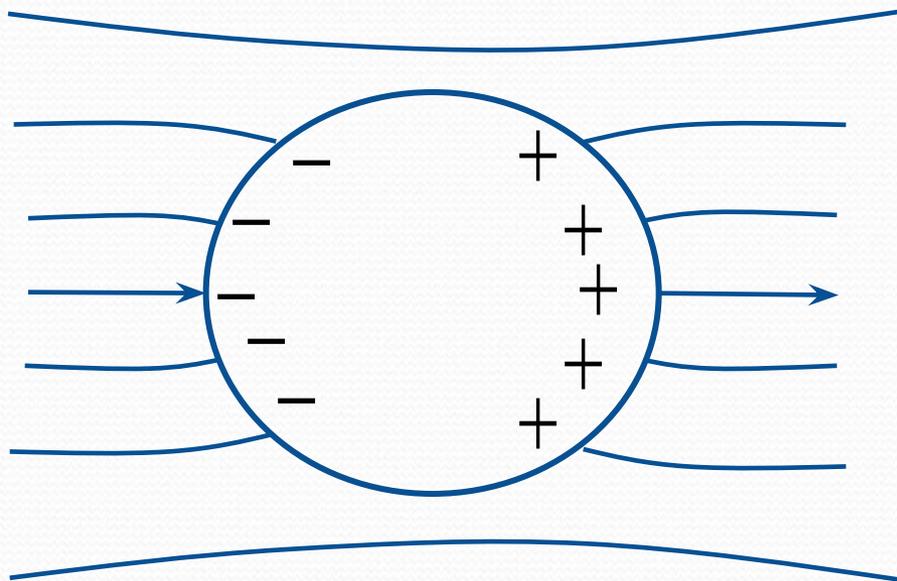
- 1) Напряженность поля внутри проводника должна быть равна нулю. Т.е. потенциал внутри проводника постоянный.
- 2) Напряженность поля на поверхности проводника должна быть в каждой точке направлена по нормали к поверхности. Т.е. поверхность проводника будет эквипотенциальной.

При равновесии внутри проводника нет зарядов, они распределены по поверхности. Плотность зарядов определяется кривизной поверхности проводника – растет с увеличением положительной кривизны.

Напряженность поля вблизи остриев может быть так велика, что **ионизируются молекулы газа**, окружающего проводник.

## 2. Проводник во внешнем электрическом поле

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле, носители заряда приходят в движение: положительные – в направлении вектора напряженности, отрицательные – в противоположном. В результате, у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые **индуцированными зарядами**. Поле индуцированных зарядов противоположно внешнему полю.



### 3. Электроёмкость. Конденсаторы

Электроёмкость численно равна заряду, сообщенное которого проводнику повышает его потенциал на единицу.

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$[C] = \Phi$$

$$\Phi = \frac{Кл}{В}$$

Потенциал заряженного шара радиуса R

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon R}$$

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$$

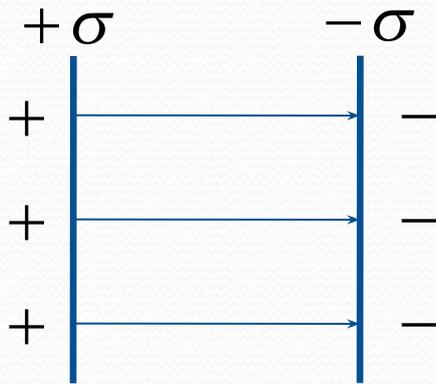
Электроёмкость шара

**Конденсатор** – это система двух проводников, у которой после сообщения проводникам равных зарядов противоположного знака, силовые линии начинаются на одном проводнике и оканчиваются на другом. Проводники разделены слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводника. Проводники называют обкладками конденсатора.

**Емкостью конденсатора** называется физическая величина, пропорциональная заряду и обратно пропорциональная разности потенциалов между обкладками.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

# Емкость плоского конденсатора



$S$  Площадь обкладок

$q$  Заряд обкладки

$d$  Расстояние между обкладками

Напряженность поля между обкладками конденсатора

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Разность потенциалов между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

Емкость цилиндрического конденсатора

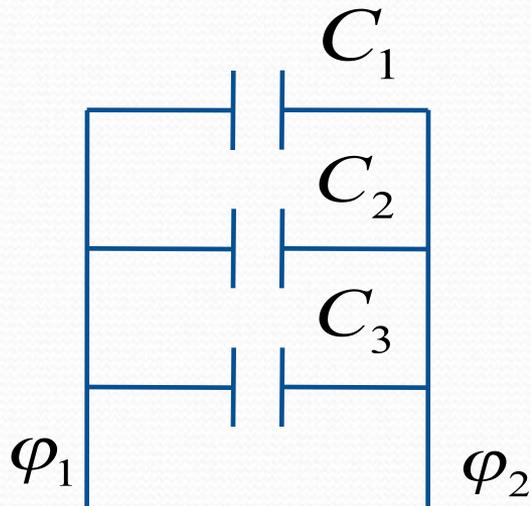
$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

