

Колебания



Пружинный маятник

Физический маятник

Математический маятник

Характеристики гармонических колебаний

Затухающие колебания

Вынужденные колебания. Резонанс

Основные определения

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости

Свободные колебания происходят в системе, предоставленной самой себе, после выведения ее из положения равновесия

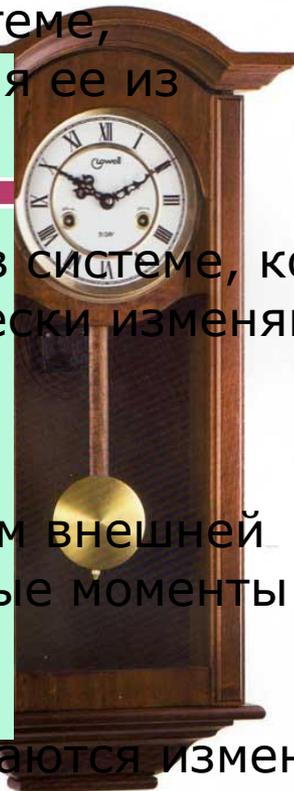
Колебания в живых организмах

Вынужденные колебания совершаются в системе, которая подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы



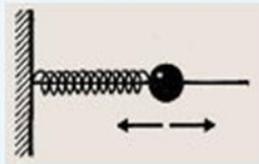
Автоколебания совершаются под действием внешней силы, которая действует только в определенные моменты времени

Параметрические колебания сопровождаются изменением какого-либо параметра системы за счет внешнего воздействия

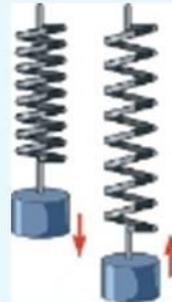


Пружинный маятник

Пружинным маятником называется система, состоящая из груза массой m и невесомой пружины жесткостью k .

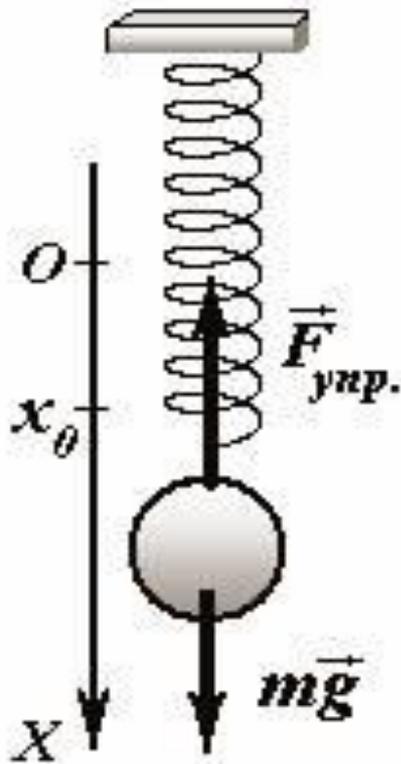


горизонтальный
пружинный маятник



вертикальный
пружинный
маятник

Пружинный маятник



Дифференциальное уравнение гармонических колебаний пружинного маятника:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

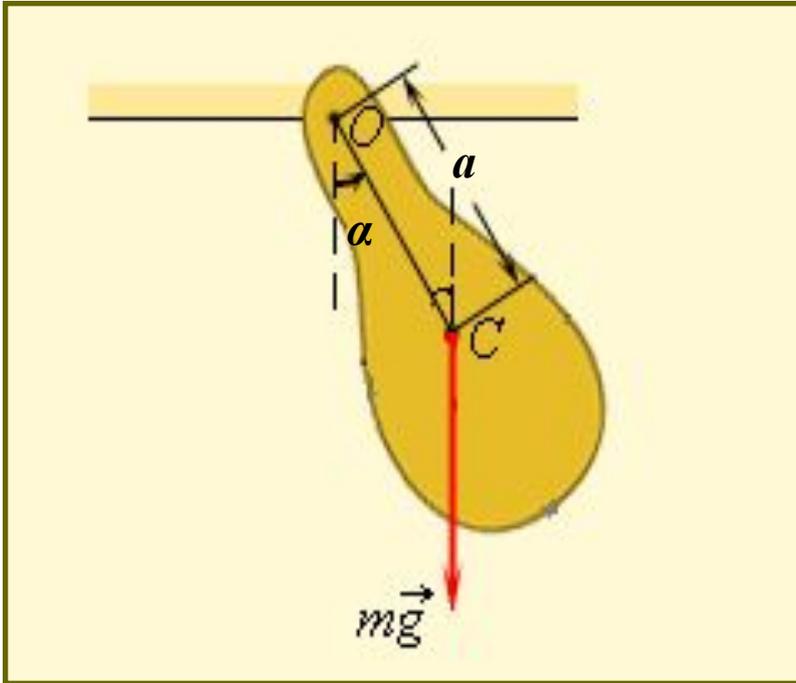
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

