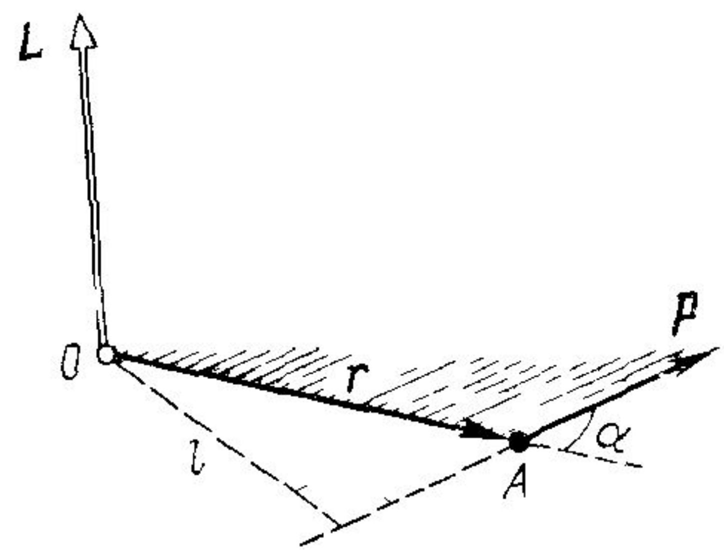
Динамика вращательного движения твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения. Момент инерции твердого тела относительно оси. Теорема Штейнера. Момент импульса. Момент силы. Закон сохранения и изменения момента импульса.

- На прошлом занятии разобрали импульс и энергию. Рассмотрим величину **момент импульса** - характеризует количество вращательного движения. Величина, зависящая от того, сколько массы вращается, как она распределена относительно оси вращения и с какой скоростью проходит вращение.

Рассмотрим частицу А. **r** – радиус-вектор, характеризующий положение относительно некоторой точки О, выбранной системы отсчёта. **Р**-импульс в этой системе. Векторная величина **L** – **момент импульса частицы** А относительно точки О:

$$\boxed{\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]}$$

Модуль вектора L: $L = rp \sin\alpha = lp$
где α – угол между **r** и **p**, *l=r sin α* - плечо вектора **p** относительно точки О.



Рассмотрим изменение вектора **L** со временем:

$$d\mathbf{L}/dt = [d\mathbf{r}/dt,\ \mathbf{p}] + [\mathbf{r},\ d\mathbf{p}/dt].$$

$[d\mathbf{r}/dt,\ \mathbf{p}] = 0$ т.к. d**r**/dt =**v**, **v** направлен так же, как и **p**

$[\mathbf{r},\ d\mathbf{p}/dt] = [\mathbf{rF}]$, т.к. d**p**/dt=**F** –равнодействующая всех сил.

Тогда:

$$d\mathbf{L}/dt = [\mathbf{rF}].$$

Момент силы: **M**=[**rF**]

Модуль момента силы: $M = lF$

где ***l*** – плечо вектора **F** относительно точки **O**

Уравнение моментов: производная по времени от момента импульса **L** частицы относительно некоторой точки О **равна моменту** **M** равнодействующей силы **F** относительно той же точки О:

$$\boxed{d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}.}$$

Если **M** = 0, то **L**=const – если момент равнодействующей силы равен 0 в течении интересующего промежутка времени, то импульс частицы остаётся постоянным в течении этого времени.

- Уравнение моментов позволяет:
  - Найти момент силы **M** относительно точки О в любой момент времени t , если известна зависимость от времени момента импульса **L**(t) частицы, относительно той же точки;
  - Определить приращение момента импульса частицы относительно точки О за любой промежуток времени, если известна зависимость от времени момента сил **M**(t), действующего на эту частицу (относительно той же точки О).
- Используем уравнение моментов, и запишем элементарное приращение вектора **L**: $d\mathbf{L}=\mathbf{M}dt$
- Тогда, проинтегрировав выражение, найдём приращение **L** за конечный промежуток времени t:

$$\mathbf{L}_2-\mathbf{L}_1=\int_0^t \mathbf{M}\,dt.$$

- правая часть – импульс момента силы.
- Приращение момента импульса частицы за любой промежуток времени равно импульсу момента силы за это же время.