# Соединения конденсаторов

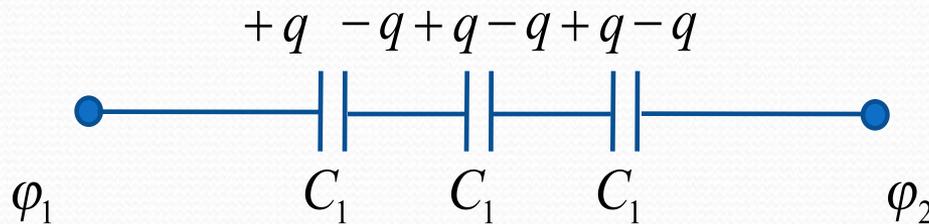
Параллельное соединение конденсаторов



$$q = \sum q_i = \sum C_i (\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum C_i$$

$$C = \sum C_i$$

Последовательное соединение конденсаторов



$$U_i = \frac{q}{C_i}$$

$$\sum U_i = \varphi_1 - \varphi_2 = \sum \frac{q}{C_i} = q \sum \frac{1}{C_i}$$

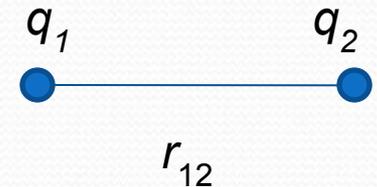
$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

# Энергия электростатического поля

1. Энергия системы зарядов.
2. Энергия заряженного уединенного проводника.
3. Энергия заряженного конденсатора.
4. Сила взаимодействия между пластинами плоского конденсатора.
5. Энергия электростатического поля.  
Плотность энергии.

# 1. Энергия системы зарядов

Электростатические силы взаимодействия консервативны; следовательно, система зарядов обладает потенциальной энергией.



Сближение зарядов можно произвести, приближая  $q_1$  к  $q_2$  либо  $q_2$  к  $q_1$ . В обоих случаях совершается одинаковая работа. Работа переноса заряда  $q_1$  из бесконечности в точку, удаленную от  $q_2$  на  $r_{12}$ , определяется по формуле:

$$A_1 = q_1 \phi_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}}$$

где  $\phi_1$  — потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в той точке, в которую перемещается заряд  $q_1$ .

Работа переноса заряда  $q_2$  из бесконечности в точку, удаленную от  $q_1$  на  $r_{12}$ , равна

$$A_2 = q_2 \phi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

$$A_1 = A_2 = W$$

$$W = q_1 \phi_1 = q_2 \phi_2$$

Формула для энергии системы зарядов, в которую входят оба заряда:

$$W = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$$

Энергия системы трех зарядов:

$$W = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i\varphi_i$$

При объёмном распределении зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV$$

## 2. Энергия заряженного уединенного проводника

Система зарядов на проводнике обладает энергией, равной работе, которую нужно совершить, чтобы перенести все заряды из бесконечности и расположить их на поверхности проводника.

При переносе второй порции заряда  $\Delta q$  требуется совершать работу:

$$\Delta A = \varphi \Delta q = \frac{q}{C} \Delta q$$

$\varphi$  — потенциал проводника, обусловленный уже имеющимся на нем зарядом  $q$ ,  
 $C$  — емкость проводника.

Работа идет на увеличение энергии проводника.

$$dW = \frac{1}{C} q dq$$

Откуда:

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

- энергия проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

получим:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}$$

### 3. Энергия заряженного конденсатора

Процесс возникновения на обкладках конденсатора зарядов  $+q$  и  $-q$  можно представить так, что от одной обкладки последовательно отнимаются малые порции заряда  $\Delta q$  и перемещаются на другую обкладку.

Работа переноса очередной порции заряда равна:

$$\Delta A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U,$$

где  $U$  — напряжение на конденсаторе.

Тогда энергия:  $dW = dA = U dq = \frac{q}{C} dq$

Интегрируя, приходим к формуле для **энергии заряженного конденсатора**

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

#### 4. Сила взаимодействия между пластинами плоского конденсатора.

Обозначим переменный зазор между обкладками через  $x$ .

$$W = \frac{q^2}{2C} \quad \text{т.к.} \quad C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{x} \quad \text{то} \quad W = \frac{q^2 x}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

Будем считать заряд на обкладках постоянным (т.е. конденсатор отключен от источника напряжения).