частота собственных колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

период

Физический маятник



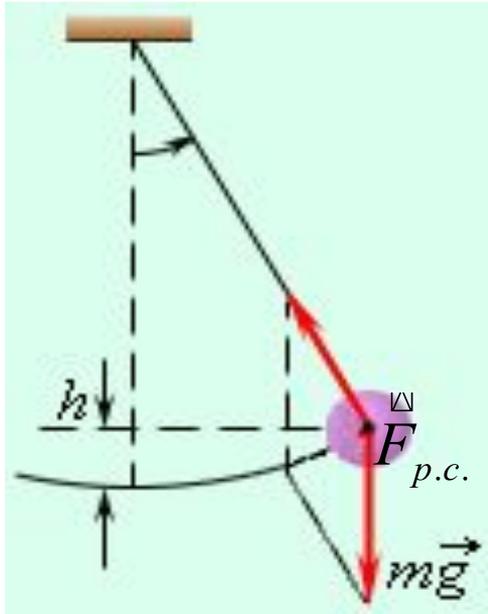
любое твердое тело, которое может совершать колебания под действием силы тяжести в пределах малых углов

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mga}{I_0} \alpha = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_0}} \quad \text{частота}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}} \quad \text{период}$$

Математический маятник



- материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити и способная совершать колебания в пределах малых углов

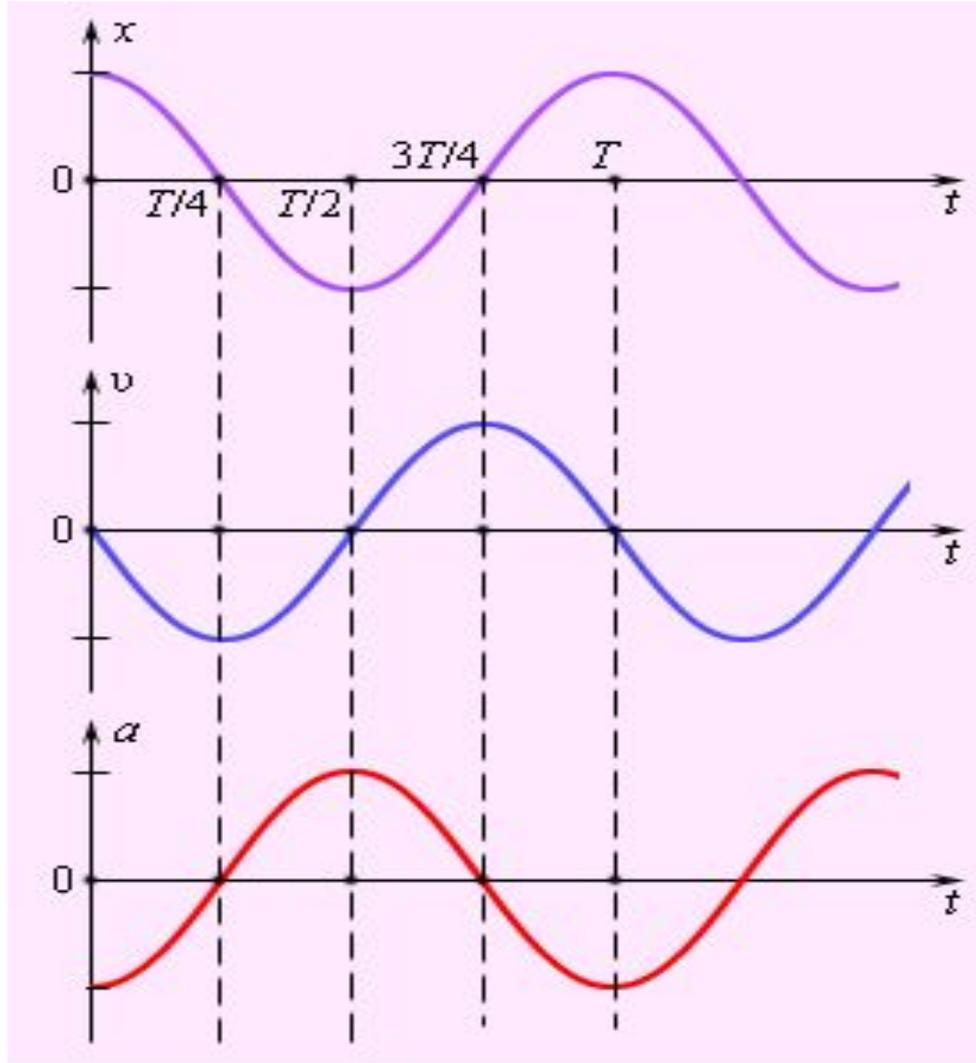
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