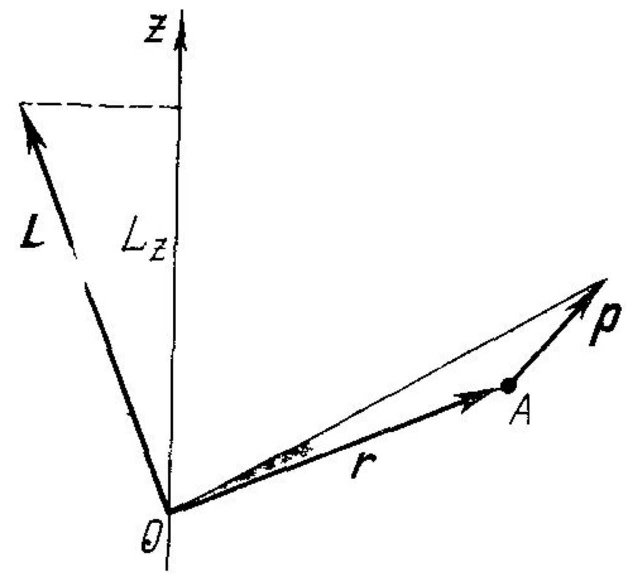
Момент импульса и момент силы относительно оси

- Возьмём ось z.Выберем точку О. **L** - момент импульса частицы А относительно точки, М- момент силы.

Моментом импульса и моментом силы относительно оси z называют проекцию на эту ось векторов **L и М**. Обозначают L_z и M_z - они не зависят от точки выбора О.

Производная по времени от момента импульса частицы относительно оси z равна моменту силы относительно этой оси. В частности: $M_z=0 \Rightarrow L_z=0$.

Если момент силы относительно некоторой подвижной оси z равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой оси остаётся постоянным, при этом сам вектор **L** может меняться.



Закон сохранения моменте импульса

- Выберем произвольную систему частиц. Момент импульса данной системы будет векторная сумма моментов импульсов её отдельных частиц: $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$
- Векторы определены относительно одной и той же оси. Момент импульса величина аддитивная: момент импульса системы равен сумме моментов импульсов её отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.
- Найдём изменение момента импульса:

$$d\mathbf{L}/dt = \sum d\mathbf{L}_i/dt. \quad \blacktriangleright \quad d\mathbf{L}/dt = \sum \mathbf{M}_i' + \sum \mathbf{M}_i$$

- $\sum \mathbf{M}_i'$ - суммарный момент всех внутренних сил относительно точки О.;
- $\sum \mathbf{M}_i$ - суммарный момент всех внешних сил относительно точки О.
- Производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту всех внешних сил! (используя 3 закон Ньютона):

$$d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}_{\text{внеш}}$$

- Момент импульса системы может изменяться под действием только суммарного момента всех внешних сил
- **Закон сохранения импульса:** момент импульса замкнутой системы частиц остаётся постоянным, т.е. не меняется со временем.:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i(t) = \text{const}$$

- Справедливо для момента импульса, взятого относительно любой точки инерциальной системы отсчёта. Внутри системы изменения могут быть, но приращение момента импульса одной части системы равно убыли момента импульса другой её части.
- **Закон сохранения момента импульса** –
  - не является следствием 3-го закона Ньютона, а представляет самостоятельный общий принцип;
  - один из фундаментальных законов природы.
- Закон сохранения момента импульса есть проявление изотропности пространства относительно поворота.