Воспользуемся соотношением, связывающим потенциальную энергию и силу:

$$f = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} \quad (\text{знак «—» указывает на то, что сила стремится уменьшить } x, \text{ т. е. является силой притяжения})$$

## 5. Энергия электростатического поля

Для плоского конденсатора:  $W = \frac{CU^2}{2}$        $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \rightarrow$

$$W = \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2d} \quad W = \frac{\epsilon\epsilon_0 S d U^2}{2 d^2} \quad \frac{U}{d} = E \quad \boxed{W = \frac{\epsilon\epsilon_0 S d E^2}{2}}$$

$Sd = V$  - объём, занимаемый полем.

$$\boxed{W = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V}$$

Связь энергии с напряженностью поля.

$$\boxed{w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}}$$

Если поле однородно, то заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью  $w$ .

$$\boxed{w = \frac{(\epsilon\epsilon_0 E)E}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}}$$

Поляризация диэлектрика состоит в том, что заряды, входящие в состав молекул, смещаются из своих положений под действием электрического поля  $E$ .

**Теорема Ирншоу:**

**Устойчивая статистическая конфигурация электрических зарядов невозможна.**

# Постоянный электрический ток

1. Характеристики электрического тока
2. Электродвижущая сила
3. Закон Ома. Электрическое сопротивление
4. Закон Джоуля-Ленца. Закон Ома для неоднородного участка цепи
5. Правила Кирхгофа
6. Коэффициент полезного действия источника тока

# 1. Характеристики электрического тока

**Электрическим током** называется упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока  $I$**  - скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей.

Если в проводнике движутся носители обоих знаков, то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}$$

За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется **плотностью тока**:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

В общем случае плотность тока  $j$  не будет одинаковой по всему сечению проводника. Поэтому:

$$j = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dI}{dS}$$

$$dI = j dS$$

Единица силы тока — ампер (А).

Сила тока сквозь произвольную поверхность  $S$  определяется как поток вектора  $j$ , т. е.

$$I = \int_S j_n dS$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется **постоянным**.

## 2. Электродвижущая сила

Если в цепи на носители тока действуют только силы **электростатического поля**, то происходит перемещение носителей (они предполагаются положительными) от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приведет к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного поддерживать разность потенциалов за счет работы сил **неэлектростатического происхождения**. Такие устройства называются **источниками тока**.

Силы *неэлектростатического происхождения*, действующие на заряды со стороны источников тока, называются **сторонними**.

Сторонние силы совершают работу по перемещению электрических зарядов.

Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой (э.д.с.)**, действующей в цепи:

$$\varepsilon = \frac{A}{q}$$

Э.д.с., как и потенциал, выражается в вольтах.

Величина сторонней силы, действующей на заряд  $q$ :  $f_{cm} = E_{cm} q$   
 $E_{cm}$  - напряженность поля сторонних сил.

Работа сторонних сил над зарядом  $q$  в замкнутой цепи:

$$A = \oint f_{cm} dl = q \oint E_{cm} dl$$

$$\varepsilon = \frac{A}{q}$$

э.д.с., действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.

$$\varepsilon = \oint E_{cm} dl$$

На заряд  $q$  помимо сторонних сил действуют также силы электростатического поля

$$\vec{f}_E = q\vec{E}$$

Таким образом, резльтирующая сила, действующая в цепи на заряд  $q$ , равна

$$\vec{f} = \vec{f}_{cm} + \vec{f}_E = q(\vec{E}_{cm} + \vec{E})$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом  $q$  на участке 1—2, равна:

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E}_{cm} dl + q \int_1^2 \vec{E}_l dl = q\varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \frac{A_{12}}{q} = \varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)$$

**Напряжением  $U$**  на участке цепи называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи.

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}$$

### 3. Закон Ома. Электрическое сопротивление

Сила тока  $I$ , текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению  $U$  на концах проводника:

$$I = \frac{1}{R} U$$

где  $R$  — электрическое сопротивление проводника.

Единица сопротивления — Ом: 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А.