период колебаний

Гармонические колебания

Пружинный маятник	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
Физический маятник	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}$	$\ddot{\alpha} + \frac{mga}{J}\alpha = 0$
Математический маятник	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$
Колебательный контур	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$

Характеристики гармонических колебаний



смещение

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_{0x})$$

скорость

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_{0x})$$

ускорение

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -v_0\omega \sin(\omega t + \varphi_{0v}) = \\ = -\omega^2 x$$

Кинетическая и потенциальная энергия

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

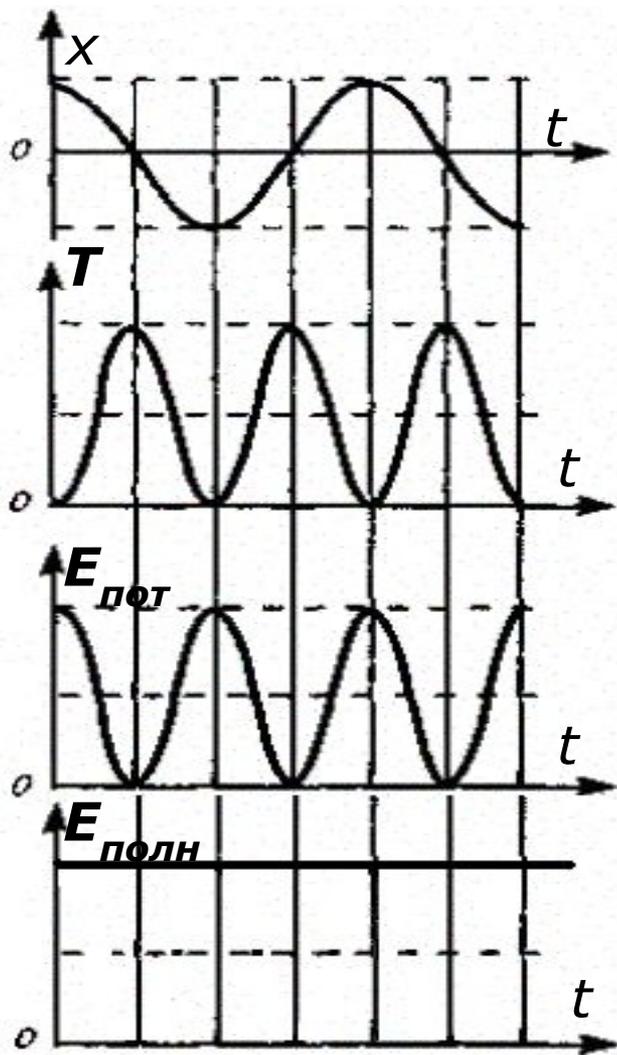
$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow F = ma = -m\omega_0^2 x$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{\text{пот}} = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{\text{полн}} = T + E_{\text{пот}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Кинетическая и потенциальная энергия