Динамика твёрдого тела

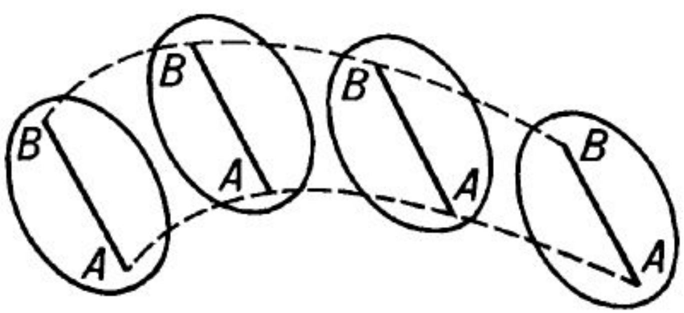
Два основных вида движения твёрдого тела:

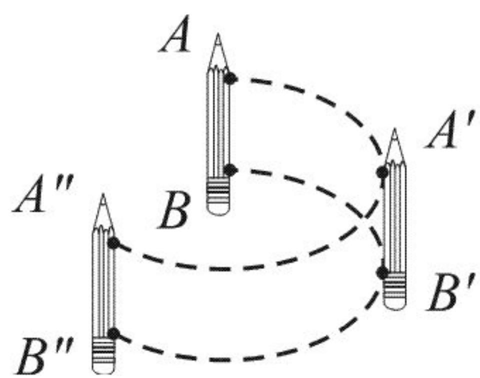
Поступательное: все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные по величине и направлению перемещения.

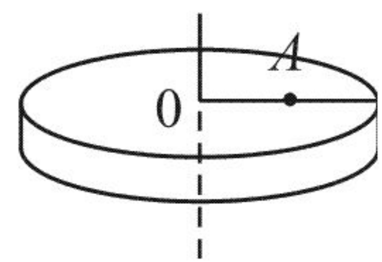
Задать движение одной точки

Вращательное: все точки твёрдого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Задать ось вращения и угловую скорость в каждый момент времени

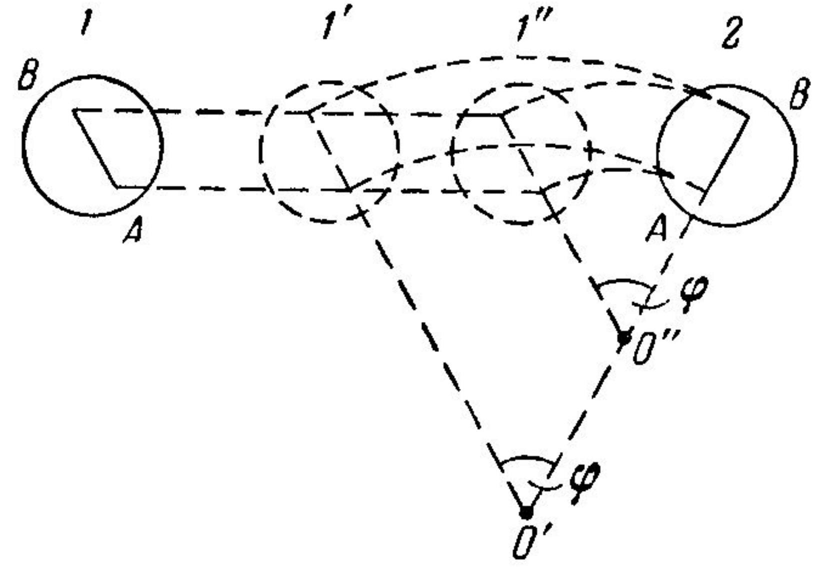






Любое движение твёрдого тела может быть представлена как сумма двух этих движений!

- Произвольное перемещение твёрдого тела из положения 1 в положение 2 можно представить как сумму двух перемещений- поступательного перемещения из положения 1 в положения 1’ или 1” и поворота вокруг оси O’ или оси O”.