Для однородного линейного проводника сопротивление  $R$  прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади его поперечного сечения  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

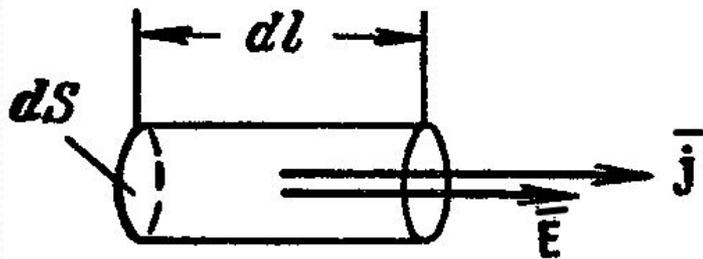
где  $\rho$  - удельное электрическое сопротивление.

Единица удельного электрического сопротивления — Ом · м.

$$\lambda = \frac{1}{\rho}$$

- электрическая проводимость проводника

Закон Ома можно представить в дифференциальной форме.



$$dI = j dS$$

$$dU = Edl$$

$$dI = \frac{dU}{R}$$

$$R = \rho \frac{dl}{dS}$$

$$j dS = \frac{Edl dS}{\rho dl} \rightarrow j = \frac{1}{\rho} E$$

$$j = \frac{1}{\rho} E = \lambda E$$

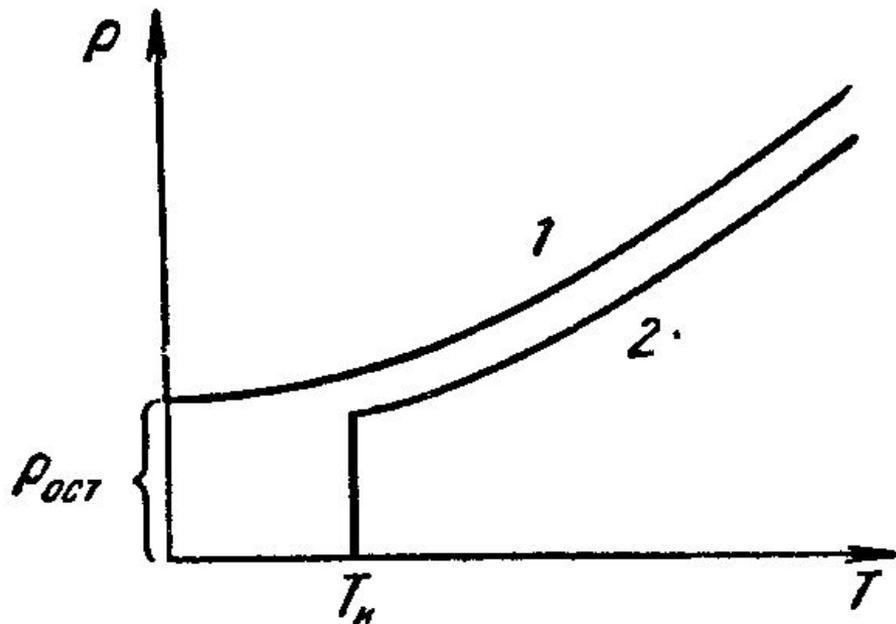
— закон Ома в дифференциальной форме, связывает плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в этой же точке.

Для большинства металлов изменение удельного сопротивления с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ),$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  — соответственно удельные сопротивления проводника при  $t$  и  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  — **температурный коэффициент сопротивления**, для чистых металлов (при не очень низких температурах) близкий к  $1/273 \text{ K}^{-1}$ .

Переходя к абсолютной температуре:



$$\rho = \rho_0 \alpha T$$

Явление, названное сверхпроводимостью, обнаружено в 1911 г. Камерлинг-Оннесом для ртути. Явление сверхпроводимости объясняется на основе квантовой теории.

## 4. Закон Джоуля-Ленца

При прохождении по проводнику тока проводник нагревается. Джоуль и независимо от него Ленц обнаружили экспериментально, что количество тепла, выделяющееся в проводнике пропорционально его сопротивлению, квадрату силы тока и времени прохождения тока.

$$Q = RI^2t \quad \text{- закон Джоуля—Ленца}$$

Если сила тока изменяется со временем, то:

$$Q = \int_0^t Ri^2 dt$$

При этом силы поля совершают работу:  $dA = Udq = Uidt = Ri^2 dt$

Т.о., нагревание проводника происходит за счет работы, совершаемой силами поля над носителями заряда.