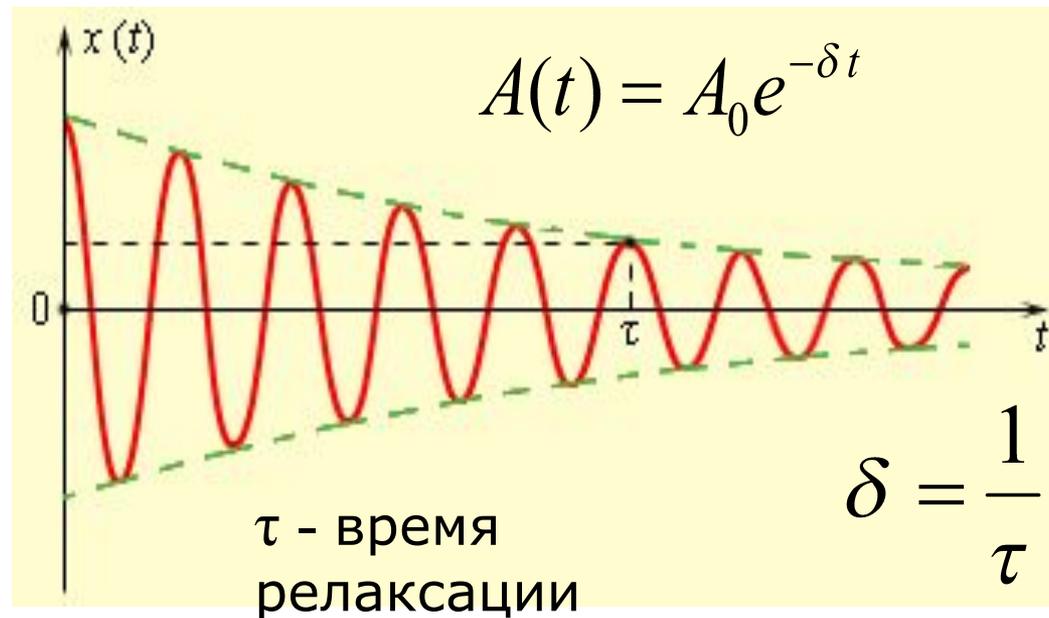
Полная механическая энергия колеблющейся системы, совершающей гармонические колебания, не зависит от времени, т.е. при свободных незатухающих колебаниях **полная механическая энергия системы остается величиной постоянной**

Затухающие колебания

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad - \text{частота затухающих колебаний}$$



$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$$

логарифмический коэффициент затухания

Вынужденные колебания

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \longrightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi_{0x})$$

$\varphi_{0x} = \varphi_x - \varphi_F$ — сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой:

$$\operatorname{tg} \varphi_{0x} = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

амплитуда вынужденных колебаний

Резонанс

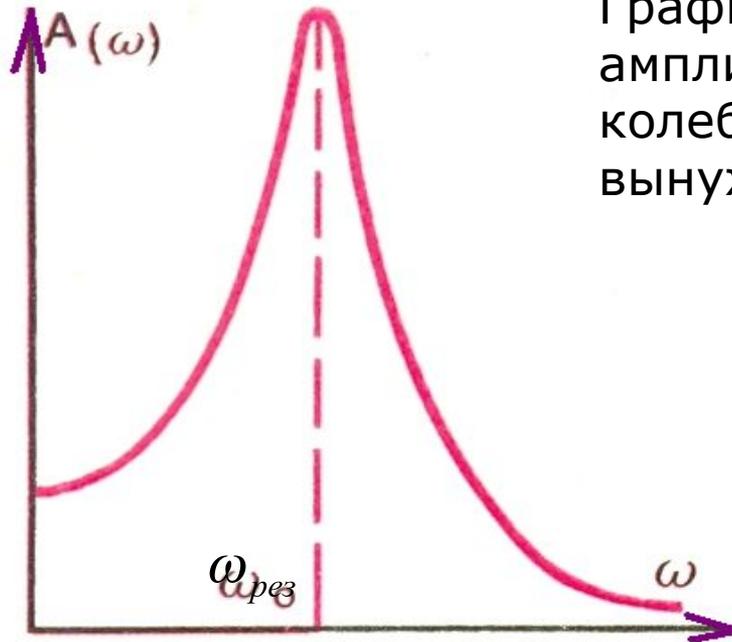


График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы

1. При $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow A = F_0 / m\omega_0^2$
2. При $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow 0$
3. Функция имеет экстремум:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Резонансные кривые

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний под действием вынуждающей силы при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте системы.