- Элементарное перемещение *ds*:

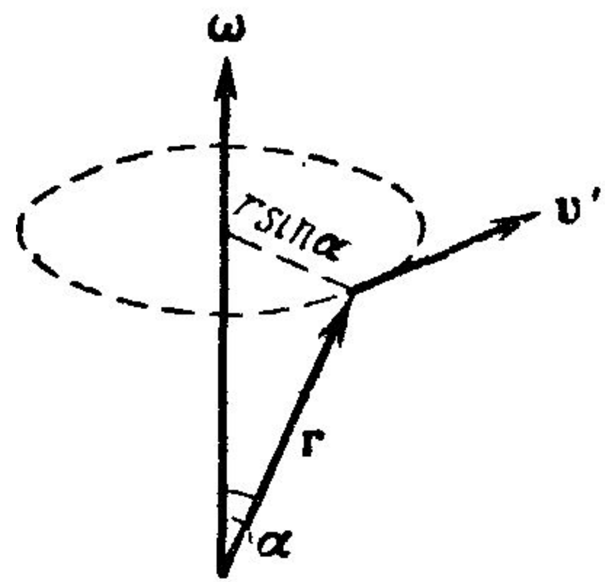
$$d\mathbf{s} = d\mathbf{s}_\text{п} + d\mathbf{s}_\text{в}$$

- $d\mathbf{s}_\text{п}$ - «поступательного»
- $d\mathbf{s}_\text{в}$ - «вращательного»
- Скорость точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}_\text{п}}{dt} + \frac{d\mathbf{s}_\text{в}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

- $\mathbf{v}_0$ - одинаковая для всех точек тела скорость поступательного движения
- $\mathbf{v}'$ - различная для разных точек тела скорость, связанная с вращением тела

- Пусть система отсчёта неподвижна. Тогда движение можно рассмотреть как вращательное движение с угловой скоростью w в системе отсчёта, движущейся относительно неподвижной системы поступательно со скоростью v_0.

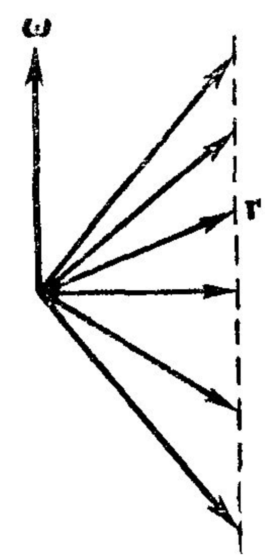


- Линейная скорость v’, обусловленная вращением твёрдого тела:

$$\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$$

- <u>Скорость точки при сложном движении</u>:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$$



- Существуют точки, которые при векторном перемножении векторов r и w дают вектор v_0. Эти точки лежат на одной прямой и образуют <u>мгновенную ось вращения</u>.

Движение твёрдого тела в общем случае определяется двумя векторными уравнениями:

- Уравнение движения центра масс:
- Уравнение моментов:

Законы действующих внешних сил, точки их приложения и начальные условия ➤ скорость и положение каждой точки твердого тела в любой момент времени.

Точки приложения внешних сил можно переносить вдоль направления действия сил.

Равнодействующая сила- сила, сила которая равна результирующей сил **F**, действующих на твёрдое тело, и создаёт момент, равный суммарному моменту **M** всех внешних сил.

Случай поля тяжести: равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс.

Сила, действующая на частицу: $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{g}$.

Суммарный момент сил тяжести относительно любой точки:

$$\mathbf{M} = \sum[\mathbf{r}_i,\ m_i\,\mathbf{g}] = \left[\left(\sum m_i\,\mathbf{r}_i\right)\mathbf{g}\right] \blacktriangleright \ \mathbf{M} = [m\,\mathbf{r}_C,\ \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_C,\ m\mathbf{g}]$$

- Условия равновесия твердого тела: тело будет оставаться в состоянии покоя, если нет причин, вызывающих его движение. По двум основным уравнениям движения тела, для это необходимо два условия:
  - Результирующая внешних сил равна нулю:

$$\mathbf{F}=\sum \mathbf{F}_{i\,\text{внеш}}=0$$

  - Сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело относительно любой точки должен быть равен нулю:

$$\mathbf{M}=\sum \mathbf{M}_{i\,\text{внеш}}=0$$

- Если система неинерциальная, то кроме внешних сил необходимо учитывать силы инерции (силы, обусловленные ускоренным движением неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета). Три случая движения твёрдого тела:
    - Вращение вокруг неподвижной оси
    - Плоское движение
    - Вращение вокруг свободных осей