По закону Джоуля — Ленца, за время  $dt$  в этом объеме выделится теплота

$$dQ = Ri^2 dt$$

$$R = \rho \frac{dl}{dS}; \quad di = jdS$$

$$dQ = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dl dS dt$$

$$dQ = \rho j^2 dV dt$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется **удельной тепловой мощностью тока**.

$$w = \rho j^2$$

Используя дифференциальную форму закона Ома ( $j = \lambda E$ ) и соотношение  $\rho = 1/\lambda$ , получим

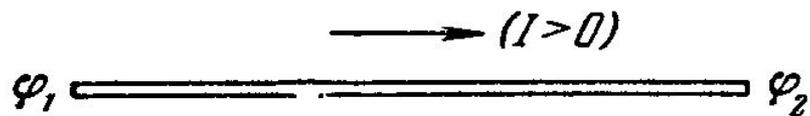
$$w = \lambda E^2$$

Формулы являются обобщенным выражением закона Джоуля—Ленца в дифференциальной форме

## Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим неоднородный участок цепи, где  $\varepsilon_{12}$  - действующая э.д.с. на участке цепи

$(\varphi_1 - \varphi_2)$  - разность потенциалов



Работа, совершаемая над зарядом, равна:

$$dA = (\varphi_1 - \varphi_2)dq + \varepsilon_{12}dq$$

За время  $dt$  выделяется тепло

$$dQ = I^2 R dt = IR dq$$

$$dA = dQ$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)dq + \varepsilon_{12}dq = IR dq$$

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R}$$

- закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме

при  $\varepsilon_{12} = 0$   $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$  однородный участок цепи

при  $\varphi_1 = \varphi_2$   $I = \frac{\varepsilon}{R}$  замкнутая цепь

В общем случае  $R = r + R_H$ , где  $r$  — внутреннее сопротивление источника тока,  $R_H$  — сопротивление внешней цепи.

В дифференциальной форме закон Ома при наличии сторонних сил:

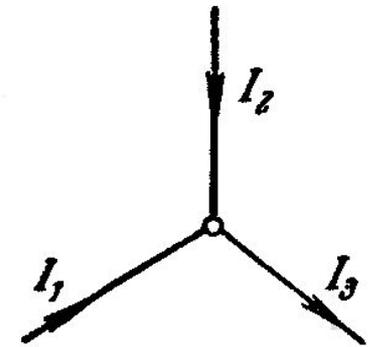
$$j = \lambda (\overset{\nabla}{E} + \overset{\nabla}{E}_{cm})$$

## 5. Правила Кирхгофа

### 1 правило.

Узлом называется точка, в которой сходится более, чем два проводника. Ток, текущий к узлу считается имеющим один знак (напр. +), текущий от узла – другой (напр. -).

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна 0.



$$\sum_k I_k = 0$$

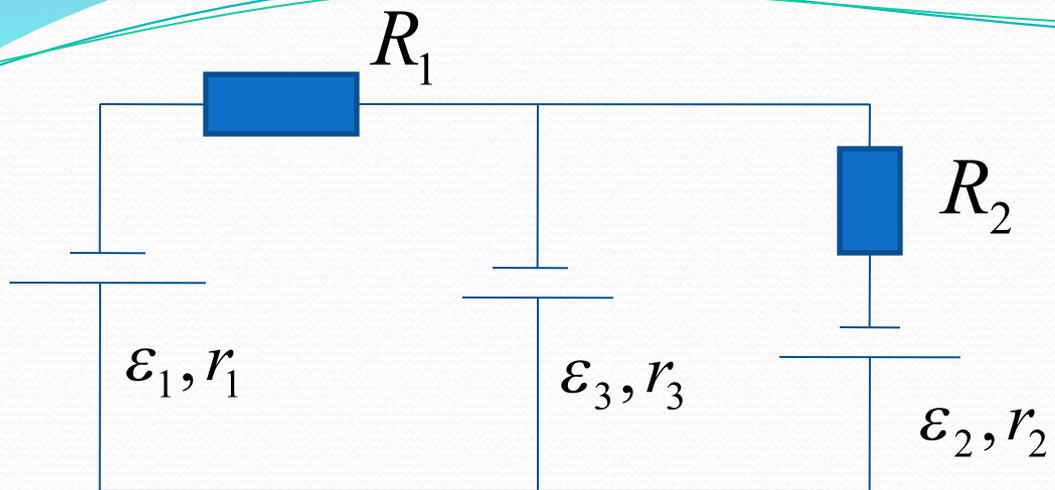
### 2 правило.

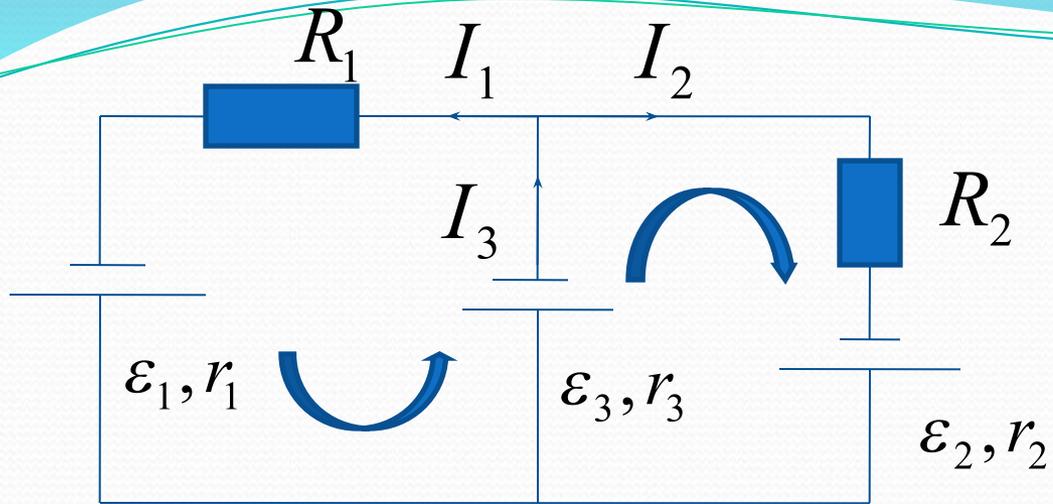
**В замкнутом контуре**, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма падений напряжений на всех участках контура равна алгебраической сумме э.д.с., встречающихся в этом контуре:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k$$

При расчете сложных цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи;
2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение  $IR$  положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода. Э.д.с. будет “+”, если при обходе придется идти от минуса к плюсу внутри источника.





$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$I_1 R_1 + I_1 r_1 + I_3 r_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$$

$$I_2 R_2 + I_2 r_2 + I_3 r_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$$

## 6. Коэффициент полезного действия источника

### тока

Ток в цепи  $I = \frac{\varepsilon}{R_n + r}$

$R_n$  - сопротивление нагрузки,

$r$  - сопротивление источника

Напряжение на нагрузке:

$$U = IR_n = \frac{\varepsilon}{R_n + r} R_n$$

Работа, совершаемая над переносимым вдоль цепи зарядом:

$$dA = \varepsilon dq$$

Мощность, развиваемая источником

$$P = \frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I$$

$$P = \varepsilon I$$

- мощность, развиваемая источником тока

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R_n + r}$$

- полная мощность, выделяемая во всей цепи

Мощность, выделяемая на нагрузке – полезная мощность

$$P_H = UI$$

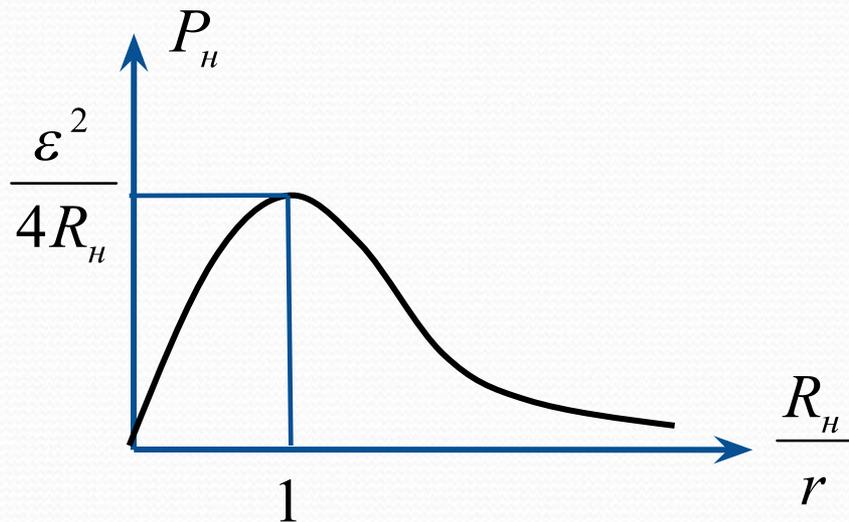
$$P_H = I^2 R_H$$

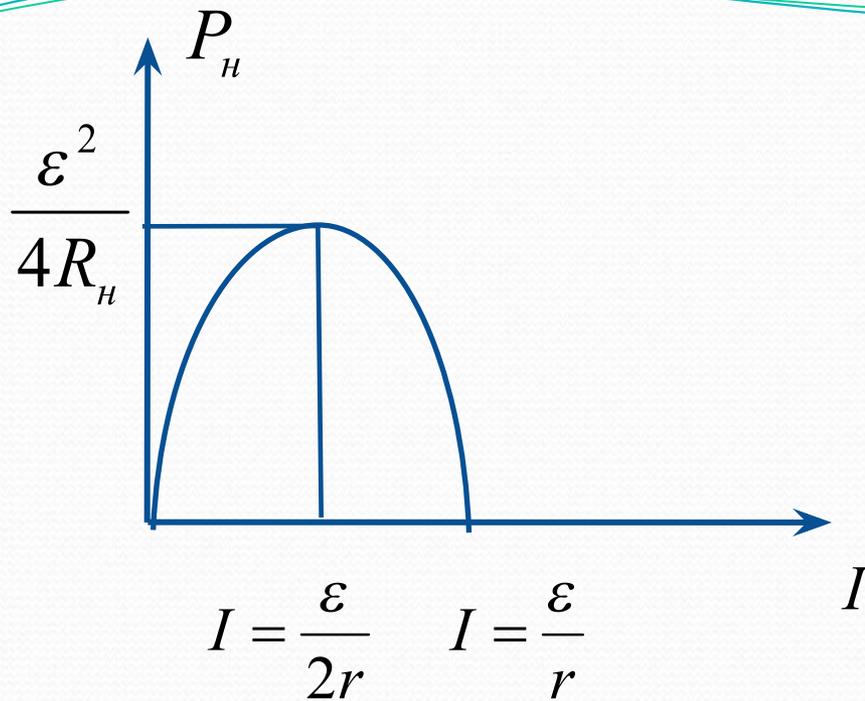
$$P_H = \frac{\varepsilon^2 R_H}{(R_H + r)^2}$$

**КПД** источника равен отношению полезной мощности к полной.

$$\eta = \frac{P_H}{P} = \frac{\varepsilon^2 R_H (R_H + r)}{(R_H + r)^2 \varepsilon^2} = \frac{R_H}{R_H + r}$$

$$\eta = \frac{R_H}{R_H + r}$$





$$I = \frac{\varepsilon}{R_H + r} \quad (\text{при } R_H = r) \quad I = \frac{\varepsilon}{2R_H} = \frac{\varepsilon}{2r}$$

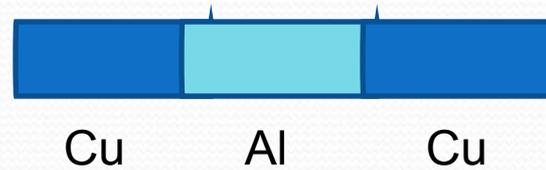
$$P_H = 0 \quad \text{при } R_H = 0; \quad \text{возможна } I = \frac{\varepsilon}{r}$$

# Элементы классической теории проводимости

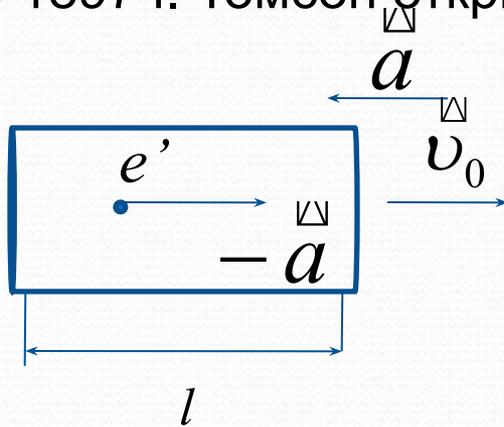
1. Экспериментальные доказательства  
электронной природы токов в металлах
2. Основные положения электронной теории
3. Закон Ома и закон Джоуля-Ленца
4. Трудности классической электронной теории  
металлов

# 1. Экспериментальные доказательства электронной природы токов в металлах

## 1. Опыт Рикке (1901).



В 1897 г. Томсон открыл электроны.



$$E = -\frac{ma}{e'} \quad U = lE = -l\frac{ma}{e'}$$

$$i = \frac{U}{R} \quad dq = idt = \frac{U}{R} dt = -\frac{mal}{e'R} dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a dt = dv$$

$$dq = -\frac{ml}{e'R} dv$$

$$q = \int_0^t dq = - \int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{m l v_0}{e' R}$$

Первый опыт с ускоренно движущимися проводниками был поставлен в 1913 г. Мандельштамом и Папалекси.

Количественный результат был получен Толмером и Стюартом в 1916 г.

Было экспериментально доказано, что носителями тока в металлах являются свободные электроны.

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом: при образовании кристаллической решетки металла (в результате сближения изолированных атомов) валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомными ядрами, отрываются от атомов металла, становятся «свободными» и могут перемещаться по всему объему.

## 2. Основные положения электронной теории

Друде разработал классическую теорию металлов, которая затем была усовершенствована Лоренцем.