Вращение вокруг неподвижной оси

- Момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения OO’:

$$L_z = \sum L_{iz} = \left(\sum m_i \rho_i^2\right) \omega_z$$

- где m_i и p_i- масса и расстояние от оси вращения i-й частицы твёрдого тела, w_z –его угловая скорость. Введём обозначение:

$$L_z = I \omega_z$$

- где I – момент инерции твёрдого тела относительно оси OO’:

$$I = \sum m_i \rho_i^2$$

- Момент инерции тела находится как:

$$I = \int r^2 \, dm = \int \rho \, r^2 \, dV$$

- где dm и dv – масса и объём элемента тела, находящегося на расстоянии r от интересующей нас оси z; ρ- плотность тела в данной точке.

- Моменты инерции однородных твёрдых тел, относительно оси проходящей через центр масс:

Твердое тело	Ось z_C	Момент инерции
Тонкий стержень длины l	Перпендикулярна стержню	$^1/_{12}ml^2$
Сплошной цилиндр радиуса R	Совпадает с осью цилиндра	$^1/_2mR^2$
Тонкий диск радуса R	Совпадает с диаметром диска	$^1/_4mR^2$
Шар радиуса R	Проходит через центр шара	$^2/_5mR^2$

- Теорема Штейнера: момент инерции I относительно произвольной оси z равен моменту инерции I_c относительно оси I_c, параллельной данной и проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$\boxed{I = I_C + ma^2}$$

- Уравнение динамики вращения твёрдого тела:

$$I\,\beta_z = M_z$$

где M_z – суммарный момент всех внешних сил относительно оси вращения. Момент инерции I определяет инерционные свойства твёрдого тела при вращении: при одном и том же значении момента сил M_z тело с большим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорения β_z. M_z включает и моменты сил инерции.

- Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела (ось вращения неподвижна): пусть скорость частицы вращающегося твёрдого тела –
- Тогда:

$$T = \sum m_i v_i^2/2 = \left(\sum m_i \rho_i^2\right)\omega^2/2 \qquad T = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

где *I* – момент инерции относительно оси вращения, *w* – его угловая скорость.

- Работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси определяется действием момента M_z этих сил относительно данной оси.

$$A = \int_0^{\varphi} M_z\,d\varphi$$

Плоское движение твёрдого тела

- При плоском движении центра масс твердого тела движется в определённой плоскости, неподвижной в данной системе отсчёта К, а вектор его угловой скорости w перпендикулярен этой плоскости. Движение описывают два уравнения:

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}; \quad I_C \beta_z = M_{Cz}$$

где m – масса тела, **F**-результирующая всех внешних сил, I_c и M_{cz} - момент инерции и суммарный момент всех внешних сил- оба относительно оси, проходящей через центр тела.

- Кинетическая энергия твёрдого тела при плоском движении складывается из энергии вращения в системе вокруг оси, проходящей центр масс, энергии связанной с движением центра масс:

$$T = \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{m V_C^2}{2}$$

где I_c –момент инерции относительно оси вращения (через ЦМ), w – угловая скорость тела, m – его масса, V_c – скорость центра масс тела системе отсчёта К.

Вращение вокруг свободных осей

- Ось вращения, направление которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё каких либо сил извне, называют свободной осью вращения тела.
- Главные оси тела – три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр масс, которые могут служить свободными осями.
- Для удержания оси вращения в неизменном направлении к ней необходимо приложить момент M некоторых внешних сил F:

$$\boxed{\mathbf{M} = [\omega \, \mathbf{L}]}$$

- Если угол равен 90 градусам, то L совпадает по направлению с w, т.е. M=0!- направление оси вращения будет оставаться неизменным без внешнего воздействия
- При вращении тела вокруг любой главной оси вектор момента импульса **L** совпадает по направлению с угловой скоростью **w:**

$$\boxed{\mathbf{L} = I\,\omega}$$

где *I* -момент инерции тела относительно данной оси.