Друде предположил:

1. Электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа.
2. Между соударениями электроны движутся свободно, пробегая в среднем путь  $\lambda$ .
3. Электроны сталкиваются в основном с ионами, образующими кристаллическую решетку, а не между собой.
4. Столкновения электронов с ионами приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Применяя выводы молекулярно-кинетической теории газов, можно оценить среднюю скорость теплового движения электронов:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \text{При } T \sim 300 \text{ К} \quad \langle v \rangle \approx 10^5 \text{ м/с}$$

Включаем поле: на хаотическое движение электронов со скоростью  $\langle v \rangle$  накладывается упорядоченное движение со средней скоростью  $\langle u \rangle$ .

Допустимая плотность тока для медного проводника

$$j \approx 10^7 \text{ А/м}^2 \quad n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

Плотность тока:  $j = ne\langle u \rangle$

$$\langle u \rangle = \frac{j}{ne} \approx \frac{10^7 \text{ А/м}^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 10^{29} \text{ 1/м}^3} \approx 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\langle u \rangle < \langle v \rangle \quad \text{в } 10^8 \text{ раз.}$$

Поэтому при вычислениях результирующую скорость  $\langle v \rangle + \langle u \rangle$  можно заменять скоростью теплового движения  $\langle v \rangle$ .

Найдем изменение среднего значения кинетической энергии электронов, вызванное полем.

$$\langle (\mathbf{v} + \mathbf{u})^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle + 2\langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}^2 \rangle \quad \langle \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow$$

Упорядоченное движение увеличивает кинетическую энергию электронов в среднем на:

$$\langle \Delta E_k \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}$$

### 3. Закон Ома

Предположения:

1. После соударения с кристаллической решеткой скорость упорядоченного движения электрона равна нулю.
2. Пусть напряженность поля не меняется.

Со стороны поля заряд  $e$  испытывает действие силы  $F = eE$  и приобретает ускорение  $a = F/m = eE/m$ .

Во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$\langle u_{\max} \rangle = \frac{eE}{m} \tau$$

где  $\tau$  — время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

$$\tau = \frac{\lambda}{v} \quad \langle u_{\max} \rangle = \frac{eE}{m} \frac{\lambda}{v} \quad \langle u \rangle = \frac{1}{2} \langle u_{\max} \rangle = \frac{eE}{2m} \frac{\lambda}{v}$$

$$j = ne \langle u \rangle \quad j = \frac{ne^2}{2m} \frac{\lambda}{v} E$$

Закон Ома

$$j = \frac{1}{\rho} E$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2}{2m} \frac{\lambda}{v}$$

## Закон Джоуля-Ленца

К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle \Delta E_k \rangle = \frac{m \langle u_{\max}^2 \rangle}{2} = \frac{m e^2 E^2 \lambda^2}{2 m^2 v^2} \quad \langle \Delta E_k \rangle = \frac{e^2 \lambda^2}{2 m v^2} E^2$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами

решетки в среднем  $\frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}$  столкновений и каждый раз

сообщает решетке энергию  $\langle \Delta E_k \rangle$

В единице объема за единицу времени выделится тепло

$$w = n \frac{1}{\tau} \langle \Delta E_k \rangle = \frac{ne^2 \lambda}{2m\nu} E^2$$

$$w = \frac{ne^2 \lambda}{2m\nu} E^2$$

Закон Джоуля-Ленца

$$w = \frac{1}{\rho} E^2$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2 \lambda}{2m\nu}$$

Классическая теория объяснила законы Ома и Джоуля-Ленца. Однако она столкнулась с существенными трудностями.

## 4. Трудности классической электронной теории металлов

Из формулы удельной проводимости следует, что удельное сопротивление металлов должно возрасти пропорционально  $\sqrt{T}$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2 \lambda}{2m v}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Из формул следует, что  $\rho \sim v \sim \sqrt{T}$

Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым  $\rho \sim T$ .

Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т. е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно большей, чем атомная теплоемкость диэлектриков, у которых нет свободных электронов.

Однако опыт показывает, что заметного отличия теплоемкости металлов и диэлектриков не наблюдается.

Указанные расхождения теории с опытом можно объяснить тем, что движение электронов в металлах подчиняется не законам классической механики, а законам квантовой механики и, следовательно, поведение электронов проводимости надо описывать не статистикой Максвелла — Больцмана, а квантовой статистикой.

# Электромагнетизм

1. Взаимодействие токов. Магнитное поле
2. Закон Био-Савара
3. Поле прямого и кругового токов
4. Поле движущегося заряда
5. Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$